Formelsammlung: Mathematik für Informatiker

Daniel Klaffenbach

14. Februar 2011

Inhaltsverzeichnis

http://www.tu-chemnitz.de/~klada

[1]Diese Formelsammlung erhebt weder Anspruch auf Vollständigkeit noch Richtigkeit. Der Autor bietet sie kostenlos und ohne jegliche Gewährleistung an.

1 Komplexe Zahlen

1.1 Allgemeines

- $i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$
- $z = a + i \cdot b = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$
- $\overline{z} = a - i \cdot b$
- $a = r\cos\varphi \; b = r\sin\varphi$

1.2 Rechenregeln

- $(\overline{z_1 + z_2}) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $(\overline{z_1 z_2}) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $z + \overline{z} = 2a, \qquad z - \overline{z} = i \cdot 2b$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$
- $|z| = r = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

1.3 Potenzen

- $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
- $z^2 = (a + i \cdot b)^2 = a^2 - b^2 + i \cdot 2ab$
- $z^3 = (a + i \cdot b)^3 = a^3 - 3ab^2 + i \cdot (3a^2b - b^3)$
- $z^4 = (a + i \cdot b)^4 = a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + i(4a^3b - 4ab^3)$
- $z^n = re^{i\varphi} \quad \rightarrow n-$Lösungen:
  $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\varphi_k}$
  $\varphi_k = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi(k-1)}{n}$

2 Matrizen

2.1 Rechengesetze (allgemein)

- $A + B = B + A$ (kommutativ)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (assoziativ)
- $\exists$ **Nullmatrix** O: $A + O = A$
- zu jeder Matrix $A = (a_{ij})$ existiert eine Matrix $(-A) = (-a_{ij})$ mit $A + (-A) = O$
- $(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu A) \quad \forall A \in \mathbf{K}^{m\times n} \quad \forall\lambda, \mu \in \mathbf{K}$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $(A + B) \cdot C = AC + BC$
- $C \cdot (A + B) = CA + CB$
- $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$
- Für jede $(m\times n)$ - Matrix gibt es eine Matrix $I_n \in \mathbf{K}^{n\times n}$ und $I_m \in \mathbf{K}^{m\times m}$, sodass gilt: $A \cdot I_n = A \cdot I_m = A$. $\Rightarrow (m \times m)$ - bzw. $(n \times n)$ - **Einheitsmatrizen**

2.2 Rechengesetze für spezielle Matrizen

- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

2.3 Eigenschaften von Matrizen

- A^T: transponierte Matrix, Spiegelung an der Hauptdiagonalen ($(n \times m)$-Matrix wird zu $(m \times n)$-Matrix)
- $A^* = \overline{A^T}$: transponierte Matrix; bei komplexen Zahlen wird **zusätzlich** das konjugiert Komplexe gebildet
- $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$: inverse Matrix

- **hermitesch:** $A = A^*$ (Hauptdiagonale reell ($\mathbb{R}$))
- **schiefhermitsch:** $A^* = -A$ (Hauptdiagonale komplex ($\mathbb{C}$))
- **unitär:** $T \cdot T^* = I = T^* \cdot T$

2.4 Symmetrie von Matrizen

Eine $(n \times n)$-Matrix ist

- **symmetrisch**, wenn $A = A^T \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$
- **schiefsymmetrisch**, wenn $A^T = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$
- **orthogonal**, wenn $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$

- **Jede $(n \times n)$-Matrix lässt sich als Summe $A^+ + A^-$ schreiben mit**
  A^+ ist symmetrisch [hermitesch] und
  A^- ist schiefsymmetrisch [schief hermitesch]
- $A^+ = \dfrac{1}{2}(A + A^*)$
- $A^- = \frac{1}{2}(A - A^*)$

3 Mengenlehre

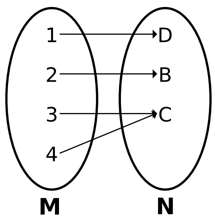
3.1 Eigenschaften

- $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
  $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
- $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Assoziativität)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivität)
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (De Morgansche Gesetze)
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \wedge A \cup B = B$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

