Prüfungskomplexe zur Vorlesung Algebra

1. Erläutern Sie den Begriff der von einer Teilmenge erzeugten Untergruppe sowie die Begriffe zyklische Gruppe, Ordnung einer Gruppe und Ordnung eines Elementes einer Gruppe. Beweisen Sie wesentliche Eigenschaften dieser Begriffe. (Satz 1.4 mit Folgerung 1.5 und Satz 1.6)

2. Erklären Sie die Begriffe Gruppenhomomorphismus, Automorphismengruppe, innerer Automorphismus, Zentrum einer Gruppe, Permutations- bzw. symmetrische Gruppe. Zeigen Sie, dass Permutationsgruppen über gleichmächtigen Mengen zueinander isomorph sind und dass jede Gruppe $\mathbf{G}$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{S}(\mathbf{G})$ ist. (Sätze 1.10 und 1.11)

3. Erklären Sie die Begriffe Rechtsnebenklassen modulo $\mathbf{U}$ und Index einer Untergruppe $\mathbf{U}$. Was besagt der Satz von Lagrange (Satz 1.17). Geben Sie Folgerungen aus diesem Satz an. (Folgerung 1.18) Unter welcher Voraussetzung kann ich die Faktorgruppe $\mathbf{G}/\mathbf{U}$ definieren? (Satz 1.20)

4. Zeigen Sie, dass eine Untergruppe genau dann Normalteiler ist, wenn sie Kern eines Gruppenhomomorphismus ist. Beweisen Sie den Homomorphiesatz für Gruppen. (Folgerung 1.21,(a),(b))

5. Was versteht man unter der Operation einer Gruppe auf einer Menge? Erläutern Sie die Begriffe Orbit, Stabilisator, Repräsentantensystem und Fixpunkt einer solchen Operation. Warum ist die Anzahl der zu einer Untergruppe konjugierten Untergruppen gleich dem Index des Normalisators dieser Untergruppe? (Folgerung 1.27) Warum hat eine Gruppe der Ordnung p^r, p - Primzahl, $r \in \mathbb{N}$, ein nichttriviales Zentrum? (Folgerung 1.28)

6. Formulieren und beweisen Sie den ersten Sylow'schen Satz und den Satz von Cauchy. (Satz 1.30 und Folgerung 1.31)

7. Erklären Sie die Begriffe p-Gruppe und p-Sylow-Gruppe. Warum ist eine endliche Gruppe genau dann p-Gruppe, wenn ihre Ordnung eine Potenz von p ist? Weshalb ist jede Untergruppe der Ordnung p^r einer Gruppe der Ordnung $p^r m$ mit $\mathrm{ggT}(p, m) = 1$ eine p-Sylow-Gruppe? Zeigen Sie, dass die Begriffe der p-Gruppe und der p-Sylow-Gruppe bzgl. Konjugation invariant sind. (Folgerung 1.33)

8. Formulieren Sie den zweiten und dritten Sylow'schen Satz. (Sätze 1.34 und 1.37) Warum ist eine Gruppe der Ordnung p^2 (p - Primzahl) abelsch? (Beispiel (A1) in Abschnitt 1.4)

9. Was versteht man unter der alternierenden Gruppe vom Grad n? Wie groß ist die Ordnung dieser Gruppe? Begründen Sie Ihre Aussage. Warum besitzt die alternierende Gruppe vom Grad 4 keine Untergruppe der Ordnung 6? (Abschnitt 1.5)

10. Was versteht man unter einem Ring, was unter einem kommutativen Ring? (Definition 2.1) Erläutern Sie die Begriffe Ringhomomorphismus, Unterring, Ideal, Hauptideal und Zusammenhänge zwischen diesen. (Definitionen 2.2 und 2.3, Satz 2.4, Satz 2.5,(a),(b) und Folgerung 2.6)

11. Was versteht man unter einem nullteilerfreien Ring, einem Integritätsring und einem Hauptidealring? Erklären Sie den Begriff der Charakteristik eines Ringes und beweisen Sie deren Eigenschaften. (Definition 2.9 und Satz 2.10)

12. Was ist ein Primideal? Was sind Primideale im Ring der ganzen Zahlen? Geben Sie äquivalente Definitionen für den Begriff Primideal an und begründen Sie Ihre Aussagen. (Folgerungen 2.11 und 2.12)

13. Erläutern Sie in einem Integritätsring mit Eins die Begriffe Teiler, Einheit, assoziierte Elemente, Primelement, irreduzibles Element, echter Teiler. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Begriffen Primelement, Primideal und irreduzibles Element? Begründen Sie Ihre Aussagen. (Folgerung 2.14)

14. Was versteht man unter einem größten gemeinsamen Teiler von Elementen eines Integritätsringes mit Eins? (Definition 2.15) Beweisen Sie Satz 2.16 über die Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers. Was versteht man unter einem maximalen Ideal und was unter der eindeutigen Zerlegung eines Elementes eines Hauptidealringes in Primfaktoren? Beweisen Sie Folgerung 2.18.

