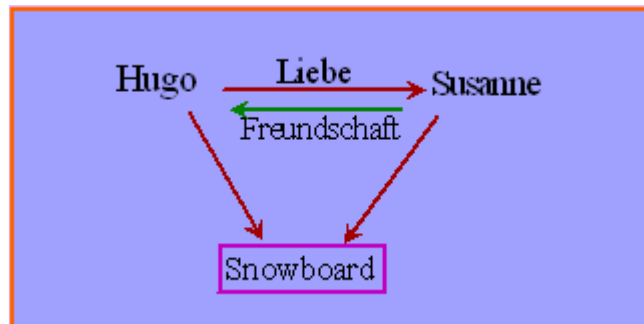


Graphentheorie

(Gegenstände und Personen sind die Punkte die Beziehungen zwischen Ihnen sind Linien)

Bsp: Hugo liest gern das Snowboardmagazin und liebt Susanne, die ihrerseits mit Hugo Freundschaft hält, ihn aber nicht liebt und ebenfalls vom Snowboardmagazin begeistert ist.

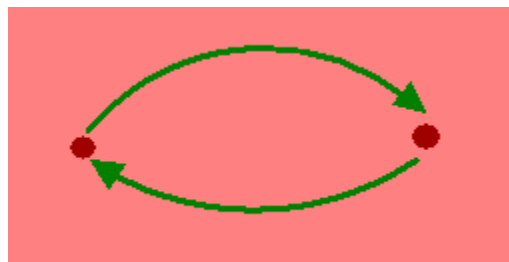
Graphentheoretisches Bild:



Def: Ein Graph besteht aus einer Menge M von Knoten X_1, \dots, X_n und einer Relation $K \subset M \times M$, d.h. einer Menge geordneter Knotenpaare, den sogenannten Kanten. Sind die Kanten geordnete Paare, so spricht man von einem gerichteten Graphen. In diesem Fall heißen die Kanten „Bögen“, im anderen Fall spricht man von einem gewöhnlichen Graphen.

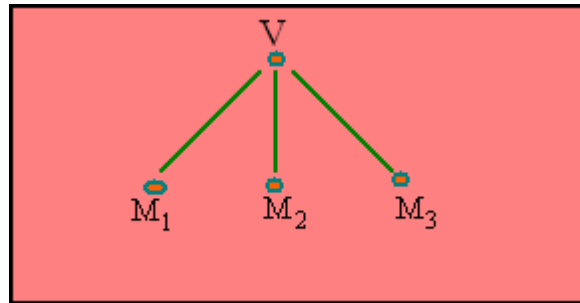
Bögen: - gerichtete Graphen.

Man veranschaulicht Knoten als Punkte und Kanten als Verbindungslinien. Praktisch relevant sind Graphen mit endlicher Knoten- und Kantenanzahl.



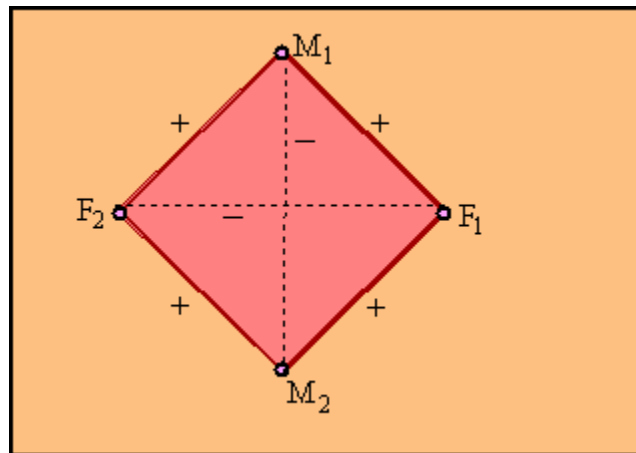
Es gibt gerichtete und ungerichtete, sowie Graphen mit und ohne Vorzeichen.

Bsp: (1) Vorgesetzter telefoniert mit seinem Mitarbeitern und umgekehrt.



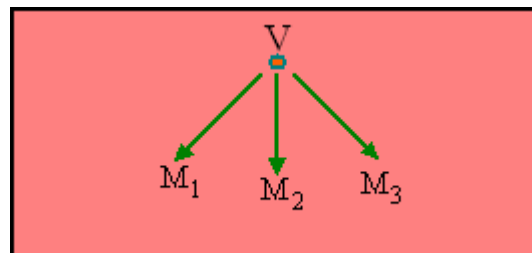
Das ist ein ungerichteter Graph ohne Vorzeichen.

(2) Zwei Ehepaare sitzen an einem Tisch, die Frauen nicht nebeneinander und die Männer nicht nebeneinander.



