Kombinatorik bei Agricola – Über Gemische und Verbindungen in «De natura fossilium libri X»

Dietrich Stoyan / Helga Stoyan (Freiberg)

Einleitung

In Buch X versucht Agricola, die Anzahl möglicher Minerale zu bestimmen. Er betrachtet die verschiedenen Möglichkeiten der Zusammensetzung in Abhängigkeit von der Anzahl gewisser Komponenten und löst hierbei kombinatorische Probleme. Wie bekannt, ist die Kombinatorik ein Teilgebiet der Mathematik, das oft als ‚Kunst des geschickten Zählens' bezeichnet wird.
Der Text von Buch X gilt als kompliziert und wenig verständlich, Das liegt unserer Meinung nach vor allem an der Darstellung mathematischer Sachverhalte ohne Formeln sowie an der unübersichtlichen und ungegliederten Textgestaltung. Außerdem tragen die vielen Beispiele und Abschweifungen wenig zum Verständnis bei.
Sicherlich hat diese Arbeit von Agricola auf die Wissenschaftsentwicklung kaum Einfluss genommen. Dennoch mag es interessant sein, den Inhalt von Liber X in moderner Sprache knapp darzustellen. Das wird dazu beitragen, das Denken Agricolas verständlicher zu machen. Wie es sich zeigen wird, hat er im Wesentlichen mathematisch richtig gearbeitet.

1. Agricolas Ansatz

Agricola betrachtet Zusammensetzungen aus verschiedenen Komponenten. Eine solche Komponente kann entweder ein *einfaches Mineral* oder ein *Gemisch* sein. Agricola unterscheidet vier einfache Minerale: Metall, Festes Gemenge, Gestein und Erde. Wir kürzen sie im Folgenden mit *m, f, g* und *e* ab.

Der Begriff des Metalls hat sich in den letzten Jahrhunderten gewandelt. So zählt Agricola zu den Metallen u.a. Grünspan ebenso wie Quecksilber. Unter einem Festen Gemenge kann man sich nach Agricola etwa Soda, Schwefel, Erdöl oder eine Koralle vorstellen. Für ihn ist eine Perle ein Gestein ebenso wie Sand, während Kreide bei ihm eine Erde ist.

Bei den Gemischen unterscheidet er sechs Gattungen *m f, m e, g m* (*g* und *m* zu gleichen Teilen), *g m* (*g* überwiegt), *g m* (*m* überwiegt) und *g m f*. Es spielt für das zu betrachtende Problem keine Rolle, um welches Gestein es sich im konkreten Fall handelt. Agricola kennt ja auch mehrere Erden.

Die Trennung in die vier einfachen Minerale erscheint vielleicht als etwas eigenartig. Wenn man sich aber die Gemische ansieht, wird Agricolas Anliegen deutlich. Ihn interessieren vor allem die Metalle. Daher wird sogar bezüglich der Metallanteile in den Gattungen drei bis fünf unterschieden. Wir können uns unter den Gemischen *Erze* vorstellen.

Um bei den Zusammensetzungen die Anzahl der Vertreter aus den einfachen Mineralen bzw. aus den Gemischen unterscheiden zu können, benutzen wir die Symbole *E* und *G*. Wenn wir *3E, 2G* schreiben, soll das bedeuten, dass wir es mit einer Mischung aus fünf Komponenten zu tun haben, nämlich einer aus drei einfachen Mineralen und zwei Gemischen.

Warum z.B. bei Agricola das Gemisch der Gattung sechs *(g m f)* keine Zusammensetzung *(3 E)* aus den einfachen Mineralen *g, m* und *f* ist, soll hier nicht zur Diskussion stehen. Ab wann etwas ‚überwiegt', bleibt für uns ebenfalls unklar. Genau darf man das wohl nicht nehmen, denn in der Natur würde dann ein Gemisch der Gattung drei praktisch niemals auftreten, eine Mischung also, die aus zwei genau gleichen Teilen Metall und Erde besteht.

