

Prüfungsfragen Analysis I, WS 2009/2010

1. Was versteht man unter einer geordneten Menge $(M, <)$? Wann sagt man, dass eine solche Menge die Supremumseigenschaft hat? (Def. 1.6 und Def. 1.8) Besitzt \mathbb{Q} die Supremumseigenschaft? Wie folgt aus der Supremumseigenschaft der Menge der reellen Zahlen das Archimedesche Prinzip? (Satz 1.12)
2. Beweisen Sie, dass jede positive reelle Zahl genau eine positive n -te Wurzel besitzt, $n \in \mathbb{N}$. (Satz 1.18) Wie kann man x^p für $x \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{Q}$ definieren?
3. Zeigen Sie, dass die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen die Wohlordnungseigenschaft besitzt. (Satz 1.15) Wie ergibt sich aus dieser Tatsache das Beweisprinzip der vollständigen Induktion? (Satz 1.21 und Folg. 1.22)
4. Beschreiben Sie die Menge der komplexen Zahlen mit den Operationen der Addition und der Multiplikation. Was versteht man unter der konjugiert komplexen Zahl, dem Betrag einer komplexen Zahl und der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen? Beweisen Sie die Formel von Moivre (1.13).
5. Was besagt die Schwarzsche Ungleichung? (Bsp. 1.32) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $z^n = 1$ genau n komplexe Lösungen besitzt. (Bsp. 1.33)
6. Erklären Sie die Begriffe Abbildung, Bild, Urbild, Bild einer Menge, Urbild einer Menge, Graph einer Abbildung. Wann nennt man eine Abbildung surjektiv, injektiv, bijektiv? Wann existiert zu einer Abbildung die Umkehrabbildung? (Satz 2.4 mit Beweis)
7. Wann nennt man zwei Mengen gleichmächtig? Erläutern Sie die Begriffe endlich, unendlich, abzählbar, überabzählbar, höchstens abzählbar. Geben Sie Beispiele an. Zeigen Sie, dass jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge abzählbar ist. (Satz 2.9)
8. Beweisen Sie, dass die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen und das Kreuzprodukt zweier abzählbarer Mengen abzählbar sind. (Satz 2.10 und Folg. 2.12)
9. Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist. (Satz 2.15 und Folg. 2.16)
10. Definieren Sie die Begriffe metrischer Raum, Berührungspunkt, Häufungspunkt, isolierter Punkt, innerer Punkt. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge eines metrischen Raumes genau dann offen ist, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist. (Satz 2.24,(c))
11. Ist die Menge der Häufungspunkte einer Menge stets abgeschlossen? Was können Sie über die Vereinigung und den Durchschnitt offener bzw. abgeschlossener Mengen aussagen? (Satz 2.24,(b),(d),(e), davon eine Aussage mit Beweis)
12. Zeigen Sie, dass jede Intervallschachtelung in der Menge der reellen Zahlen wenigstens eine reelle Zahl einfängt. (Bsp. 2.29)
13. Wann nennt man eine Teilmenge eines metrischen Raumes kompakt? Welche Eigenschaften kompakter Mengen kennen Sie? (Sätze 2.33, 2.34, 2.35, davon einen mit Beweis) Wie kann man die kompakten Teilmengen von \mathbb{R} charakterisieren? (Satz 2.36)
14. Wann nennt man eine Teilmenge eines metrischen Raumes zusammenhängend? Charakterisieren Sie die zusammenhängenden Teilmengen von \mathbb{R} . (Satz 2.38) Geben Sie Beispiele an.

15. Definieren Sie die Begriffe Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit für Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Wie kann man stetige Abbildungen mit Hilfe des Urbildbegriffes charakterisieren? (Satz 2.44)
16. Diskutieren Sie die Eigenschaften konvergenter Punktfolgen (Satz 3.2,(a),(b)) sowie die Eigenschaften von Cauchy-Folgen. (Fol. 3.5 mit Beweis)
17. Wie kann man kompakte Mengen mittels des Begriffes konvergenter Punktfolgen charakterisieren? (Satz 3.2,(c),(d) und Satz 3.3)
18. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Vollständigkeit und Kompaktheit eines metrischen Raumes. (Satz 3.8) Sind \mathbb{R} und \mathbb{Q} vollständig? (Bsp. 3.7)
19. Wie verhalten sich Grenzwerte von Zahlenfolgen gegenüber den Grundrechenarten in \mathbb{C} und gegenüber der Ordnungsrelation in \mathbb{R} ? (Fol. 3.9 mit Beweis und Satz 3.10)
20. Beweisen Sie den Satz über monotone Zahlenfolgen, und verwenden Sie diesen zur Definition der Eulerschen Zahl e . (Satz 3.12 und Bsp. 3.15)
21. Zeigen Sie, dass jede reelle Zahlenfolge einen größten und einen kleinsten partiellen Grenzwert besitzt. (Satz 3.16)
22. Erläutern Sie weitere Eigenschaften stetiger Funktionen. (Satz 3.22) Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem Grenzwertbegriff und dem Stetigkeitsbegriff für Abbildungen zwischen metrischen Räumen an. (Fol. 3.26 und Fol. 3.25)
23. Beweisen Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. (Satz 3.27) Wie kann man monotone stetige Funktionen charakterisieren? (Satz 3.28) Wie ergibt sich daraus die Stetigkeit der Exponential-, Potenz- und Logarithmusfunktionen? (Fol. 3.30)
24. Was versteht man unter einer konvergenten Zahlenreihe? Geben Sie einfache Konvergenzkriterien für Reihen an, und begründen Sie Ihre Aussagen. (Fol. 3.39)
25. Beweisen Sie das Leibnizkriterium für alternierende Reihen. (Satz 3.43) Was besagt der Verdichtungssatz? Wenden Sie diesen auf die verallgemeinerten harmonischen Reihen an. (Satz 3.46 und Bsp. 3.47)
26. Erläutern Sie das Wurzel- und das Quotientenkriterium für Zahlenreihen (Sätze 3.48 und 3.49, einen davon mit Beweis) Was kann man über die Konvergenz von Potenzreihen aussagen? (Bsp. 3.53)
27. Was versteht man unter der Umordnung einer Reihe? Formulieren Sie den Satz über die Umordnung absolut konvergenter Reihen. Was besagt der Riemannsche Umordnungssatz? (Sätze 3.57, 3.59) Was versteht man unter dem Cauchy-Produkt von Reihen? (Satz 3.60)
28. Erklären Sie die Begriffe Differenzierbarkeit und Ableitung. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit? Welche Differentiationsregeln kennen Sie? Beweisen Sie die Produkt- und die Kettenregel. (Folgerungen 4.6, 4.7)
29. Beweisen Sie den Satz über die Differentiation der Umkehrfunktion. Was können Sie über die Differentiation von Potenzreihen aussagen? (Sätze 4.9, 4.11)
30. Was sind Extrempunkte und Extremwerte einer Funktion. Beweisen Sie die Sätze von Fermat und Rolle. (Sätze 4.16, 4.17)
31. Formulieren Sie die Mittelwertsätze der Differentialrechnung. (Satz 4.18 und Fol. 4.19) Beweisen Sie den allgemeinen Mittelwertsatz der Differentialrechnung. (Satz 4.18) Geben Sie Folgerungen über das Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen an. (Fol. 4.20)