2. Übung zur Vorlesung Algebra, SoSe 2019

1. Zeigen Sie, dass für eine endliche Teilmenge $\mathbf{U}$ der Gruppe $\mathbf{G}$ folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) $\mathbf{U}$ ist Untergruppe.
   (b) Aus $a, b \in \mathbf{U}$ folgt $ab \in \mathbf{U}$.
2. Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass genau dann $|G| < \infty$ gilt, wenn G endlich viele Untergruppen besitzt.
3. Man bestimme sämtliche Automorphismen von $\mathbb{Z}_4$ und V_4 und zeige damit, dass $\mathbb{Z}_4$ und V_4 nicht zueinander isomorph sind.
4. Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie:
   (a) Ist $\varphi : G \longrightarrow G$, $a \mapsto a^{-1}$ ein Homomorphismus, so ist G Abel'sch.
   (b) Ist $\varphi : G \longrightarrow G$, $a \mapsto a^2$ ein Homomorphismus, so ist G Abel'sch.
5. Ist $U = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ eine Untergruppe von $(S(M), \circ)$, wobei $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und
$$f_0(x) = x\,, \quad f_1(x) = -x\,, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}\,, \quad f_3(x) = -\frac{1}{x}\,?$$
6. Man berechne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{2019}$ in S_5.
7. Beweisen Sie Folgerung 1.18,(f) der Vorlesung.
8. Sind folgende Aussagen richtig?
   (a) Sind $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ Normalteiler in $\mathbf{G}$, so ist $\mathbf{UV}$ Normalteiler in $\mathbf{G}$.
   (b) Jede Untergruppe $\mathbf{U}$ einer Gruppe $\mathbf{G}$ mit $|\mathbf{G} : \mathbf{U}| = 2$ ist Normalteiler.
   (c) Ist $\mathbf{U}$ eine Untergruppe der Gruppe $\mathbf{G}$, so ist $\bigcap_{x \in \mathbf{G}} x\mathbf{U}x^{-1}$ ein Normalteiler in $\mathbf{G}$.
9. Zeigen Sie: Für das Zentrum $Z(\mathbf{G})$ einer Gruppe $\mathbf{G}$ gilt:
   (a) $Z(\mathbf{G})$ ist Normalteiler.
   (b) Ist $\mathbf{G}/Z(\mathbf{G})$ zyklisch, so ist $\mathbf{G}$ Abel'sch.
   (c) $|\mathbf{G} : Z(\mathbf{G})|$ ist niemals eine Primzahl.
10. Überprüfen Sie alle Untergruppen der Gruppe S_3 auf die Normalteilereigenschaft.
11. Es seien $\mathbf{G}$ eine Gruppe und $a, b \in \mathbf{G}$. Zeigen Sie:
    (a) $\operatorname{ord} \varphi(a) = \operatorname{ord} a \ \forall \varphi \in \operatorname{Aut} \mathbf{G}$
    (b) $\operatorname{ord} aba^{-1} = \operatorname{ord} b$
    (c) $\operatorname{ord} ab = \operatorname{ord} ba$
    (d) $\operatorname{ord} a^{-1} = \operatorname{ord} a$