# 7. Übung zur Vorlesung Algebra, SoSe 2019

1. Es seien $p$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Charakteristik eines Körpers mit $p^n$ Elementen gleich $p$ ist.

2. Zeigen Sie: Sind $\varphi : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ ein Körpermonomorphismus und $\mathbf{F} = \{x \in \mathbf{K} : \varphi(x) = x\}$, so ist $\mathbf{F}$ ein Unterkörper von $\mathbf{K}$, der den Primkörper $P(\mathbf{K})$ enthält.

3. Es seien $\mathbf{K}$ ein Körper der Charakteristik 0 und $f \in \mathbf{K}[t]$ ein Polynom mit $f(t+1) = f(1)f(t)$. Zeigen Sie, dass dann $f \equiv 1$ oder $f \equiv 0$ gilt.

4. Zeigen Sie: Sind $\mathbf{L} : \mathbf{K}$ eine Körpererweiterung und $a \in \mathbf{L}$ transzendent über $\mathbf{K}$, so sind $a^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ transzendent über $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}(a^n)$ ein echter Unterkörper von $\mathbf{K}(a)$.

5. Für eine Körpererweiterung $\mathbf{L} : \mathbf{K}$ möge ein $M \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für jeden echten Zwischenkörper $\mathbf{M}$ gilt $[\mathbf{M} : \mathbf{K}] \leq M$. Zeigen Sie, dass dann auch $[\mathbf{L} : \mathbf{K}]$ endlich ist.

6. Es seien $a$ und $b$ rationale Zahlen sowie $z = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$.
   (a) Man gebe ein monisches Polynom $f \in \mathbb{Q}[t]$ vierten Grades an, welches $z$ als Nullstelle hat.
   (b) Man zeige, dass auch $f(-a\sqrt{2} - b\sqrt{3}) = 0$ gilt.
   (c) Man zeige, dass $f(t)$ genau dann Minimalpolynom von $z$ über $\mathbb{Q}$ ist, wenn $ab \neq 0$ gilt.

7. Man bestimme das Minimalpolynom von $\sqrt{2 + \sqrt[3]{2}}$ über $\mathbb{Q}$.

8. Es seien $p$ und $q$ verschiedene Primzahlen und $\mathbf{L} := \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt[3]{q})$. Man zeige, dass dann $\mathbf{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{p}\sqrt[3]{q})$ und $[\mathbf{L} : \mathbb{Q}] = 6$ gilt.

9. Zeigen Sie, dass der Grad der Körpererweiterung $\mathbf{L} : \mathbb{Q}$ mit $\mathbf{L} = \mathbb{Q}(\{\sqrt[n]{2} : n \in \mathbb{N}\})$ unendlich ist.

10. Es seien $z_n = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, und $\widetilde{\mathbb{K}}$ die Menge der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren komplexen Zahlen. Man zeige:
    (a) Aus $z_n \in \widetilde{\mathbb{K}}$ folgt $z_{2n} \in \widetilde{\mathbb{K}}$.
    (b) Aus $d|n$ und $z_n \in \widetilde{\mathbb{K}}$ folgt $z_d \in \widetilde{\mathbb{K}}$.
    (c) Aus $z_m, z_k \in \widetilde{\mathbb{K}}$ und $\mathrm{ggT}(m,k) = 1$ folgt $z_{mk} \in \widetilde{\mathbb{K}}$.

11. Zeigen Sie, dass jede Körpererweiterung unendlichen Grades unendlich viele Zwischenkörper besitzt.

12. In einem Erweiterungskörper $\mathbf{L}$ von $\mathbf{K}$ mögen die Polynome $f, g \in \mathbf{K}[t]$ eine gemeinsame Nullstelle besitzen. Zeigen Sie, dass dann ein nicht konstantes Polynome $h \in \mathbf{K}[t]$ existiert, welches gemeinsamer Teiler von $f(t)$ und $g(t)$ ist.

13. Bestimmen Sie den Zerfällungskörper des Polynoms $f \in \mathbb{Z}[t]$ über $\mathbb{Q}$ und bestimmen Sie dessen Grad:
    (a) $f(t) = t^4 - p$, $p$ - Primzahl,
    (b) $f(t) = t^4 + 4$,
    (c) $f(t) = (t^2 + 4t + 5)(t^4 + 1)$.

14. Es sei $\mathbf{K}$ ein Körper. Man zeige: Besitzt $f(t) = t^3 - 2 \in \mathbf{K}[t]$ eine mehrfache Nullstelle in $\mathbf{K}$, so gilt $\operatorname{char} K \in \{2, 3\}$, und $f(t)$ hat eine dreifache Nullstelle.

15. Zeigen Sie: Sind $\mathbf{M}$ ein Zwischenkörper der Körpererweiterung $\mathbf{L} : \mathbf{K}$ und $a \in \mathbf{L}$ separabel über $\mathbf{K}$, so ist $a$ auch separabel über $\mathbf{M}$.