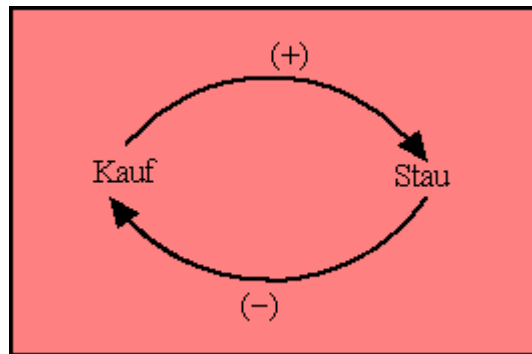
Das ist ein Graph mit Vorzeichen.

(3) Rangordnung:



Das ist ein gerichteter Graph ohne Vorzeichen.

(4) Autokauf und Stau auf den Straßen

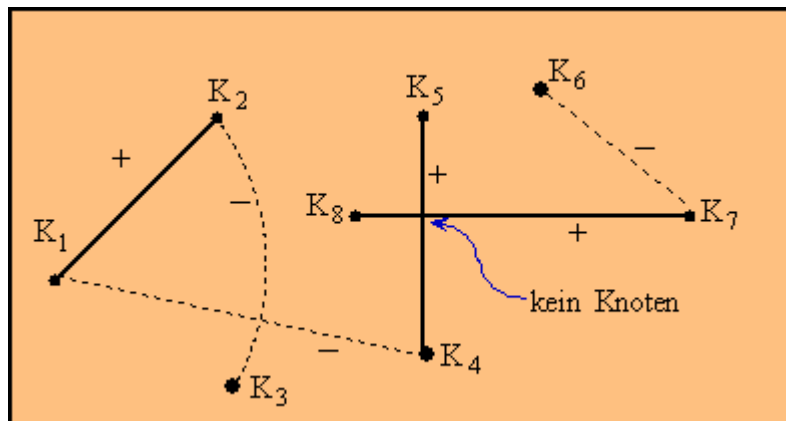


Das ist ein gerichteter Graphen mit Vorzeichen .

Ungerichtete Graphen mit Vorzeichen:

Es existiert ein Pfad zwischen den Knoten X und Y, wenn es eine Folge von Kanten gibt, die bei X beginnt und zu Y führt.

Bsp:

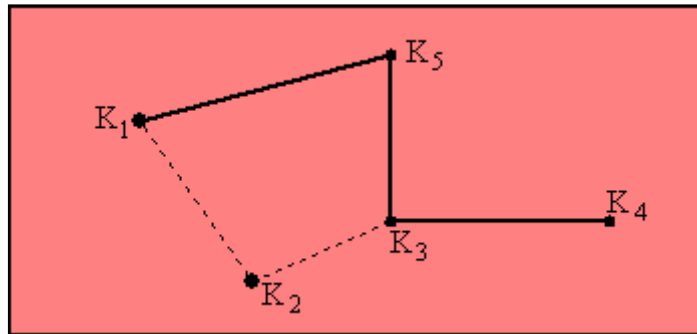


—— : Kanten + (positiv)
----- : Kanten - (Negativ)

Zwischen K_3 und K_5 gibt es einen Pfad .
Zwischen K_2 und K_6 gibt es keinen Pfad .

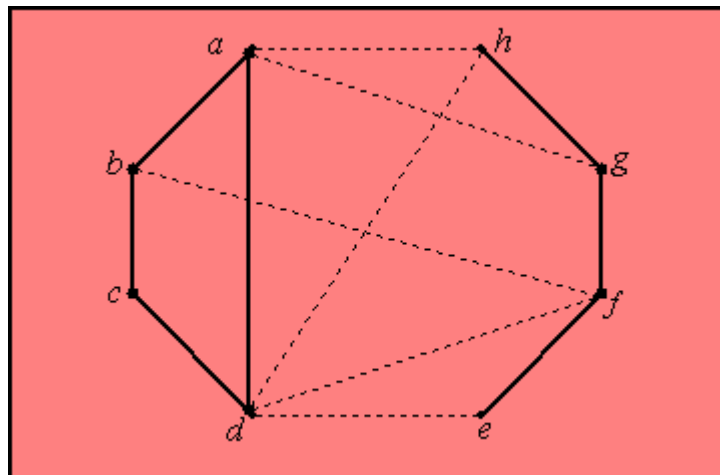
Das Vorzeichen eines Pfades ist negativ (positiv), wenn die Anzahl der negativen Kanten ungerade (gerade) ist. Ein Zyklus ist ein Pfad, der an einem Knoten anfängt und an diesem endet.

Bsp:



Vorzeichen: $K_1 K_2 K_3 K_4$ hat positives Vorzeichen.
 $K_2 K_1 K_5$ hat negatives Vorzeichen.