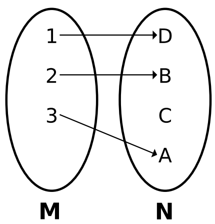
3.2 Funktionen

$f : M \longrightarrow N$

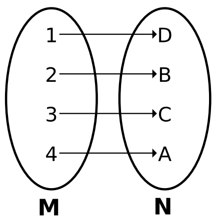
- Surjektivität: f ist eine Abbildung von M auf N



- Injektivität: f ist eine Abbildung von M in N
  (Allen Elementen in N wird höchstens ein Element aus M zugeordnet)



- Bijektivität: f ist eine eindeutige Abbildung von M in N
  (Surjektivität und Injektivität zugleich)



3.3 Symmetrie von Funktionen

- f_1 ist eine **gerade Funktion**, wenn $f_1(x) = f_1(-x)$
- f_2 ist eine **ungerade Funktion**, wenn $-f_2(x) = f_2(-x)$

4 Relationen

4.1 Eigenschaften von Relationen

- $R \subset M \times M$ heißt **reflexiv**, wenn $(x, x) \in R \quad \forall x \in M$
- $R \subset M \times M$ heißt **symmetrisch**, wenn $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \quad \forall x, y \in M$
- $R \subset M \times M$ heißt **antisymmetrisch**, wenn $((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in M$
- $R \subset M \times M$ heißt **transitiv**, wenn $((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R \quad \forall x, y, z \in M$

4.2 Äquivalenzrelationen

- Reflexiv, symmetrisch und transitiv
- **Äquivalenzklassen**: Eine Äquivalenzrelation in einer Menge M bewirkt eine Aufteilung von M in nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen

4.3 Ordungsrelationen

- Reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

4.4 Extremale Elemente

Sei $(M, \prec)$ eine teilweise geordnete Menge und $T \prec M$, dann gilt:

1. $\underline{x} \in T$ ist **kleinstes Element** in T, wenn gilt: $\underline{x} \prec x \quad \forall x \in T$
   $\overline{x} \in T$ ist **größtes Element** in T, wenn gilt: $\overline{x} \succ x \quad \forall x \in T$
2. $\underline{a} \in T$ ist **minimales Element** in T, wenn für <u>kein</u> $x \in T$ gilt: $x \prec \underline{a} \quad (x \neq \underline{a})$
   $\overline{a} \in T$ ist **maximales Element** in T, wenn für <u>kein</u> $x \in T$ gilt: $\overline{a} \prec x \quad (x \neq \overline{a})$
3. $\underline{s} \in M$ ist **untere Schranke** von T, wenn gilt: $\underline{s} \prec x \quad \forall x \in T$
   $\overline{s} \in M$ ist **obere Schranke** von T, wenn gilt: $\overline{s} \succ x \quad \forall x \in T$
4. $\underline{g} \in M$ ist **größte untere Schranke** von T, wenn gilt: $\underline{s} \prec \underline{g} \quad \forall \underline{s} \in M$
   $\overline{g} \in M$ ist **kleinste obere Schranke** von T, wenn gilt: $\overline{g} \prec \overline{s} \quad \forall \overline{s} \in M$

5 Algebraische Operationen

5.1 Algebraische Strukturen

Die folgenden Definitionen implizieren jeweils alle ihre Voranstehenden (**5.** impliziert **1.-4.**, usw.):

1. **Algebraische Struktur:** $[M, \Omega]$: die Operation Ω wird über der Menge M ausgeführt, $M \neq 0$
2. **Gruppoid:** Operation führt wieder in die Menge M: $a * b \in M \quad \forall a, b \in M$
3. **Halbgruppe:** $*$ ist assoziativ: $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in M$
4. **Monoid:** $\exists$ ein neutrales Element: $e = e_L = e_R$
5. **Gruppe:** $\exists$ ein inverses Element: $\forall a \in M \quad \exists a^{-1} \in M$ mit $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$
6. **Abelsche Gruppe:** $*$ ist kommutativ: $a * b = b * a \quad \forall a, b \in M$

