4. Übung zur Vorlesung Algebra, SoSe 2019

1. Es seien $(\mathbf{G}, +)$ eine Abel'sche Gruppe und $\mathbf{R}$ die Menge aller Endomorphismen $f : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbf{R}, +, \circ)$ mit $(\varphi_1 + \varphi_2)(g) := \varphi_1(g) + \varphi_2(g)$ ein Ring ist, und bestimmen Sie alle Einheiten dieses Ringes.

2. Zeigen Sie: Ist $\mathbf{R}$ ein Ring mit Einselement 1, so folgt aus $x, y \in \mathbf{R}$ und $xy = 1$ stets $yx \neq 0$. Geben Sie ein Beispiel an, in dem $yx \neq 1$ gilt.

3. Zeigen Sie: Sind $\mathbf{R}$ ein Ring mit Einselement und $\mathbf{J} \subset \mathbf{R}$ ein Ideal, so sind folgende Aussagen äquivalent:

   (a) $\mathbf{J} \neq \mathbf{R}$ (b) $1 \notin \mathbf{J}$ (c) $\mathbf{R}^* \cap \mathbf{J} \neq \emptyset$

4. Es sei $\mathbf{R}$ ein kommutativer Ring mit Einselement. Ein Element $x \in \mathbf{R}$ heißt nilpotent, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ existiert. Zeigen Sie:

   (a) Die nilpotenten Element von $\mathbf{R}$ bilden ein Ideal $\mathbf{J}$, und in $\mathbf{R}/\mathbf{J}$ ist nur die Null nilpotent.

   (b) Es sei $m = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ die Primfaktorzerlegung von $m \geq 2$.Man zeige, dass $[a]_m \in \mathbb{Z}_m$ genau dann nilpotent ist, wenn $p_1 \cdots p_r$ Teiler von a ist, und dass $[0]_m$ genau dann das einzige nilpotente Element in $\mathbb{Z}_m$ ist, wenn m quadratfrei ist.

5. Zeigen Sie, dass in einem endlichen kommutativen Ring mit Einselement jedes Element entweder eine Einheit oder ein Nullteiler ist. Begründen Sie anhand eines Beispiels, dass diese Aussage in allgemeinen Ringen nicht gilt.

6. Wir betrachten den Ring $(\mathbf{C}[a, b], +, \cdot)$ der stetigen Funktionen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der punktweisen Addition und Multiplikation. Zeigen Sie:

   (a) $f \in \mathbf{C}[a, b]$ ist genau dann eine Einheit, wenn f keine Nullstellen auf $[a, b]$ besitzt.

   (b) $f \in \mathbf{C}[a, b]$ ist genau dann ein Nullteiler, wenn die Menge der Nullstellen von f auf $[a, b]$ eine offenes Intervall enthält.

7. Es sei $\mathbf{R}$ ein Ring mit Eins 1. Zeigen Sie, dass $(\mathbf{R}, \oplus, \odot)$ ein zu $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ isomorpher Ring ist, wobei
$$x \oplus y := x + y + 1 \quad \text{und} \quad x \odot y := x + y + xy \quad \forall\, x, y \in \mathbf{R}.$$

8. Es seien $\mathbf{R}$ ein kommutativer Ring und $\mathbf{J} \subset \mathbf{R}$ ein nichttriviales Ideal. Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{J}$ die Menge $\mathbf{J} + x\mathbf{R}$ ein Ideal in $\mathbf{R}$ ist, welches $\mathbf{J}$ enthält.

9. Es sei $\mathbf{R}$ ein Ring mit Eins, in dem $x^2 = x$ für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt. Zeigen Sie:

   (a) Ist $\mathbf{R}$ nullteilerfrei, so gilt $\mathbf{R} \cong \mathbb{Z}_2$.

   (b) Es gilt $2x = 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$.

   (c) $\mathbf{R}$ ist kommutativ.

10. Man bestimme das durch 12 und 16 erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}$.