6. Übung zur Vorlesung Algebra, SoSe 2019

1. Bestimmen Sie alle Einheiten des Ringes $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

2. Ist 2 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ und in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ irreduzibel?

3. Zeigen Sie: Genügt die Höhenfunktion $h : \mathbf{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ des Euklidischen Ringes $\mathbf{R}$ der Bedingung $h(a) \leq h(ab)$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, so gilt $\mathbf{R}^* = \{x \in \mathbf{R} : h(x) = h(1)\}$.

4. Zeigen Sie (mit $h(a + b\mathbf{i}) = a^2 + b^2$ in $\mathbf{Z}[\mathbf{i}]$):

   (a) Ist $h(a + b\mathbf{i}) = p$ eine Primzahl, so ist $a + b\mathbf{i} \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ irreduzibel.

   (b) Eine Primzahl p ist genau dann zerlegbar in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$, wenn sie Summe zweier Quadratzahlen ist.

   (c) Für eine Primzahl $p > 2$ existiert genau dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $[n^2]_p = [-1]_p$, wenn $[p]_4 = [1]_4$ gilt. (Hinweis. Man verwende den Satz von Wilson: $[(p-1)!]_p = [-1]_p \iff p$ ist Primzahl)

   (d) Eine ungerade Primzahl p ist genau dann zerlegbar in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$, wenn $[p]_4 = [1]_4$ gilt.

   (e) Wie könnte man ein Element von $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ in Primfaktoren zerlegen? Nehmen Sie als Beispiel $6 + 2\mathbf{i}$.

   (f) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ einen größten gemeinsamen Teiler von $2 + 4\mathbf{i}$ und $5 + 5\mathbf{i}$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, und überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Zerlegung in Primelemente.

5. Zeigen Sie: Jeder Ring $\mathbf{R}$ ohne Einselement kann isomorph in einen Ring mit Einselement eingebettet werden.

6. Zeigen Sie, dass das Polynom $t^4+a_1t^3+a_2t^2+a_3t+a_4$ im Ring $\mathbb{Z}[t]$ in folgenden Situationen irreduzibel ist:

   (a) a_1, a_4 - ungerade, a_2, a_3 - gerade,

   (b) a_1, a_2, a_3, a_4 - ungerade,

   (c) a_3, a_4 - ungerade, a_1, a_2 - gerade.

   Gibt es Beispiele irreduzibler Polynome im Ring $\mathbb{Z}[t]$ vom Grad 4 , die keine dieser Bedingungen erfüllen?

7. Zeigen Sie, dass das isomorphe Bild eines Euklidischen Ringes wieder ein Euklidischer Ring ist.

8. Bestimmen Sie den Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$.

9. Können zwei nicht zueinander isomorphe Integritätsringe den gleichen Quotientenkörper besitzen?