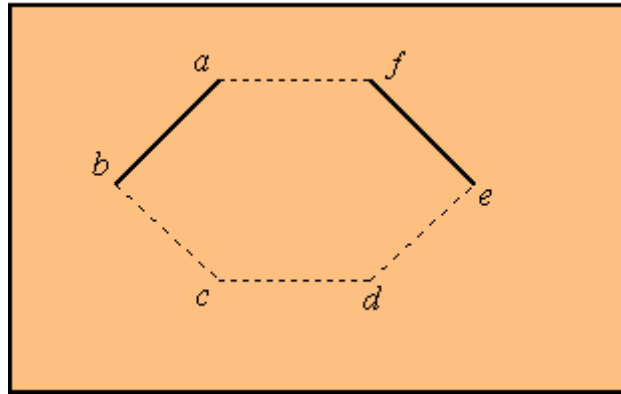
Ein Graph habe nur Zyklen mit positiven Vorzeichen, dann sagt man, er befindet sich im Gleichgewicht.



—— Positive Kanten
 ----- Negative Kanten

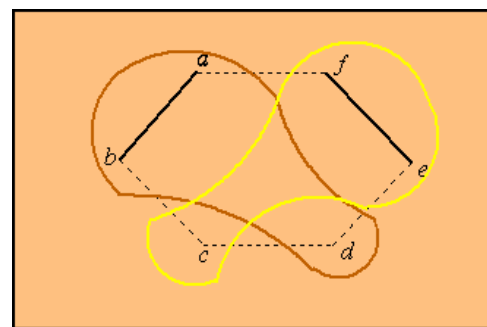
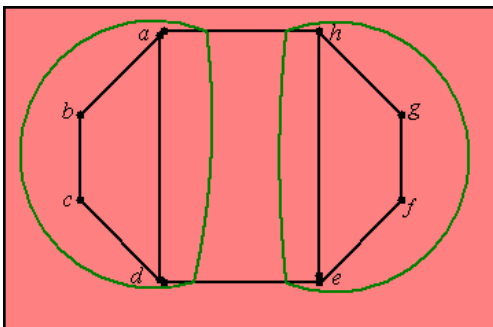
Jeder Zyklus dieses Bsp. hat eine gerade Anzahl negativer Kanten.

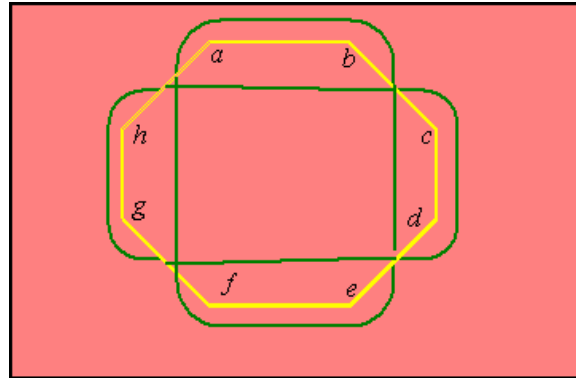
► **Satz 1:** Ein endlicher ungerichteter Graph mit Vorzeichen ist genau dann im Gleichgewicht, wenn alle Pfade, die die gleichen Paare von Knoten verbinden, das gleiche Vorzeichen haben.



⇒ Graph ist im Gleichgewicht, da der Zyklus 4 negative Kanten (gerade Anzahl) besitzt.

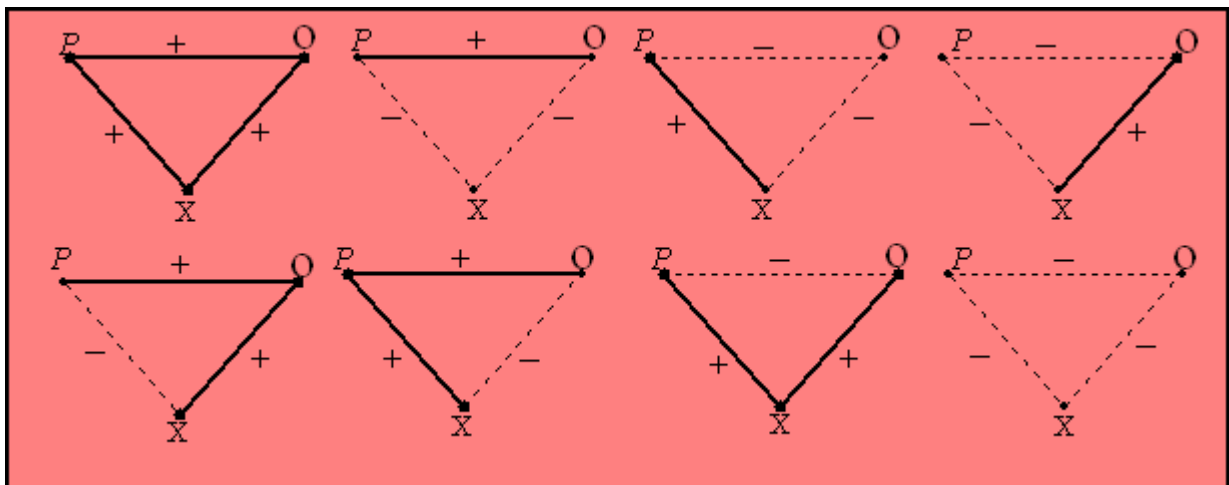
► **Satz 2:** Ein endlicher ungerichteter Graph mit Vorzeichen befindet sich genau dann im Gleichgewicht, wenn sich seine Knoten in zwei disjunkte Teilmengen zerlegen lassen, wobei alle positiven Kanten zwischen zwei Knoten der gleichen Teilmenge angehören und jede negative Kante Knoten in unterschiedlichen Teilmengen verbindet.





