Aufgabe goe-sal-3

Gebiet	Räumliche Geometrie
Schwierigkeit	3
Status	gestellt 2011

Aufgabenstellung:

Gegeben sei ein Rhombus $ABCD$ mit langer Diagonale $\overline{B}D$ derart, dass ein Rhombendreißigflächner existiert, dessen dreißig Seitenflächen kongruent zu $ABCD$ sind, welcher die Eigenschaft hat, dass die langen Diagonalen seiner Seitenflächen ein regelmäßiges Pentagondodekaeder bilden.

Konstruieren Sie unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal (ohne Längenmarkierung) ein Drachenviereck $EFGH$ mit Symmetrieachse EG derart, dass ein Drachenvierecksechzigflächner existiert, dessen sämtliche Seitenflächen kongruent zu $EFGH$ sind, welcher die Eigenschaft hat, dass die Symmetrieachsen der Seitenflächen den oben beschriebenen Rhombendreißigflächner bilden.

Lösung:

Hier nur die wesentlichen Details.

Da die kurzen Diagonalen der Seitenflächen des Rhombendreißigflächners deren langen Diagonalen senkrecht halbieren, bilden sie ein Polyeder in Dualitätslage zum Pentagondodekaeder, also ein regelmäßiges Ikosaeder. Eine Seitenfläche dieses Ikosaeders sei $\triangle XYZ$, W sei der gemeinsame Eckpunkt der drei Rhomben des Rhombendreißigflächners mit den kurzen Diagonalen $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$ und $\overline{YZ}$. Mit M bezeichnen wir den Mittelpunkt von $\overline{XY}$, mit V den zweiten gemeinsamen Eckpunkt der beiden Drachenvierecke des Drachenvierecksechzigflächners mit den Symmetrieachsen XW und YW. Aus Symmetriegründen ist $\overline{VM}$ senkrecht zu dem Rhombus mit kurzer Diagonale $\overline{XY}$, also senkrecht zur Ebene $\varepsilon(XYW)$. Seien V' und W' die Projektionen von V und W auf die Ebene $\varepsilon(XYZ)$. Dann ist W' der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks $\triangle XYZ$ und $V'W'$ die Mittelsenkrechte von $\overline{XY}$ in Ebene $\varepsilon(XYZ)$.

Ebenfalls aus Symmetriegründen schneidet Ebene $\varepsilon(V)WX$ die Ebene $\varepsilon(XYZ)$ in der Außenwinkelhalbierenden von $\triangle XYZ$ bei X und damit $V'W'$ im Schnittpunkt U dieser Außenwinkelhalbierenden mit dieser Gerade $V'W'$.

Da die Ebene $\varepsilon(VMW)$ aus Symmetriegründen die Mittelsenkrechte Ebene zu $\overline{XY}$ ist, sind sowohl die Dreiecke VMX als auch WMX rechtwinklig. Die Punkte X^* und X^{**} mögen sich durch Drehung von X um WM bzw. MV jeweils um $90°$ im Uhrzeigersinn (bzgl. der angegebenen Orientierung als Blickrichtung) ergeben und liegen daher auf den Strahlen von M durch V bzw. W.

Daraus ergibt sich folgende Konstruktion[1]

- Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck $\triangle X_1Y_1W_1$ mit Kantenlänge $|AC|$, dessen Schwerpunkt W_1', den Mittelpunkt M_1 von Strecke $\overline{X_1Y_1}$ und den Schnittpunkt U_1 von M_1W_1' mit der Außenwinkelhalbierenden von $\triangle X_1Y_1W_1$ in X_1. Bemerkung: U_1 ist Spiegelbild von Z_1 bei Punktspiegelung an M_1.

- Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle Z_2W_2W_2'$ mit rechtem Winkel bei W_2', $|W_2'Z_2| = |W_1'Z_1|$ und $|W_2Z_2| = |AB|$. Konstruiere M_2 und U_2 auf dem Strahl von Z_2 durch W_2' mit $|M_2Z_2| = |M_1Z_1|$ bzw. $|U_2Z_2| = |U_1Z_1|$. Konstruiere den Schnittpunkt V_2 der Senkrechten zu Gerade M_2W_2 durch M_2 mit der Gerade U_2W_2.

- Konstruiere X_2^* und X_2^{**} auf den Strahlen von M_2 durch V_2 bzw. W_2 mit $|X_3W_2| = |X_4W_2| = |X_1M_1|$.

- Konstruiere ein Dreieck $\triangle EFG$ mit $|EF| = |V_2W_2|\,, |EG| = |X_2^*W_2|$ und $|FG| = |X_2^* * V_2|$. Konstruiere H durch Geradenspiegelung von F an EG.

Die Konstruktion ist schrittweise eindeutig ausführbar und nach der Vorbetrachtung korrekt.

[1]Index 1: Konstruktion kongruent zu Schnittbild mit Ebene $\varepsilon(XYZ)$;
Index 2: Konstruktion kongruent zu Schnittbild mit Ebene $\varepsilon(VMW)$.
Die Bezeichnungen sind intuitiv entsprechend gewählt.