15. Was ist ein Euklidischer Ring? Zeigen Sie, dass jeder Euklidische Ring ein Hauptidealring ist. (Folgerung 2.19)

16. Was versteht man unter einem Körper, was unter dem Quotientenkörper eines Integritätsringes mit Eins, was unter dem Primkörper eines Schiefkörpers? Welche Primkörper (bis auf Isomorphie) gibt es? Begründen Sie Ihre Aussage. Warum ist ein Ringhomomorphismus von einem Körper in einen Ring entweder injektiv oder identisch Null? (Abschnitt 2.3)

17. Was versteht man unter dem Ring der Polynome über einem Ring? Beweisen Sie die Folgerung 2.26 und zeigen Sie, dass jedes Polynom vom Grade $n > 0$ über einem Integritätsring $\mathbf{R}$ mit Eins höchstens n verschiedene Wurzeln in $\mathbf{R}$ hat. (Folgerung 2.28)

18. Erläutern Sie die Begriffe Körpererweiterung, Zwischenkörper, Primkörper, Grad einer Körpererweiterung, Adjunktion an einen Körper, einfache Körpererweiterung. Beweisen Sie die Eigenschaften einer einfachen transzendenten Körpererweiterung. (Folgerung 3.8)

19. Was versteht man unter dem Minimalpolynom und was unter dem Grad eines algebraischen Elementes? Beweisen Sie die Eigenschaften des Minimalpolynoms (Folgerung 3.9) und zeigen Sie, dass der Grad eines algebraischen Elementes gleich dem Grad der entsprechenden einfachen Körpererweiterung ist (Folgerung 3.10).

20. Wann nennt man eine Körpererweiterung algebraisch, wann transzendent? Zeigen Sie, dass eine Körpererweiterung endlichen Grades stets algebraisch ist und dass der Grad einer Körpererweiterung genau dann endlich ist, wenn die Körpererweiterung durch Adjunktion endlich vieler algebraischer Elemente entsteht. (Folgerung 3.11,(b),(c))

21. Definieren Sie die Menge $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren reellen Zahlen und zeigen Sie, dass $\mathbb{K}$ ein Zwischenkörper von $\mathbb{R} : \mathbb{Q}$ ist, und begründen Sie, weshalb transzendente reelle Zahlen und reelle Zahlen, deren Grad über $\mathbb{Q}$ keine Zweierpotenz ist, nicht zu $\mathbb{K}$ gehören. (Definition 3.12 und Folgerung 3.13,(a),(c),(d),(e))

22. Erklären Sie den Begriff des Zerfällungskörpers eines Polynoms und zeigen Sie, dass es zu jedem nicht konstanten Polynom f über einem Körper einen Zerfällungskörper gibt, dessen Körpererweiterungsgrad $(\deg f)!$ nicht übersteigt. (Satz 3.17)

23. Unter welchen Voraussetzungen hat ein irreduzibles Polynom nur einfache Wurzeln? Begründen Sie Ihre Aussage. (Folgerung 3.18) Erläutern Sie die Begriffe n-te Einheitswurzel, n-ter Kreisteilungskörper, n-tes Kreisteilungspolynom. Unter welchen Voraussetzungen gibt es genau n verschiedene n-te Einheitswurzeln? Begründen Sie Ihre Aussage. (Folgerung 3.19,(d))

24. Zeigen Sie, dass Gruppenhomomorphismen einer Gruppe $\mathbf{G}$ in die multiplikative Gruppe $\mathbf{K}^*$ eines Körpers genau dann linear unabhängig in $\mathcal{F}(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ sind, wenn sie paarweise verschieden sind. (Satz 3.24) Was versteht man unter der Galois-Gruppe einer Körpererweiterung und warum ist die Ordnung dieser Gruppe nicht größer als der Grad der Körpererweiterung? (Definition 3.26 und Folgerung 3.27)

25. Erläutern Sie die Begriffe normale und separable Körpererweiterung. Wann nennt man einen Körper vollkommen? Geben Sie Bedingungen dafür an, unter denen ein Körper vollkommen ist und unter denen eine Körpererweiterung separabel ist. Begründen Sie Ihre Aussagen. (Folgerung 3.28,(b),(c),(d) und Folgerung 3.29)

26. Beweisen Sie den Satz vom primitiven Element. (Satz 3.32)

27. Zeigen Sie, dass im Fall einer endlichen, normalen und separablen Körpererweiterung die Ordnung der Galois-Gruppe gleich dem Grad der Körpererweiterung ist. (Satz 3.33)