5. Übung zur Vorlesung Algebra, SoSe 2019

1. Es seien $\mathbf{J}$ ein Primideal in einem Ring $\mathbf{R}$ und $x \in \mathbf{R}$. Zeigen Sie: Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in \mathbf{J}$, so ist $x \in \mathbf{J}$.

2. Beweisen Sie, dass in einem kommutativen Ring mit Eins jedes maximale Ideal auch Primideal ist.

3. Zerlegen Sie folgende Polynome in ein Produkt von irreduziblen Polynomen:

   (a) $t^4 + 4t^2 + 4t + 2 \in \mathbb{Z}[t]$

   (b) $t^6 - t^4 + 3t^3 + 5t^2 + t \in \mathbb{Z}[t]$

   (c) $t^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[t]$

4. Berechnen Sie jeweils einen größten gemeinsamen Teiler $h(t)$ der Polynome $f(t)$ und $g(t)$ in $\mathbb{Q}[t]$ und finden Sie Polynome $p(t)$ und $q(t)$, so dass $h(t) = p(t)f(t) + q(t)g(t)$ gilt.

   (a) $f(t) = t^2 + t + 2$, $g(t) = t^2 - 1$

   (b) $f(t) = t^3 + t^2 - t - 1$, $g(t) = t^3 - 1$

5. Man nennt $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Z}[\mathbf{i}] = \{a + b\mathbf{i} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, versehen mit der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen, den Ring der **Gauß'schen ganzen Zahlen**. Zeigen Sie, dass dieser Ring ein Euklidischer Ring ist. Bestimmen Sie die Menge der größten gemeinsamen Teiler von 8 und $3 + \sqrt{5}\mathbf{i}$. Stellen Sie das Ideal $(2 - \mathbf{i}, 2 + \mathbf{i})$ als Hauptideal dar. Zerlegen Sie 2, 3 und 5 in Primfaktoren.

6. Welche der folgenden Ideal sind Hauptideale?

   (a) $(2t^2 - t - 3, 3t^2 - 2t - 5)$ in $\mathbb{Z}[t]$

   (b) $(2, 1 + \sqrt{5}\mathbf{i})$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

7. Es sei $\mathbf{K}$ ein Körper. Geben Sie Untergruppen von $(\mathbf{K}[t], +)$ an, die keine Ideale in $(\mathbf{K}[t], +, \cdot)$ sind.

8. Zeigen Sie:

   (a) Sind $\mathbf{R}$ ein kommutativer Ring mit Eins, $a, b \in \mathbf{R}$ und $a|b$ sowie $b|a$, so folgt aus der Nullteilerfreiheit von a, dass $a \sim b$.

   (b) Sind $\mathbf{R} = \mathbf{C}(\mathbb{R})$ der Ring der auf $\mathbb{R}$ stetigen und reellwertigen Funktionen (mit der punktweisen Addition und Multiplikation) und

   $$f(x) = \begin{cases} x & : \quad x \leq 0\,, \\ 0 & . \quad 0 < x < 1\,, \\ x - 1 & : \quad 1 \leq x\,, \end{cases}$$

   sowie $g(x) = |f(x)|$, so gilt $f|g$ und $g|f$, aber nicht $f \sim g$.

   (c) Ist $E \subset \mathbb{R}$ nichtleer, so ist $\mathbf{J}_E := \{f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \ \forall\, x \in E\} \neq \mathbf{C}(\mathbb{R})$ ein Ideal in $\mathbf{C}(\mathbb{R})$, welches genau dann maximal ist, wenn $|E| = 1$ gilt.