5.2 Besondere algebraische Strukturen

- **Ring:** $[M, \oplus, \otimes]$ mit:
  - $[M, \oplus]$ ist Abelsche Gruppe
  - $[M, \otimes]$ ist Halbgruppe
  - und ein Distributivgesetz gilt
- **Integritätsbereich:** $[M, \oplus, \otimes]$ mit:
  - $[M, \oplus]$ ist Abelsche Gruppe
  - $[M, \otimes]$ ist kommutativer Monoid
  - frei von Nullteilern
  - und ein Distributivgesetz gilt
- **Körper:** $[M, \oplus, \otimes]$ mit:
  - $[M, \oplus]$ ist Abelsche Gruppe
  - $[M \setminus \theta, \otimes]$ ist Abelsche Gruppe, wobei θ das neutrale Element von $\oplus$ ist (Nullelement)
  - und ein Distributivgesetz gilt

5.3 Rechengesetze (allgemein)

- Kommutativgesetz: $a + b = b + a \quad \forall a, b \in M$
- Assoziativgesetz 1: $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in M$
- Assoziativgesetz 2: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in M$
- Distributivgesetz 1: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in M$
- Distributivgesetz 2: $a \cdot (c + b) = a \cdot c + a \cdot b \quad \forall a, b, c \in M$

6 Lineare Räume

6.1 Lineare Abhängigkeit

- $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, ... , $\overrightarrow{a_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$
- n-Vektoren heißen linear abhängig, wenn einer der Vektoren Linearkombination der anderen ist
- $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$
  $\rightarrow$ linear unabhängig, wenn nur die triviale Lösung existiert ($\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$), sonst linear abhängig

6.2 Vektorräume

- **Vektorraum:** $[M, \oplus, \otimes]$ mit:
  - $[M, \oplus]$ ist Abelsche Gruppe
  - $[M, \otimes]$ ist Körper:
    * $\alpha \cdot x \in M \quad \forall \alpha \in K, \forall x \in M$
    * $\alpha \cdot (x + y) = \alpha x + \alpha y$
    * $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in M$
    * $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
    * $\exists$ Einselement: $1 \cdot x = x$

6.3 Orthonormalbasis

- n linear unabhängige Vektoren v bilden eine Basis B eines Raumes der Dimension n
- $\rightarrow$ Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren zur Bestimmung der Orthonormalbasis $B_0 = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$:
  - $s_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$
  - $u_2 = v_2 - \langle v_2, s_1 \rangle \cdot s_1$
  - $s_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$
  - $u_3 = v_3 - \langle v_3, s_1 \rangle \cdot s_1 - \langle v_3, s_2 \rangle \cdot s_2$
  - $s_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|}$

    $\vdots$
  - $u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, s_i \rangle \cdot s_i$
  - $s_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$

6.4 Operatoren und Projektoren

- A ist ein *linearer* Operator, wenn gilt:
  $A(x + \tilde{x}) = Ax + A\tilde{x}$
  $A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax$
- Bild: $Ax = z$
- Urbild: $Az = x$
- Projektor:
  $P^2 x = P(Px) = Px$
- Orthoprojektor:
  $P^2 x = P(Px) = Px$
  $P^* x = \langle Px, y \rangle = \langle x, P^* y \rangle = Px$

- Operationen mit Projektoren:
  - *ker P*:
    $\begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
  - *im P*:
    $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$

7 Analytische Geometrie

7.1 Skalarprodukt

- $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos\varphi$
  $\varphi :=$ Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$
  $||\vec{a}|| := a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Es gilt:
  - $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = ||\vec{a}|| \cdot \cos 0 = ||\vec{a}||^2$
  - $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \vee \vec{a} \perp \vec{b}$
  - $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
  - $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$
- Regeln:
  - $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$
  - $\langle \lambda\vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
  - $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$
  - $\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a} \rangle = \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$
  - $\langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}^2\| - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \|\vec{b}^2\|$