Nun wollen wir uns der kombinatorischen Aufgabe zuwenden, die Anzahl der möglichen Zusammensetzungen aus *n* verschiedenen Komponenten zu bestimmen.

Zunächst sei an eine grundlegende Formel aus der Kombinatorik erinnert. Dabei geht es um die Auswahl von k Elementen aus einer Menge von n Elementen ohne Wiederholung. Im Fall $n = 4$ und $k = 2$ gibt es die Kombinationen 1-2, 1-3, 1-4, 2-3,.2-4 und 3-4, also sechs Stück. Man bezeichnet die Anzahl der Kombinationen mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, Er wird berechnet gemäß $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)/1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$. Im fließenden Text schreiben wir die Binomialkoeffizienten als (*n, k*).

Bei Agricola würde *n* bis zehn gehen können, weil er die Komponenten aus maximal vier einfachen Mineralen *(4E)* und sechs Gemischen *(6G)* schöpft, die oben aufgeführt sind. Darüber hinaus schränkt Agricola ein: Es soll stets ein Bestandteil vorrangig vertreten sein. Dass er diese Forderung nicht ganz so streng sieht, soll uns hier nicht weiter stören; in AGA X, Seite 272, spricht Agricola von *Plätzen*, was darauf hinweist, dass nicht unbedingt nur ein einziger Bestandteil eine Sonderstellung einnehmen kann. Derartige Inkonsequenzen zeigen, dass Agricolas Ausführungen wohl lediglich als ‚akademische' Bemühung gewertet werden können, in die Welt der Minerale etwas Ordnung zu bringen.

2. Systematische Aufstellung der Zusammensetzungen

Es gibt neun Fälle für die Anzahl *n*, nämlich $n = 2,3,\ldots, 10$. Im folgendem wird zunächst für $n = 2$ die Anzahl aller möglichen Fälle ausführlich ermittelt.

Die Zusammensetzung kann aus

- zwei einfachen Mineralen (Fall *2E,* z.B. Metall und Festes Gemenge),
- einem einfachen Mineral und einem Gemisch (Fall *1E, 1G*, z.B. Gestein und Gemisch der Gattung fünf, also ein Gemisch aus Gestein und überwiegend Metall) oder
- zwei Gemischen (Fall *2G*, z.B. *m f* und *m e*) bestehen.

Hat in der Zusammensetzung ein einfaches Mineral den Vorrang, so kann im Fall *2E* die zweite Komponente nur noch unter den übrigen drei einfachen Mineralen ausgewählt werden. Da für die erste Komponente vier einfache Minerale zur Verfügung stehen, erhält man insgesamt 12 (nämlich $4 \cdot 3$) Möglichkeiten von Zusammensetzungen aus zwei einfachen Mineralen. Wenn im Fall *1E, 1G* ein einfaches Mineral den Vorrang hat, so stehen für die zweite Komponente alle sechs Gattungen der Gemische zur Auswahl, hat dagegen eines der sechs Gemische den Vorrang, kann für die zweite Komponente unter allen vier einfachen Mineralen ausgewählt werden. Beide Male erhält man 24 ($= 4 \cdot 6$) Möglichkeiten. Liegt aber der Fall *2G* vor, kann man analog zum Fall *2E* für die zweite Komponente nur noch unter fünf Gemischen auswählen und kommt auf 30 (also $6 \cdot 5$) Kombinationen. Die gesuchte Gesamtanzahl ist somit $12 + 24 + 24 + 30 = 90$.

Bei Agricola beginnt die Beschreibung dieses Sachverhalts für die Fälle *2G* und *1E, 1G* wie folgt (vgl. AGA X, S. 266--268):

