Diplom- bzw. Masterarbeitsthema

Optimale Steuerung bei der elektrochemischen Oberflächenbearbeitung

Die zugrundeliegende (bez. der x-Achse als symmetrisch angenommene) zweidimensionale Konfiguration ist aus untenstehender Abbildung zu ersehen. Dabei nehmen wir an, dass sich die Begrenzung OCB_- des Werkzeugs bis ins Unendliche erstreckt. Das Kurvenstück OC sei durch die Funktion $y = f_2(x)$, $0 \le x \le c$, gegeben. Es wirkt als Kathode für einen elektrochemischen Prozess. Das Kurvenstück CB_- wird durch $y = f_1(x)$, $-\infty < x \le c$, beschrieben und als elektrisch isoliert angenommen. Dabei gilt $f_1(c) = f_2(c) = h$, $f_2(0) = 0$, und $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = 1$. Wir setzen

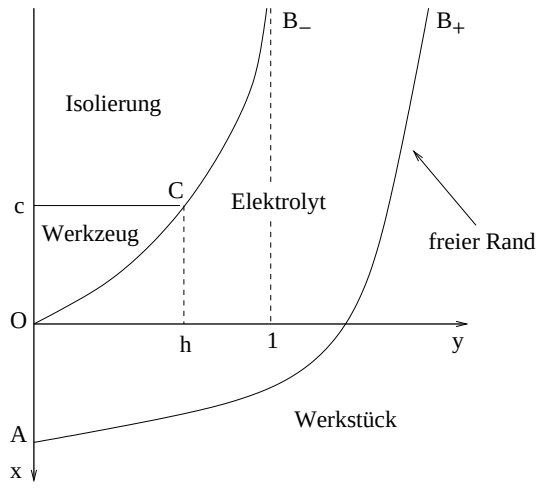
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & : \quad -\infty < x < c\,, \\ f_2(x) & : \quad c \le x \le 0\,. \end{cases}$$

Das Werkzeug wird in Richtung Oberfläche AB_+ des Werkstücks bewegt. Dabei wird angenommen, dass sich ein stationärer Zustand eingestellt hat, bei dem sich OB_- und AB_+ mit konstanter und gleicher Geschwindigkeit bewegen. Das xy-Koordinatensystem bewege sich mit gleicher Geschwindigkeit mit. Dann ist das elektrische Potential $\widetilde{u}(x,y)$ eine harmonische Funktion im Gebiet Ω zwischen den Elektroden, die den Randbedingungen

$$\widetilde{u} = 0 \quad \text{auf} \quad OC\,, \quad \widetilde{v} = v_0(>0) \quad \text{auf} \quad CB_-\,,$$

$$\widetilde{u} = u_0\,,\ \widetilde{v} = \lambda y \quad \text{auf} \quad AB_+\,, \quad \widetilde{v} = 0 \quad \text{auf} \quad OA\,,$$

genügt.



Dabei bezeichnet $\widetilde{v} = \widetilde{v}(x,y)$ die zu $\widetilde{u} = \widetilde{u}(x,y)$ konjugiert harmonische Funktion, die durch die letzte Randbedingung eindeutig festgelegt ist.

Unter Verwendung funktionentheoretischer Mittel kann das Problem in ein äquivalentes nichtlineares Integralgleichungsproblem umformuliert werden:

$$x(t) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{\frac{1}{k}} \frac{f(x(s))}{s-t}\,ds - D = R_1(k,t)\,, \quad -1 < t < \frac{1}{k}\,, \tag{1}$$

mit

$$
\begin{aligned}
R_1(k,t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{k}}^{-1} \frac{r_1(k,s)}{s-t}\,ds\,, \\
r_1(k,t) &= \frac{1}{\lambda}\left[v_0 - \frac{u_0}{2K}\int_1^{-t} \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{1-k^2s^2}}\right]\,.
\end{aligned}
$$

Dabei sind die Funktion $x(t)$, $-1 < t < 1/k$, und die reellen Zahlen $k \in (0,1)$ und D gesucht, wobei $x(t)$ den Bedingungen $x(-1) = -\infty$, $x(1/k) = 0$, und $x(1) = c$ genügen muss.

Für Gleichungen der Gestalt (1) sind numerische Lösungsverfahren entwickelt worden, die auf einer Kopplung von Kollokationsverfahren und dem Newtonschen Verfahren beruhen. Dabei können die entstehenden linearen Gleichungssysteme unter Ausnutzung struktureller Eigenschaften der Systemmatrizen sehr effektiv gelöst werden.

Es sind verschiedene Optimalsteuerprobleme für das beschriebene Modell denkbar. Z.B. kann man sich die Aufgabe stellen, eine gewünschte Form der Oberfläche des Werkstücks durch Gestaltung der Oberfläche des Werkzeugs möglichst gut zu approximieren. Für ein ähnliches Modell (Dammsickerproblem) existiert bereits eine Theorie zu einem entsprechenden Optimalsteuerproblem (siehe [1]).

Diese Theorie ist auf die hier vorliegende Situation zu übertragen. Ferner soll unter Verwendung der vorhandenen Löser des direkten Problems ein Computerprogramm für das Optimalsteuerproblem erstellt werden.

Empfehlungen: Vorlesungen zur Funktionalanalysis und Numerischen Mathematik

Kenntnisse aus der Theorie der optimalen Steuerung könnten nützlich sein, sind aber nicht zwingend notwendig.

Die Thematik ist auch für die Bearbeitung im Rahmen einer **Semesterarbeit** geeignet.

Prof. Peter Junghanns

Literatur

[1] Junghanns, P., Optimal control for a parametrized family of nonlinear Cauchy singular integral equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 164/165 (2004), 431–454.