7.2 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

- $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} : \quad \vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$
- $||\vec{c}|| = ||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin\varphi$
- Es gilt:
  - $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
  - $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
  - $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$
  - $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
  - $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0 \vee \vec{a} \parallel \vec{b}$
  - $(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & i \\ \alpha_2 & \beta_2 & j \\ \alpha_3 & \beta_3 & k \end{bmatrix} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)i - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)j + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)k$

7.3 Projektion eines Vektors auf einen anderen

- $\vec{a} = \text{proj}_{\vec{b}}\vec{a} + \text{orth}_{\vec{b}}\vec{a}$
- $\text{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{||\vec{b}||^2} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot \cos\varphi \cdot \vec{b}$ *(Parallelkomponente)*
- $\text{orth}_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{a} - \text{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{||\vec{a} \times \vec{b}||}{||\vec{b}||} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot |\sin\varphi| \cdot \vec{b}$ *(Normalkomponente)*

7.4 Lagebeziehungen

$$g : \vec{x} = \vec{p_0} + \lambda\vec{r}$$
$$h : \vec{x} = \vec{p_1} + \lambda\vec{q}$$
$$\epsilon : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

7.4.1 Lagebeziehungen zweier Geraden

- Geraden liegen in einer Ebene:
  $\vec{r}, \vec{q}, \vec{p_1} - \vec{p_0}$ sind linear abhängig
  - Parallelität:
    $g||h \Leftrightarrow \vec{r}$ und $\vec{q}$ sind linear abhängig
  - Geraden schneiden sich:
    $\vec{r}$ und $\vec{q}$ sind linear unabhängig

7.5 Schnittwinkel

- Winkel zwischen einander schneidenden Geraden:
  $\cos\varphi = \frac{|\langle \vec{r}, \vec{q} \rangle|}{||\vec{r}|| \cdot ||\vec{q}||}$
- Winkel zwischen Ebene und Gerade:
  $\sin\varphi = \frac{|\langle \vec{n}, \vec{r} \rangle|}{||\vec{n}|| \cdot ||\vec{r}||}$
- Winkel zwischen 2 Ebenen:
  $\cos\varphi = \frac{\langle \vec{n_1}, \vec{n_2} \rangle}{||\vec{n_1}|| \cdot ||\vec{n_2}||}$ mit $\vec{n_1}$,$\vec{n_2}$ Normalenvektor der Ebenen

7.6 Abstände

- Abstand Punkt-Ebene:
  $dist(\overrightarrow{OP}, \epsilon) = |\frac{\alpha_\epsilon x_P + \beta_\epsilon y_P + \gamma_\epsilon z_P + \delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}|$
- Abstand Punkt-Gerade:
  $dist(\overrightarrow{OP_1}, g) = |\langle (\vec{p}_1 - \vec{p}_0), \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||} \rangle|$

7.7 Rotationen

- Drehung um Winkel φ in $\mathbb{R}^2$:
  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- Drehung um Winkel φ in $\mathbb{R}^3$:
  - Rotationsmatrix für die Drehung eines Punktes um die x-Achse:
    $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
  - Rotationsmatrix für die Drehung eines Punktes um die y-Achse:
    $\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$
  - Rotationsmatrix für die Drehung eines Punktes um die z-Achse:
    $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8 Lineare Gleichungssysteme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}$$

$$Ax = b$$

- Cramersche Regel:
  $$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}{\det A}$$
  $$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$$

9 Eigenwertprobleme

- Charakteristisches Polynom von A:
  $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
- Eigenwert λ_n von $A \equiv$ Nullstellen von $\varphi_A(\lambda)$
  - Regeln:
    * EW (A) =EW (A^T)
    * EW $(A^n) = (\text{EW}(A))^n$
    * EW $(\alpha A) = \alpha \text{EW}(A) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}$
- Eigenvektor $\overrightarrow{x_n}$:
  $(A - \lambda_n I) \cdot \overrightarrow{x_n} = \overrightarrow{0}$
- Eigenraum: $N(A - \lambda I)$

9.1 Hauptachsentransformationen

$$M = X \Lambda X^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \overrightarrow{x_1} \\ \vdots \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} \vdots \\ \overrightarrow{x_n} \\ \vdots \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