Jetzt will ich von denen sprechen, die aus zwei Gemischen bestehen. Es verbindet sich also entweder mit der ersten Gattung die zweite oder die dritte, vierte, fünfte oder sechste; oder mit der zweiten die erste, dritte, vierte, fünfte oder sechste; oder es vereinigen sich mit der dritten die übrigen oder ähnlich mit der vierten, fünften oder sechsten. Und hier gibt es wieder verschiedene Zusammensetzungen, je nachdem welche Gattung der Gemische in der zusammengesetzten Masse überwiegt und wieviel Arten es davon gibt. Wenn z.B. die erste Gattung überwiegt, so wird, je nachdem, ob es ein schwefelhaltiges Gestein oder / ein bitumenhaltiges oder eines von einer anderen ist, mit dem sich irgendeine von den Formen der zweiten, dritten, vierten, fünften oder sechsten Gattung verbindet, dies die Zusammensetzung verändern. Wenn also in der zusammengesetzten Masse die erste Gattung überwiegt und Spuren davon Arten der zweiten Gattung umfassen, so gibt es eine große Mannigfaltigkeit. Denn unter der zweiten Gattung werden folgende Formen begriffen: Gold-, Silber-, Kupfer-, Blei- und Eisengemisch, und das Silbergemisch zerfällt wiederum in zwei, das Bleigemisch in drei Arten; und außerdem ... Nun will ich von denen sprechen, die aus einem einfachen Mineral und einem Gemisch zusammengesetzt sind. Zuerst: eine Masse Erde umfaßt ein Teilchen irgendeiner Form der ersten Gattung, oder dieses haftet an ihr. Dann wird es, mag es ein schwefel-, bitumenhaltiges oder ein anderes Gestein sein, die Zusammensetzung verändern. Oder eine Masse Erde umfaßt ein Teilchen der zweiten Gattung, oder dieses verbindet sich mit ihr. Ich will die dritte Gattung der Gemische übergehen, beiseite lassen die vierte, die fünfte auch, einmal weil sie ebenso Metalle in sich enthalten und weil ihre Formen mit denselben Wörtern, wie die Formen der zweiten Gattung, benannt werden ...

In Kurzform lautet die Rechnung wie folgt:
Zusammensetzung aus 2 Elementen

2E	:	4	$\times \binom{3}{1}$					=	12
1E, 1G	:	4	$\times \binom{6}{1}$	$+\ 6 \times$	$\binom{4}{1}$		= 24 + 24	=	48
2G	:			$6 \times$		$\times \binom{5}{1}$		=	30
							$\sum$	=	90

Es gibt also 90 Fälle. In diesem Beispiel sind die Binomialkoeffizienten immer gleich den oberen Zahlen, also (3,1) = 3 usw.

Ohne weitere Erklärungen führen wir jetzt die Rechnungen für n = 3 und 4 durch, erklären sie für n = 5 und zeigen dann die restlichen Rechnungen.

Zusammensetzung aus 3 Elementen

3E	:	$4 \times \binom{3}{2}$					=	12
2E, 1G	:	$4 \times \binom{3}{1} \times \binom{6}{1} + 6 \times \binom{4}{2}$	=	72	+	36	=	108
1E, 2G	:	$4 \times \binom{6}{2} + 6 \times \binom{4}{1} \times \binom{5}{1}$	=	60	+	120	=	180
3G	:	$6 \times \binom{5}{2}$					=	60
						$\sum$	=	360

Zusammensetzung aus 4 Elementen

4E	:	$4 \times \binom{3}{3}$					=	4
3E, 1G	:	$4 \times \binom{3}{2} \times \binom{6}{1} + 6 \times \binom{4}{3}$	=	72	+	24	=	96
2E, 2G	:	$4 \times \binom{3}{1} \times \binom{6}{2} + 6 \times \binom{4}{2} \binom{5}{1}$	=	180	+	180	=	360
1E, 3G	:	$4 \times \binom{6}{3} + 6 \times \binom{4}{1} \times \binom{5}{2}$	=	80	+	240	=	320
4G	:	$6 \times \binom{5}{3}$					=	60
						$\sum$	=	840