Bsp. aus der Psychologie

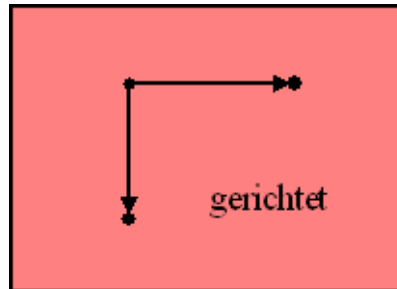
These, das Menschen eine kognitive Wahrnehmungstendenz in der Richtung besitzen, als hätten Menschen, die sie mögen gegenüber anderen sozialen Phänomenen eine ähnliche Einstellung wie sie selbst und hätten Menschen, die sie nicht mögen, gegensätzliche Einstellungen gegenüber anderen sozialen Phänomenen als sie selbst.



Die oberen Graphen sind im Gleichgewicht.

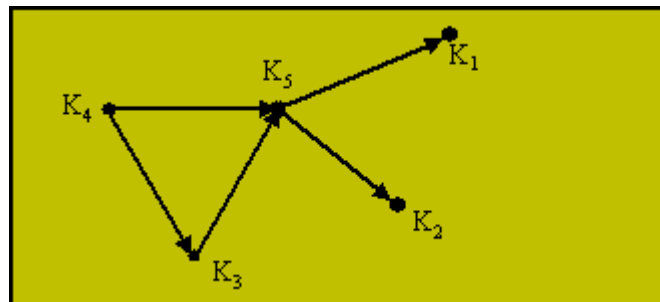
Gerichtete Graphen ohne Vorzeichen (endliche)

Bsp:



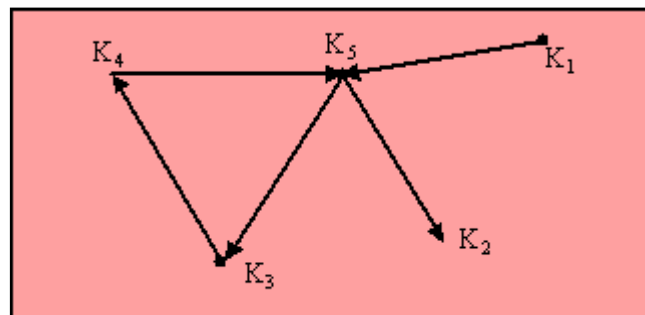
Ein Graph heißt genau dann **unilateral**, wenn es für zwei beliebige Punkte X und Y einen Pfad von X nach Y oder von Y nach X gibt (oder beides).

Bsp 1 :



Dieser Graph ist nicht unilateral, da zwischen K_1 und K_2 kein Pfad existiert und keiner zwischen K_2 und K_1 .

Bsp 2 :



Ist der Graph **unilateral** ? Ja,
da von K_1 zu K_2 möglich, auch wenn nur in einer Richtung.

Ein Graph hat eine vollständige Folge genau dann, wenn es einen Pfad gibt, der jeden Knoten einschließt.

Bsp 1. hat keine vollständige Folge

Bsp 2. hat eine vollständige Folge

Satz: Ein endlich gerichteter Graph ist genau dann unilateral, wenn er eine vollständige Folge besitzt.

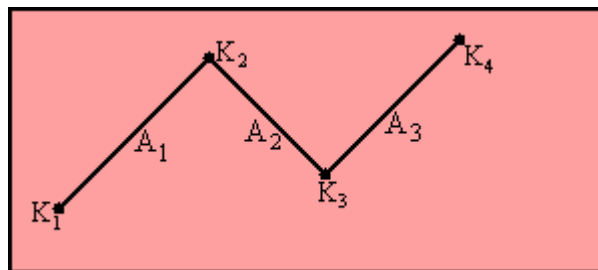
Bsp: Gerüchtenetzwerk

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- ▶ Es seien 2 Personen im Netzwerk fixiert, dann kann wenigstens 1 Person ein Gerücht in die Welt setzen, das die andere erreicht.
- ▶ Es gibt wenigstens 1 Person im Netzwerk, die ein Gerücht in die Welt setzen kann, das jede andere Person erreicht.