9.1.1 Polynome

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3 + g = 0$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix}}_{b^T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + g$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \Lambda_A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\tilde{b}^T}_{\tilde{b}^T = b^T \cdot X_A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + g$$

10 Differentialrechnung

10.1 Kurvendiskussion

- Monotonie:
  - streng monoton wachsend: $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in [a,b]$
  - streng monoton fallend: $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in [a,b]$
- Extremwerte: $f'(x) = 0$
  - lokales Maximum: $f''(x) < 0$
  - lokales Minimum: $f''(x) > 0$
- Wendestellen: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
- Unstetigkeiten 1. Art: $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$ exisitert eigentlich
  - hebbare Unstetigkeit:
    $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$
    aber entweder:
    - $x_0 \notin DB$
    - $g \neq f(x_0)$
  - Sprungstelle:
    $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$
- Unstetigkeiten 2. Art:
  - Polstellen:
    $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \infty \qquad$ oder
    $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$

10.2 Spezielle Grenzwerte

- $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z \quad \forall z \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- $\lim\limits_{n \to \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \quad \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$

10.3 Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)} \quad \forall u(x_0) = 0, v(x_0) = 0$$

10.4 Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial r} =< \nabla f, \frac{r}{||r||} >$$

10.5 Tangentialebene

Tangentialebene ϵ von $f(x,y)$ im Punkt (x,y):

$$\epsilon = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(1,0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(0,1) \end{pmatrix}$$

11 Integralrechnung

11.1 Grundintegrale

- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

12 Vektoranalysis

12.1 Polarkoordinaten

- $x = r \cdot \cos\varphi$
- $y = r \cdot \sin\varphi$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$

12.2 Vektor- und Skalarfelder

- Gradient: $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} f$
  - Bei Polarkoordinaten: $\nabla z = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$
- Divergenz: $\nabla \cdot F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$
- Rotation: $\nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 \\ j & \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \\ k & \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3 \end{vmatrix}$

13 Zufällige Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

13.1 Grundelemente aus Mengenlehre und Kombinatorik

- Modell: Ziehen von k Kugeln aus Urne mit n Kugeln
  Anzahl der Möglichkeiten:
  - Reihenfolge beachten, mit Zurücklegen: ${}^{w}V_n^k = n^k$
  - Reihenfolge beachten, ohne Zurücklegen: $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
  - Reihenfolge nicht beachten, mit Zurücklegen: ${}^{w}C_n^k = \dbinom{n+k-1}{k}$
  - Reihenfolge nicht beachten, ohne Zurücklegen: $C_n^k = \dbinom{n}{k}$
- Spezielle Verteilungen:
  - Auswahl von k aus n Elementen ohne Zurücklegen mit m Treffern:
    $N_m = \dbinom{n-k}{k-m} \cdot \dbinom{k}{m}$
  - Hypergeometrische Verteilung:

N: Kugeln insgesammt	n: Kugeln gezogen
M: Nieten insgesammt	m: Anzahl der gezogenen Nieten

$$P = \frac{\dbinom{N\_M}{n-m} \cdot \dbinom{M}{m}}{\dbinom{N}{n}}$$

13.2 Kenngrößen

- Erwartungswert EX
  $EX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$
- Varianz D^2X
  $D^2X = E(X - EX)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 P(X = x_i)$
- Standardabweichung σ
  $\sigma = \sqrt{D^2X}$

13.3 Zufällige Ereignisse

- Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{a}, P)$
  mit: Ω - Ergebnismenge, $\mathfrak{a}$ - Ereignisfeld, P - Wahrscheinlichkeitsmaß
- Elementarereignis ω_j:
  $\omega_j \cap \omega_i = \varnothing \quad \forall i \neq j$
- Ereignisfeld $\mathfrak{a}$:
  - $\Omega \in \mathfrak{a}$
  - $A \in \mathfrak{a} \Rightarrow \overline{A} \in \mathfrak{a}$
  - $A_i \in \mathfrak{a} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathfrak{a}$
- Axiomensystem von Kolmogorov
  Für eine Ereignismenge Ω mit dem Ereignisfeld $\mathfrak{a}$ gilt:
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(\Omega) = 1$