Zusammensetzung aus 5 Elementen

4E, 1G	:	$4 \times \binom{3}{3} \times \binom{6}{1} + 6 \times \binom{4}{4}$	=	24	+	6	=	30
3E, 2G	:	$4 \times \binom{3}{2} \times \binom{6}{2} + 6 \times \binom{4}{3} \times \binom{5}{1}$	=	180	+	120	=	300
2E, 3G	:	$4 \times \binom{3}{1} \times \binom{6}{3} + 6 \times \binom{4}{2} \times \binom{5}{2}$	=	240	+	360	=	600
1E, 4G	:	$4 \times \binom{6}{4} + 6 \times \binom{4}{1} \times \binom{5}{3}$	=	60	+	240	=	300
5G	:	$6 \times \binom{5}{4}$					=	30
						$\sum$	=	1260

Zum Verständnis der Rechnungen erklären wir hier die Zeile mit *3E, 2G* bei $n = 5$:

In diesem Fall von fünf Komponenten liegt eine Zusammensetzung aus drei einfachen Mineralen und zwei Gemischen vor, deshalb gibt es zwei Summanden. Den Vorrang in der

Zusammensetzung könnte erstens eines der sechs insgesamt existierenden Gemische haben, von denen hier aber nur jeweils zwei auftreten. Das führt zu dem Faktor 6 des zweiten Summanden. Das zweite in der Zusammensetzung vorhandene Gemisch kann nun nur noch aus den verbleibenden fünf Gemischen ausgewählt werden. Das führt zu dem Faktor, der mit dem Symbol (5,1) bezeichnet wurde. Die drei einfachen Minerale können beliebig aus den insgesamt vier existierenden ausgewählt werden, wofür es (4,3) Möglichkeiten gibt. Nach den Regeln der Kombinatorik sind die gefundenen Einzelanzahlen zu multiplizieren, um die Gesamtzahl aller Fälle zu erhalten, in denen ein Gemisch den Vorrang hat. Damit ist der zweite Summand erklärt.

Der erste Summand ergibt sich auf Grund folgender Überlegung. Jetzt hat eines der vier einfachen Minerale den Vorrang. Dann sind nur noch je zwei einfache Minerale und Gemische frei wählbar, wofür es (3,2) bzw. (6,2) Möglichkeiten gibt. Multiplikation liefert dann auch den ersten Summanden.

Zusammensetzung aus 6 Elementen

4E, 2G	:	$4 \times \binom{3}{3} \times \binom{6}{2} + 6 \times \binom{4}{4} \times \binom{5}{1} = 60 + 30 = 90$
3E, 3G	:	$4 \times \binom{3}{2} \times \binom{6}{3} + 6 \times \binom{4}{3} \times \binom{5}{2} = 240 + 240 = 480$
2E, 4G	:	$4 \times \binom{3}{1} \times \binom{6}{4} + 6 \times \binom{4}{2} \times \binom{5}{3} = 180 + 360 = 540$
1E, 5G	:	$4 \times \binom{6}{5} + 6 \times \binom{4}{1} \times \binom{5}{4} = 24 + 120 = 144$
6G	:	$6 \times \binom{5}{5} = 6$
		$\sum = 1260$

Zusammensetzung aus 7 Elementen

4E, 3G	:	$4 \times \binom{3}{3} \times \binom{6}{3} + 6 \times \binom{4}{4} \times \binom{5}{2} = 80 + 60 = 140$
3E, 4G	:	$4 \times \binom{3}{2} \times \binom{6}{4} + 6 \times \binom{4}{3} \times \binom{5}{3} = 180 + 240 = 420$
2E, 5G	:	$4 \times \binom{3}{1} \times \binom{6}{5} + 6 \times \binom{4}{2} \times \binom{5}{4} = 72 + 180 = 252$
1E, 6G	:	$4 \times \binom{6}{6} + 6 \times \binom{4}{1} \times \binom{5}{5} = 4 + 24 = 28$
		$\sum = 840$

Zusammensetzung aus 8 Elementen

4E, 4G	:	$4 \times \binom{3}{3} \times \binom{6}{4} + 6 \times \binom{4}{4} \times \binom{5}{3}$	=	60	+	60	=	120
3E, 5G	:	$4 \times \binom{3}{2} \times \binom{6}{5} + 6 \times \binom{4}{3} \times \binom{5}{4}$	=	72	+	120	=	192
2E, 6G	:	$4 \times \binom{3}{1} \times \binom{6}{6} + 6 \times \binom{4}{2} \times \binom{5}{5}$	=	12	+	36	=	48
						$\sum$	=	360

Zusammensetzung aus 9 Elementen

4E 5G	:	$4 \times \binom{3}{3} \times \binom{6}{5} + 6 \times \binom{4}{4} \times \binom{5}{4}$	=	24	+	30	=	54
3E, 6G	:	$4 \times \binom{3}{1} \times \binom{6}{6} + 6 \times \binom{4}{3} \times \binom{5}{5}$	=	12	+	24	=	36
						$\sum$	=	90

Zusammensetzung aus 10 Elementen

4E, 6G	:	$4 \times \binom{6}{6} + 6 \times \binom{4}{4}$	=	4	+	6	=	10

Schlussbetrachtungen

Wie viele Texte Agricolas ist Buch X nicht in Absätze gegliedert, was das Lesen erschwert. Wenn man seinen Text und unseren vergleicht, erkennt man vielleicht, welchen Fortschritt seitdem Wissenschaftssprache und Typographie gemacht haben. Deutlich wird auch die Rolle der Mathematik als Kunst des Einfachmachens.

Wir sind der Meinung, dass sich Agricola in einigen Fällen geirrt hat. Im Fall *3E, 1G* vergaß Agricola (AGA X, S. 271) 24 Einzelfälle und zwar diejenigen, bei denen ein *G* überwiegt. Ebenso kommt Agricola im Fall *2E, 2G* (AGA X, S. 270) bei den *G* nur auf die Zahl 144 anstelle von 180, weil er die Kombinationen 4--5, 4--6 und 5--6 unbeachtet ließ.

Im Fall *1E, 3G* liegt in AGA X, S. 271, ein Übersetzungsfehler vor, den wir aufgedeckt haben. Dort stehen die Zahlen 60, 60 und 260, während es im lateinischen Original richtig 40, 40 und 240 heißt.

Den Fall *1E, 5G* ließ Agricola (S. 272) ganz aus. Dennoch spricht er bei Zusammensetzungen aus sechs Komponenten sogar von sechs Fällen, wo es doch nur fünf (bei uns erkennt man das an den fünf Zeilen für diesen Fall) geben kann unter den gemachten Voraussetzungen.

Zusammensetzungen aus mehr als sechs Komponenten hat Agricola überhaupt nicht mehr betrachtet. Seine diesbezüglichen Untersuchungen brechen ziemlich unvermittelt ab. Vielleicht hatte er Bedenken vor uferlosen Rechnungen. (Wie oben gezeigt wurde, nimmt aber die Zahl der Fälle mit wachsendem *n* ab.) Dementsprechend baut Agricola auf seine erhaltenen Zahlen keine weiteren Betrachtungen mehr auf, so, als wollte er mit ihnen lediglich anschaulich machen, wie viele Kombinationen bereits bei einer relativ kleinen Anzahl von Elementen zu erwarten sind. Und vielleicht hat er dazu seine Bausteine in wenige und überschaubare Klassen einteilen wollen.

Bei einer Beurteilung von Agricolas Werk sollte man sich den damaligen Wissensstand vor Augen halten. Der Leser möge sich bitte vorstellen, welche Mühe es macht, einen komplizierten Sachverhalt mit vielen Fallunterscheidungen ausschließlich verbal deutlich zu machen. Auch wenn Agricola ein Zeitgenosse von Adam Ries war und er von dessen Lehren profitieren konnte, waren die obigen, für uns heute elementaren (aber verwickelten), Rechnungen für ihn und seine Zeitgenossen sicherlich ziemlich kompliziert.

Literatur

Agricola, G: De natura fossilium libri X. Die Minerale. Übersetzt und bearbeitet von G. Fraustadt und H. Prescher. In: Gedenkausgabe des Staatlichen Museums für Mineralogie und Geologie zu Dresden. Bd. IV, Berlin 1958.