Fakultät für Mathematik

Prof. Dr. Peter Junghanns

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Chemnitz, 16. Juli 2018

Probeklausur Analysis II

- **Arbeitszeit**: 120 min
- **Hilfsmittel**: Formelsammlung ohne durchgerechnete Beispiele
- Der Lösungsweg sollte klar erkennbar sein. Alle Aussagen sind zu begründen!

Viel Erfolg!

1. Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(5^{\frac{1}{n}}-1\right)$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+3\,n^2-5}{100\,n^4+7}$.

2. Die Funktion $f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ sei stetig. Es existiere der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A\in\mathbb{C}$. Ist $f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ gleichmäßig stetig?

3. Entwickeln Sie die Funktion $f(x)=\dfrac{6}{x^2-9}$ in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $x_0=1$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

4. Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)x^n}{2^n}$?

5. Berechnen Sie

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\sqrt{1-\sin x}\,dx$,

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{2n}\frac{\sin x}{x^2}dx$,

   (c) $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{x-1}{x(x+1)^2}dx$.

Bitte wenden!

6. Bestimmen Sie den kleinsten und größten Wert der Funktion

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy - 2x + 4y + 3,$$

wobei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\}$ sei.

7. (a) Was versteht man unter punktweiser bzw. gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenreihen? Welche Beziehungen bestehen zwischen diesen beiden Begriffen?

   (b) Ermitteln Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für die gilt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [-\pi, 0) \ , \\ x & : x \in [0, \pi) \ . \end{cases}$$

   (c) Geben Sie die Summe dieser Reihe in Abhängigkeit von $x \in [-\pi, \pi]$ an. Auf welchen Intervallen $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ konvergiert die diese Reihe gleichmäßig?

(Z) Untersuchen Sie, für welche $\alpha > 0$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \alpha^n}{(2n)!}$ konvergiert.

Punktbewertung der einzelnen Aufgaben:

1			**2**	**3**	**4**	**5**			**6**	**7**			**Z**
a	b	c				a	b	c		a	b	c	
2	2	2	3	4	3	2	2	4	5	2	5	2	3

Gesamtpunktzahl: 38+3Z

Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0
Punkte	36	35	32	30	28	25	23	21	18	15

Musterlösungen

1. (a) Aus $5^{\frac{1}{n+1}} < 5^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, und $5^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$ folgt, dass $\left(5^{\frac{1}{n}} - 1\right)_{n=1}^{\infty}$ eine monotone Nullfolge ist. Das Leibniz-Kriterium liefert Konvergenz der Reihe.

   (b) Wir wenden das Quotientenkriterium an und erhalten

$$\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^5} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \longrightarrow \frac{1}{3} < 1\,,$$

   so dass die Reihe konvergiert.

   (c) Wegen $\dfrac{n^4 + 3\,n^2 - 5}{100\,n^4 + 7} = \dfrac{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{5}{n^4}}{100 + \frac{7}{n^4}} \longrightarrow \dfrac{1}{100} \neq 0$ ist das notwendige Konvergenzkriterium verletzt. Die Reihe divergiert.

2. Ja, denn die Funktion $\widetilde{f}(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & : & x \in (a,b] \\ A & : & x = a \end{array} \right\}$ ist auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ stetig und somit (auf jedem Teilinterval $I \subset [a,b]$) gleichmäßig stetig.

3. Für $\dfrac{|x-1|}{2} < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{6}{x^2-9} &= \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-x}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-x}{4}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\right] (x-1)^n\,. \end{aligned}$$

   Der Konvergenzradius ist 2, was sowohl aus der Herleitung als auch aus

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{4 \cdot 2^n}} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

   folgt.

4. Wegen $\sqrt[n]{\frac{n+2}{2^n}} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{n+2} \longrightarrow \frac{1}{2}$ ist der Konvergenzradius der Reihe gleich 2. Für $x = \pm 2$ ist das notwendige Konvergenzkriterium verletzt (die Glieder der Reihe bilden keine Nullfolge). Die Reihe konvergiert also für $-2 < x < 2$.

5. (a) Die Substitution $t = \sin x$ liefert

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 - \sin x}\, dx = \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}}\, dt = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\,.$$

   (b) Aus

$$\left| \int_n^{2n} \frac{\sin x}{x^2}\, dx \right| \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_n^{2n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$$

   folgt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} \frac{\sin x}{x^2}\, dx = 0\,.$

(c) Aus

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}\end{aligned}$$

folgt $A=-1$, $B=1$, $C=2$. Somit ist

$$\int_2^\infty \frac{x-1}{x(x+1)^2}\,dx = \left[-\ln x+\ln(x+1)-\frac{2}{x+1}\right]_2^\infty = \left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{2}{x+1}\right]_2^\infty = \frac{2}{3}-\ln\frac{3}{2}\,.$$

6. Die Funktion $f(x,y)$ hat keinen stationären Punkt in Ω. Auf den Seiten des Rechtecks ist f affin linear, so dass Maximum und Minimum auf jeden Fall in den Eckpunkten des Rechtecks angenommen werden. Das Maximum ist gleich $11 = f(1,2)$, das Minimum gleich $1 = f(1,0)$.

7. (a) Sind $(\mathbf{X},d_1)$ und $(\mathbf{Y},d_2)$ metrische Räume sowie $\Omega\subset\mathbf{X}$, so konvergiert eine Folge von Funktionen $f_n:\Omega\longrightarrow\mathbf{Y}$ auf Ω gleichmäßig gegen $f:\Omega\longrightarrow\mathbf{Y}$, wenn für jedes $\varepsilon>0$ ein $n_0\in\mathbb{N}$ existiert, so dass $d_2(f_n(x),f(x))<\varepsilon$ für alle $x\in\Omega$ und alle $n\geq n_0$ gilt. Unter punktweiser Konvergenz auf Ω versteht man $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ für alle $x\in\Omega$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die punktweise Konvergenz.

(b) Für die Koeffizienten der Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]$$

erhält man

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\frac{\pi}{2}$$

und für $n\geq 1$ mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi n}\left[x\,\sin(nx)\right]_0^\pi-\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi\sin(nx)\,dx\\ &= \frac{1}{\pi n^2}\left[\cos(nx)\right]_0^\pi=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi n}\left[x\cos(nx)\right]_0^\pi+\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi\cos(nx)\,dx\\ &= -\frac{(-1)^n}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.\end{aligned}$$

(c) Die Summe der Reihe ist gleich $f(x)$ für $-\pi<x<\pi$ und gleich $\frac{\pi}{2}$ für $x=\pm\pi$. Da die Funktion bzw. ihre Ableitung in $x=\pm\pi$ und $x=0$ Sprungstellen haben, konvergiert die Fouriereihe gleichmäßig auf jedem Intervall $[a,b]\subset(-\pi,0)$ und $[a,b]\subset(0,\pi)$.

(Z) Mit der Bezeichnung $a_n=\dfrac{(n!)^2\alpha^n}{(2n)!}$ erhalten wir $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{n+\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\alpha}{4}\longrightarrow\dfrac{\alpha}{4}$, so dass die Reihe für $0<\alpha<4$ konvergiert und für $\alpha>4$ divergiert. Da der Quotient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ im Fall $\alpha=4$ stets größer 1 ist, divergiert die Reihe auch für $\alpha=4$.