Graphentheorie dient zur Veranschaulichung von Sachverhalten .

Zwei Knoten mit verbindender Kante heißen adjazent. Zwei Kanten, die einen gemeinsamen Knoten haben, heißen adjazent.



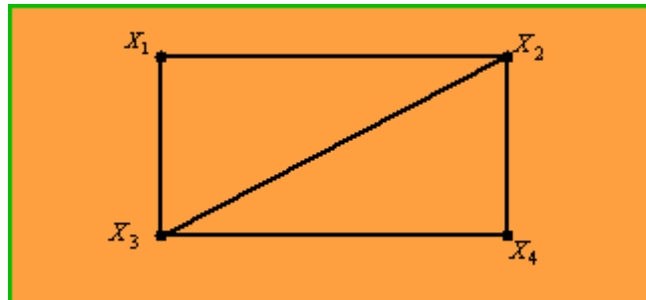
- : K_1 und K_2 sind adjazent (benachbart)
- K_1 und K_3 sind nicht adjazent (benachbart).

A_1 und A_2 sind adjazent

A_1 und A_3 sind nicht adjazent
 A_2 und A_3 sind adjazent

●● Gehört ein Knoten zu einer Kante, so heißen Knoten und Kante **inzident**.

► **Def:** Der Grad eines Knoten x_i in einem schlichten Graphen ist die Anzahl der mit x_i inzidenten Kanten.



Grad $x_1 = 2$

Grad $x_2 = 3$

Da jede Kante mit zwei (drei) Knoten inzidiert trägt sie den Wert zwei (drei) zur Summe der Grade der Knoten bei.

Satz (Euler): Die Summe der Grade der Knoten ist gleich der doppelten Anzahl der Kanten.

Verbindung zur Matrix:

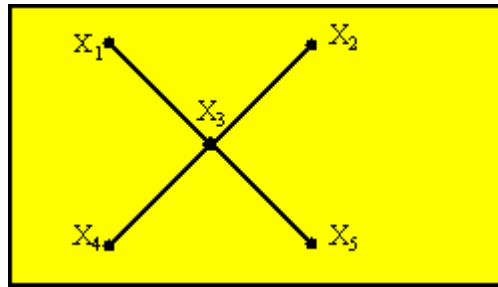
Es sei $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ die Knotenmenge eines Graphen.

Die Matrix $A = \{a_{ij}\}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{wenn } (x_i, x_j) \text{ eine Kante ist} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

heißt **Adjazenzmatrix** (oder einfach **Matrix des Graphen**)

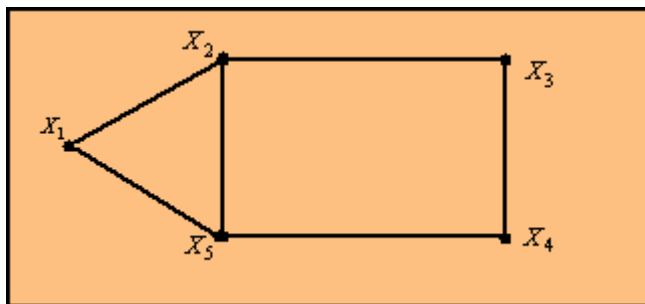
Bsp 1)



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	1	0	0
x_2	0	0	1	0	0
x_3	1	1	0	1	1
x_4	0	0	1	0	0
x_5	0	0	1	0	0

- Jede Adjazenzmatrix ist symmetrisch , $a_{ij} = a_{ji}$.

Bsp 2)

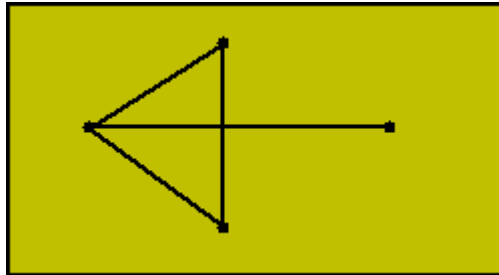


	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	0	1
x_2	1	0	1	0	1
x_3	0	1	0	1	0
x_4	0	0	1	0	1
x_5	1	1	0	1	0

