Thema

Toughness von Knotenmengen und lokale Faktoren in Graphen

D I P L O M A R B E I T

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

eingereicht von **Daniel Dressler**
geb. am **02. Januar 1981** in **Speyer**

Betreuer **Prof. Dr. C. Helmberg**

Chemnitz, den **12. Oktober 2006**

Aufgabenstellung

In [5] führte V. Chvátal die Toughness als Graphenparameter ein. Ein Graph heißt *t-tough*, wenn er nach Löschen einer beliebigen Teilmenge T seiner Knoten in höchstens $t|T|$ Komponenten zerfällt. Die Toughness eines Graphen ist nun das maximale t, für das ein Graph t-tough ist. Dieser Graphenparameter wurde zunächst im Zusammenhang mit der Existenz von Hamiltonkreisen betrachtet. So ist klar, dass ein Graph mit Toughness kleiner als 1 keinen Hamiltonkreis hat und es wird vermutet, dass hinreichend große Toughness die Existenz eines Hamiltonkreises sichert.

Neben Hamiltonkreisen sind aber auch Kreise durch vorgeschriebene Knoten von Interesse (vgl.[7, 12, 13, 14, 19, 20]). Es ist daher natürlich, die Toughness eines Graphen zu einer Toughness von Knotenmengen in einem Graphen zu erweitern: Dazu betrachten wir eine Teilmenge H der Knoten des Graphen G und sagen, H ist *t-tough* in G, wenn nach Löschen einer beliebigen Teilmenge T der Knoten von G die Zahl der Komponenten des Ergebnisses, welche Knoten aus H enthalten, höchstens $t|T|$ ist. Die Toughness von H in G ist dann das maximale t, für das H noch t-tough in G ist. Hat der Graph G einen H überdeckenden Kreis, so ist die Toughness von H in G offenbar mindestens 1. Desweiteren ist die Toughness von G offenbar gerade die Toughness von $V(G)$ in G.

Neben den Untersuchungen zum Zusammenhang zwischen Toughness und Hamiltonkreisen wurde auch der Zusammenhang der Toughness mit der Existenz von k-Faktoren, also k-regulären Untergraphen, untersucht (vgl. [8]).

Als H-lokalen k-Faktor eines Graphen G bezeichnen wir ein System kreuzungsfreier H-Wege in G derart, dass jeder Knoten aus H in genau k dieser Wege enthalten ist. Dieser Begriff geht für $H = V(G)$ in den Begriff des k-Faktors von G über.

Thema der Diplomarbeit ist die Übertragung von Eigenschaften der Toughness eines Graphen auf die Toughness einer Knotenmenge in einem Graphen. Insbesondere soll nach einem Zusammenhang zwischen der Toughness von H in G und der Existenz eines H-lokalen k-Faktors gesucht werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Verwendete Notation

Die verwendete Notation orientiert sich in großen Teilen an der in Diestel, "Graphentheorie" [6]. Einem Symbol wird mit dem Definitionszeichen := ein Wert zugewiesen. Eine Ausnahme von der Diestelschen Notation zu Beginn: $\mathbb{N}$ steht für die Menge der ganzen Zahlen ≥ 1, also ohne die Null. Falls Null enthalten sein soll, so wird $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ verwendet. Die Menge der reellen Zahlen sei $\mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$.

Für eine Funktion $f : D \to W$, $W \subseteq \mathbb{R}$, und endliches $X \subseteq D$ sei $f(X) := \sum_{x \in X} f(x)$, falls $f(X)$ nicht schon anders definiert ist.

Es werden nur schlichte, endliche Graphen betrachtet. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Kante zwischen Knoten $x \in V$ und $y \in V$ wird als $xy \in E$ geschrieben. Für $H \subseteq V$ sei $G[H]$ der von H (knoten-)induzierte Teilgraph, also $G[H] := (H, \{xy \in E : x \in H, y \in H\})$. Es sei $G - H := G[V \setminus H]$. Für $F \subseteq E$ sei $G - F := (V, E \setminus F)$. Ein Graph $G' = (V', E')$ ist ein Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt. In diesem Fall wird $G' \subseteq G$ geschrieben. Bei Bedarf wird die Knotenmenge eines Graphen G' auch mit $\mathrm{V}(G')$ und die Kantenmenge mit $\mathrm{E}(G')$ bezeichnet.

Zu $A, B \subseteq V$ sei $\mathrm{E}(A, B) := \{xy \in E : x \in A \wedge y \in B\}$. A und B müssen nicht disjunkt sein. Insbesondere sei $\mathrm{E}(A) := \mathrm{E}(A, A)$. Außerdem wird ein einzelner Knoten $x \in V$ in diesem Zusammenhang auch als Menge $\{x\}$ verwendet. Mit $\mathrm{N}(x)$ sei die Menge der Nachbarn von $x \in V$ gemeint, $\mathrm{N}(x) := \{y : xy \in E\}$, und $\mathrm{N}(A) := \bigcup_{x \in A} \mathrm{N}(x)$. Der Grad eines Knotens x sei $\mathrm{d}(x) := |\mathrm{N}(x)|$. Ein Knoten $x \in V$ mit $\mathrm{d}(x) = 0$ heißt isoliert. Der Rand einer Knotenmenge A sei $\mathrm{bd}(A) := \{x \in A : \mathrm{N}(x) \setminus A \neq \emptyset\}$. