Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
Prof. Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
SS 18

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 3 - Taylorreihen

Aufgabe 1: Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital

a) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln x \quad (\alpha > 0)$,

b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$,

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos(ax)}{\ln\cos(bx)}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}\right)$,

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^b}{e^{ax}}, a, b > 0$,

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{\cos^2(x)}$,

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh(x)-1}{1-\cos(x)}$,

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \dfrac{\tan(3x)}{\tan(5x)}$.

Aufgabe 2: Geben Sie für die folgenden Funktionen die Potenzreihenentwicklung im Punkt $x_0 = 0$ (falls nicht anders angegeben) und den Konvergenzbereich an. Verwenden Sie dazu bekannte Taylorreihen!

a) $f(x) = e^{x^2}$,

b) $f(x) = \sinh x$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$,

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x_0 = 2$

e) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$,

f) $f(x) = \ln(1-x)$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den Konvergenzradius r folgender Potenzreihen und berechnen Sie für $|x| < r$ den Reihenwert, indem Sie bekannte Taylorreihen verwenden:

a) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$,

b) $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Taylorentwicklung im Punkt $x_0 = 1$ und untersuchen Sie anhand des Restgliedes auf Konvergenz:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$,

b) $f(x) = \sqrt{x}$,

c) $f(x) = e^x$.

Aufgabe 5: Schätzen Sie den Fehler ab, der bei folgenden Näherungen entsteht:

a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $0 \le x \le 1$, b) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 6: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$f'(x) = xf(x), \quad f(0) = 1$$

mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

Hausaufgaben

Abgabe 14.05.2018

Aufgabe 1: Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital — 3 Punkte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x}$, $n \in \mathbb{N}, a > 1$.

Aufgabe 2: Geben Sie für die folgende Funktionen die Potenzreihenentwicklung im Punkt $x_0 = 0$ (falls nicht anders angegeben) und deren Konvergenzbereich an. — 6 Punkte

a) $f(x) = e^{-x^2}$, c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 2$, e) $f(x) = \arctan x$,

b) $f(x) = a^x$, $a > 0$, d) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$, f) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Aufgabe 3: Geben Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \ln\cos x, |x| < \frac{\pi}{2}$, im Punkt $x_0 = 0$ bis $n = 3$ und das Restglied $R_3(f; 0, x)$ in der Lagrange'schen Form an. — 2 Punkte

Aufgabe 4: Berechnen Sie näherungsweise — 2 Punkte

a) $\sqrt[3]{30}$, b) $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$,

mit Hilfe eines Taylorpolynoms 2ten Grades, und schätzen Sie den Fehler ab. (Wählen Sie einen günstigen Entwicklungspunkt x_0!)

Aufgabe 5 (Schwingungsgleichung): Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft $f(x) + f''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist und beweisen Sie mit Hilfe der Taylor-Entwicklung von f, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: — 2 Punkte

$$f(x) = f(0)\cos x + f'(0)\sin x.$$