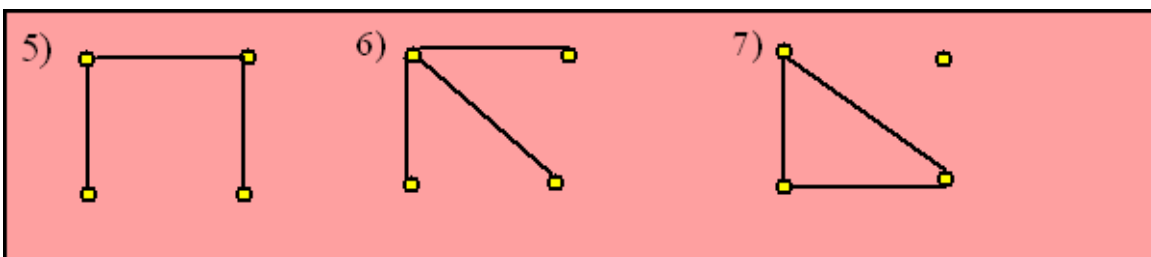
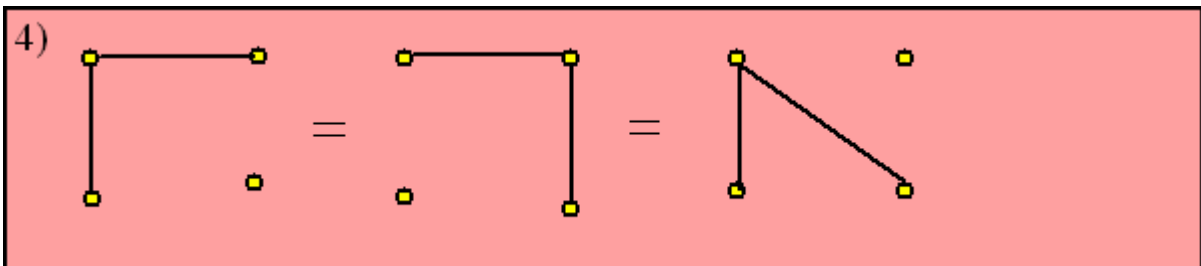
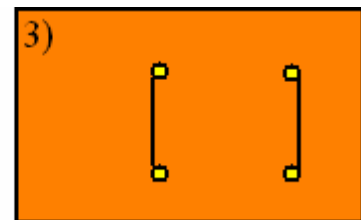
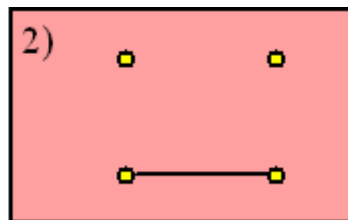
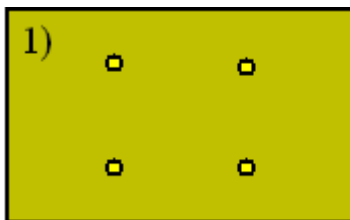
- Grad $X_2 = 3$, Grad $X_3 = 2$

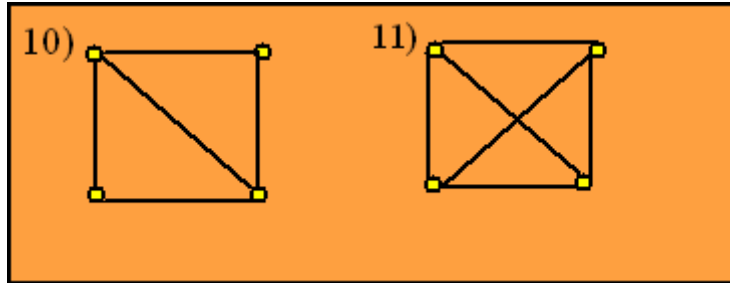
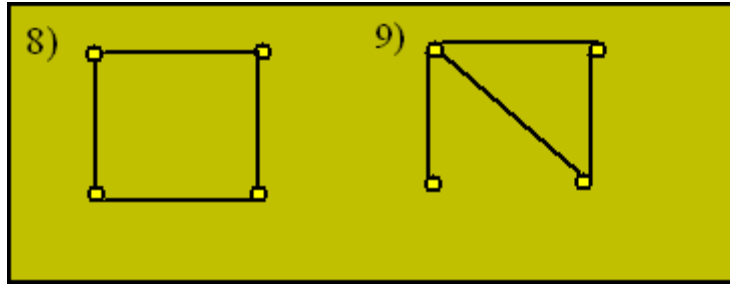
Der **Grad** eines Knotens ist die Zeilen- oder Spaltensumme.

Im weiteren werden nur Graphen betrachtet, die kein Vorzeichen haben, die nicht gerichtet sind und in denen es max. eine Kante zwischen zwei Knoten gibt, \Rightarrow Schlichte Graphen, und jede Kante zwei verschiedene Knoten verbindet \Rightarrow Schlingenfreie Graphen.



