3. Übung zur Vorlesung Algebra, SoSe 2019

1. Die Gruppe $\mathbf{G}$ operiere auf der Menge X. Man zeige:
   (a) Es gilt $\mathbf{G}_{g\bullet x} = g\mathbf{G}_x g^{-1}\ \forall\, g \in \mathbf{G}\,,\ \forall\, x \in X$.
   (b) Für $x \in X$ ist $\mathbf{G}_x$ genau dann Normalteiler in $\mathbf{G}$, wenn $\mathbf{G}_x = \mathbf{G}_y\ \forall\, y \in \mathbf{G} \bullet x$ gilt.

2. Bestimmen Sie die Ordnung des Zentrums $Z(\mathbf{G})$ einer nicht Abel'schen Gruppe $\mathbf{G}$ der Ordnung p^3 mit einer Primzahl p.

3. Eine Gruppe $\mathbf{G}$ der Ordnung 55 operiere auf einer Menge X mit 18 Elementen. Zeigen Sie, dass $\mathbf{G}$ auf X mindestens zwei Fixpunkte besitzt. Was kann man im Fall $|X| = 39$ über die Anzahl der Fixpunkte aussagen?

4. Es seien $f : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ ein Automorphismus der Gruppe $\mathbf{G}$, p ein Primteiler der Ordnung von $\mathbf{G}$. Dieser Automorphismus habe die Primpotenzordnung $p^k > 1$. Man zeige, dass es dann ein $g \in \mathbf{G} \setminus \{e\}$ mit $f(g) = g$ gibt.

5. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mittels einer Operation von $\mathbb{Z}_2$ auf der Menge der Teiler von n, dass n genau dann eine Quadratzahl ist, wenn die Anzahl der Teiler von n ungerade ist.

6. Man sagt, dass eine Gruppe $\mathbf{G}$ auf X **transitiv** operiert, wenn für jedes Parr $(x, y) \in X \times X$ ein $g \in \mathbf{G}$ mit $y = g \bullet x$ existiert. Dies ist offenbar äquivalent zu $\mathbf{G} \bullet x = X\ \forall\, x \in X$. Es sei $\mathbf{G}$ eine endliche Gruppe.
   (a) Es seien $\mathbf{U}$ eine echte Untergruppe von $\mathbf{G}$ und $X = \bigcup_{g\in\mathbf{G}} g\mathbf{U}g^{-1}$. Zeigen Sie, dass dann $X \neq \mathbf{G}$ gilt.
   (b) $\mathbf{G}$ operiere transitiv auf der endlichen Menge X mit $|X| > 1$. Zeigen Sie, dass dann ein $g_0 \in \mathbf{G}$ mit $\{x \in X : g_0 \bullet x = x\} = \emptyset$ existiert.

7. Die Gruppe $\mathbf{G}$ operiere auf X. Für den Normalteiler $\mathbf{U}$ in $\mathbf{G}$ sei $Y = \{U \bullet x : x \in X\}$. Man zeige:
   (a) $\mathbf{G}$ operiert auf natürliche Weise auf Y, d.h.,
   $$\mathbf{G} \times Y \longrightarrow Y\,, \quad (g, U \bullet x) \mapsto g \bullet (U \bullet x) = \{g \bullet z : z \in \mathbf{U} \bullet x\}$$
   ist eine Operation.
   (b) Operiert $\mathbf{G}$ transitiv auf X, so auch auf Y.
   (c) Der Stabilisator von $\mathbf{U} \bullet x$ ist gleich $\mathbf{U}\mathbf{G}_x$.
   (d) Sind a und b vertauschbare Elemente der Gruppe $\mathbf{G}$, so operiert die Gruppe $\langle a\rangle$ auf den $\langle b\rangle$-Orbits $\langle b\rangle \bullet x$, $x \in X$.

8. Für eine nichtleere Teilmenge $U \subset \mathbf{G}$ der Gruppe $\mathbf{G}$ betrachten wir neben dem Normalisator $N(U) = N_{\mathbf{G}}(U) = \{g \in \mathbf{G} : gU = Ug\}$ von X in $\mathbf{G}$ auch den **Zentralisator** $Z(U) = Z_{\mathbf{G}}(U) := \{g \in \mathbf{G} : gu = ug\, \forall\, u \in U\}$ von X in $\mathbf{G}$. Die Gruppe $\mathbf{G}$ operiere auf der Menge X aller nichtleeren Teilmengen U von $\mathbf{G}$ vermöge $g \bullet M := \left\{gmg^{-1} : m \in M\right\}$. Dann gilt (vgl. Beispiele (B5) und (B6) der Vorlesung) $\mathbf{G}_U = N_{\mathbf{G}}(U)$ und, im Fall einer einelementigen Menge $M = \{m\}$, die Beziehung $\mathbf{G}_M = Z_{\mathbf{G}}(M) = N_{\mathbf{G}}(m)$. Es seien U und V nichleere Teilmengen von $\mathbf{G}$. Man zeige:
   (a) Aus $U \subset V$ folgt $Z_{\mathbf{G}}(U) \supset Z_{\mathbf{G}}(V)$.
   (b) Es gilt $U \subset Z_{\mathbf{G}}((Z_{\mathbf{G}}(U))$ und $Z_{\mathbf{G}}(U) = Z_{\mathbf{G}}(Z_{\mathbf{G}}((Z_{\mathbf{G}}(U)))$.
   (c) Aus $x \in Z(\mathbf{G})$ folgt $Z_{\mathbf{G}}(g) = Z_{\mathbf{G}}(gx)\ \forall\, g \in \mathbf{G}$.
   (d) Es gilt $Z(\mathbf{G}) = \bigcap_{g\in\mathbf{G}} Z_{\mathbf{G}}(g)$.