1. Übung zur Vorlesung Algebra, SoSe 2019

1. Zeigen Sie, dass die folgende Definition zur Definition 1.1 der Vorlesung äquivalent ist: Unter einer Gruppe verstehen wir eine nichtleere Menge $\mathbf{G}$ versehen mit einer binären Verknüpfung $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$, $(a, b) \mapsto ab$, die dem Assoziativgesetz genügt und die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

   (a) Es existiert ein linksneutrales Element $e \in \mathbf{G}$, d.h., es gilt $ea = a$ für alle $a \in \mathbf{G}$.

   (b) Zu jedem $a \in \mathbf{G}$ existiert ein Linksinverses $b \in \mathbf{G}$, d.h., es gilt $ba = e$.

2. Bestimmen Sie ein erzeugendes Element der Untergruppe $\mathbf{U} = \{96\,n + 42\,m : m, n \in \mathbb{Z}\}$ der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.

3. Ist $(\mathbb{R}, *)$ mit $a * b := a + b + a^2 b$ eine Gruppe?

4. Zeigen Sie, dass für eine Gruppe $(\mathbf{G}, \cdot)$ folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $\mathbf{G}$ ist Abel'sch.

   (b) Für alle $a, x, y \in \mathbf{G}$ folgt aus $ax = ya$ stets $x = y$.

5. Man zeige: Sind $\mathbf{U}$ eine Untergruppe von $\mathbf{G}$ und $g \in \mathbf{G}$, so ist $g\mathbf{U}g^{-1} = \left\{gag^{-1} : a \in \mathbf{U}\right\}$ eine Untergruppe von $\mathbf{G}$.

6. Es seien $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ Untergruppen von $\mathbf{G}$ sowie $\mathbf{UV} = \{uv : u \in \mathbf{U}, v \in \mathbf{V}\}$. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind

   (a) $\mathbf{UV}$ ist Untergruppe.

   (b) Es gilt $\mathbf{UV} = \mathbf{VU}$.

7. Man zeige: Ist $\mathbf{U} \neq \mathbf{G}$ eine (echte) Untergruppe von $\mathbf{G}$, so gilt $\langle \mathbf{G} \setminus \mathbf{U} \rangle = \mathbf{G}$.

8. Wir betrachten die symmetrische Gruppe $S(\mathbb{D})$ der Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Ist $(\mathbf{A}, \circ)$ mit $\mathbf{A} = \{\varphi_a : |a| < 1\}$ mit $\varphi_a(z) = \dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z}$ eine Untegruppe von $S(\mathbb{D})$?

9. Es seien $\mathbf{G}$ eine Gruppe und $a, b \in \mathbf{G}$ mit $ab = ba$ und $\operatorname{ord} a < \infty$, $\operatorname{ord} b < \infty$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord} a \cdot \operatorname{ord} b = \operatorname{ord}(ab)$ genau dann gilt, wenn $\operatorname{ggT}(\operatorname{ord} a, \operatorname{ord} b) = 1$ erfüllt ist.

10. Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen Gruppen-Homomorphismen sind:

    (a) $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$, $n \mapsto n + 1$,

    (b) $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$, $n \mapsto n + n$,

    (c) $\varphi : (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $x \mapsto x^3$,

    (d) $\varphi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $x \mapsto x^3$,

    (e) $\varphi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $x \mapsto \sqrt{|x|}$.

    Handelt es sich gegebenenfalls um Mono-, Epi- oder Isomorphismen? Geben Sie Kern und Bild der Homomorphismen an.