♣ Graphen mit 4 Knoten (die schlingenfrei und schlicht sind)

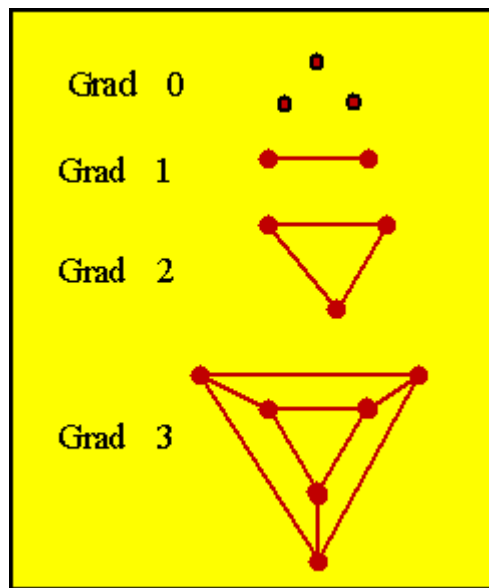




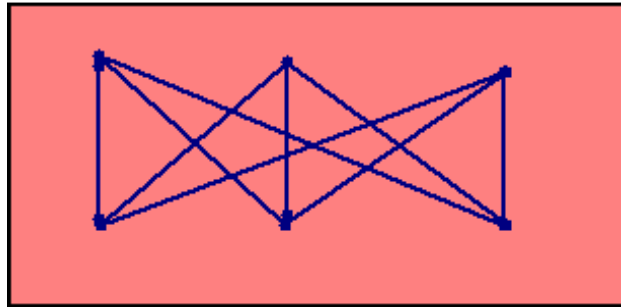
Bei 4 Knoten gibt es **11** Möglichkeiten.

- ▶ Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn zwei beliebige Knoten über einen Weg verbunden sind.
- 1)- 4) und 7) sind nicht zusammenhängende Graphen.
- ▶ 2 Kanten mit gemeinsamen Knoten heißen **benachbart** oder **adjazent**.
- ▶ Ein Graph heißt **regulär**, wenn alle Knoten den gleichen Grad haben.

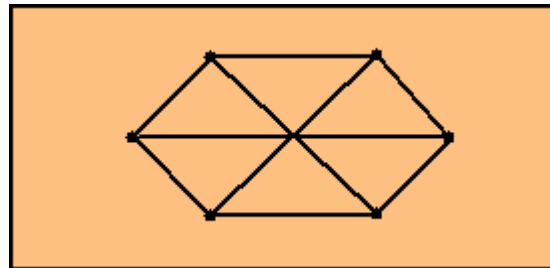
Reguläre Graphen:



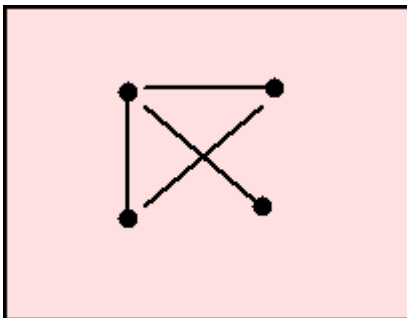
- 2 Graphen sind isomorph, wenn zwischen ihnen eine Bijektion existiert, die die Relation „benachbart“ oder „adjazent“ erhält.



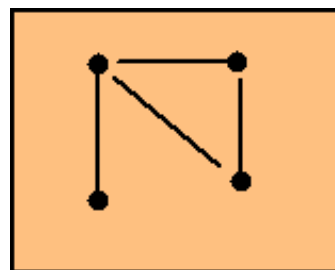
und



sind **isomorph**.



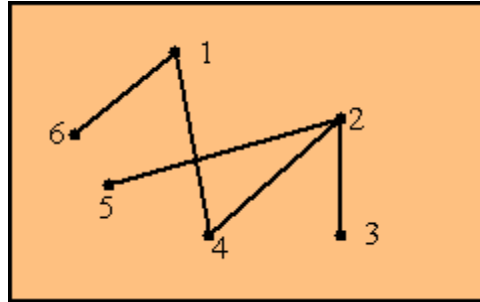
und



sind **isomorph**.

♣ Problem von Ramsey.

In jeder Gesellschaft mit 6 Personen befinden sich mindestens 3, die sich kennen oder 3, die sich gegenseitig nicht kennen.



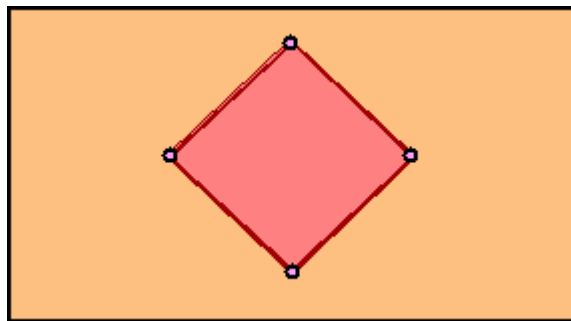
3 kennen sich gegenseitig nicht (4, 5 und 6).