- $A, B, A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Rechenregeln:

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- A, B beliebig: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- A, B unabhängig: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- geometrische Wahrscheinlichkeit: $P(A) = \dfrac{Inhalt\ von\ A}{Inhalt\ von\ \Omega}$

13.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Satz von Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$
  (Wahrscheinlichkeit von Ereignis A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist)
- Rechenregel: $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$
- Totale Wahrscheinlichkeit: $P(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$
  Spezialfall: $n = 2$: $B_1 = B$, $B_2 = \overline{B}$

13.5 Binomialverteilung

- $X \sim B(n,p)$:
  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (Bedingung: n unabhängige Versuche, $P(A) = p =$ konstant)

13.6 Poissonverteilung

- Bedingungen (Poissonstrom):
  - Homogenität (gleichbleibende Intensität)
  - Stationarität (blitzartiges Eintreten)
  - Ordinärität (Unabhängigkeit einzelner sich nicht-überlappender Intervalle)
- $X \sim \Pi_t(\mu)$:
  $P(X_t = k) = \dfrac{(\mu \cdot t)^k}{k!} e^{-\mu t}$

  $EX = \mu \cdot t$
  μ: Intensität, t: Zeit

13.7 Stetige Zufallsgrößen

- Dichtefunktion $F(x)$
  $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$
  Es gilt:
  - $P(X < a) = F(a)$
  - $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
  - $P(X \geq a) = 1 - F(a)$

13.8 Exponentialverteilung

- Exponentielle Zufallsgröße $X \sim Ex(\lambda)$:
  $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$
  $EX = \dfrac{1}{\lambda}$
  $\tilde{x} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

13.9 Normalverteilung

- $X \sim N(\underbrace{\mu}_{EX}, \sigma^2)$:
  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
  $= \Phi(\frac{X-\mu}{\sigma})$
  $\Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$

13.10 Funktionen von Zufallsgrößen

- $E(aX) = a \cdot EX$
- $D^2(aX) = a \cdot D^2X$
- $E(X+Y) = EX + EY$
- $D^2(X+Y) = D^2X + D^2Y$ für X, Y stochastisch unabhängig
- für X, Y stochastisch unabhängig und $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ gilt:
  - $aX \sim N(a\mu_1, a^2\sigma_1^2)$
  - $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

13.11 Grenzverteilungssätze

- $X \sim B(n, p)$ für große n
  - Moivre/Laplace: $X \approx N(np, np(1-p))$
    ⇒Regel: $np(1-p) > 9$

    Regularität (Übergang von diskreter zu stetiger ZG):
    $P(a \leq x \leq b) = \Phi(\frac{b + 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} - \Phi(\frac{a - 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}))$
  - Poisson: $X \approx \Pi_1(\mu)$ mit $\mu = n \cdot p$
    ⇒Regel: $np \leq 10, \quad n \geq 1500p$

14 Mathematische Statistik

- $EX : \overline{x_n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$
- $D^2X : s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_n})$
- $\sigma : s_n = \sqrt{s_n^2}$ (Casio CFX-9850 Equivalent: $x\sigma n^{-1}$)

14.1 Statistische Prüfverfahren

1. Aufstellen einer Hypothese H_0 über die Verteilung von X, Bilden der Gegenhypothese H_1
2. Konstruktion der Testgröße T, deren Verteilung bekannt ist, falls H_0 tichtig ist
3. Konstruktion eines kritischen Bereiches K_α, sodass zu vorgegebenen α gilt:
   $P(T \in K_\alpha | H_0 richtig) = \alpha$

   mit α: Signifikanzniveau/Irrtumswahrscheinlichkeit
4. Auswertung:
   $T \notin K_\alpha \quad \Rightarrow$ Test nicht signifikant - man kann auf Basis dieses Tests nichts gegen H_0 einwenden.
   $T \in K_\alpha \quad \Rightarrow$ Test ist signifikant
   → Lehne H_0 ab
   → Mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ ist H_0 falsch