♣ **Äquivalente Formulierung:**

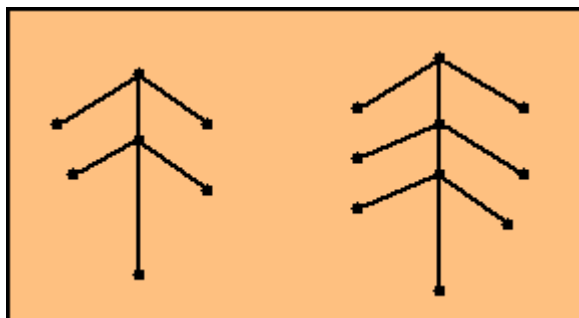
Für jeden Graphen mit 6 Knoten existiert in G oder \bar{G} ein Dreieck.

♣ **Bäume und Wälder:**

► Ein Graph, der keinen Kreis enthält, ist ein **Wald**.



⇒ **Kein Wald**



⇒ **Wald**

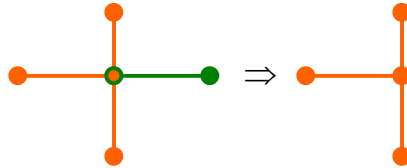
Ein zusammenhängender Wald ist ein Baum. Die Knoten vom Grad 1 sind seine Blätter.

- Jeder nichttriviale Baum hat mindestens 2 Blätter.



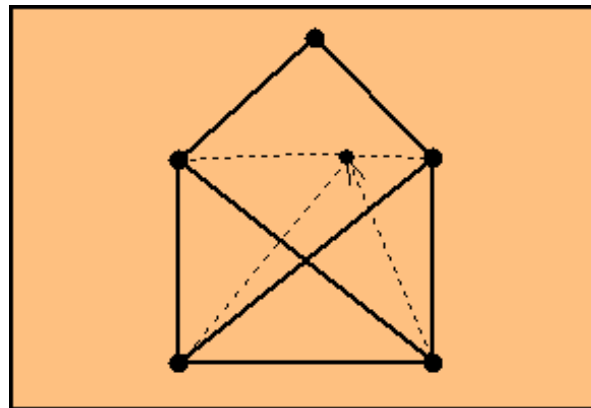
(es existiert nur 1 Kante mit 2 Knoten)

Entfernt man von einem Baum ein Blatt so ist der Rest immer noch ein Baum.



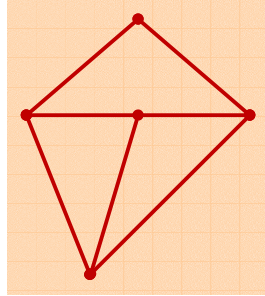
Ein Graph heißt **plättbar**, wenn er sich in eine Ebene einbetten läßt.

Bsp: (dreidimensionaler Graph)

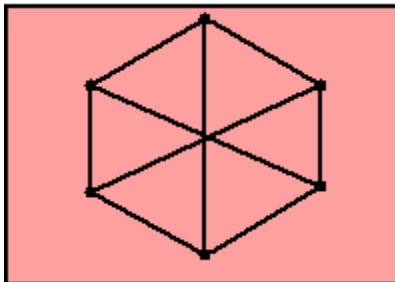
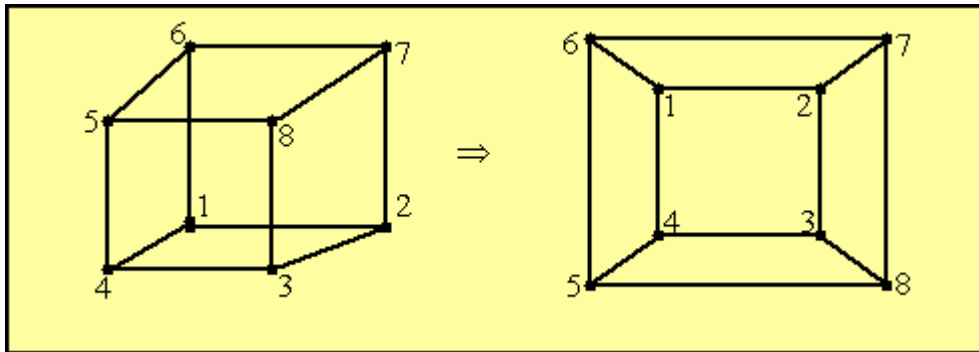


- Ist dieser Graph plättbar? Ja.

Bsp: (zweidimensionaler Graph)



•• Ist ein Würfel plättbar ? Ja.



⇒ nicht plättbarer Graph.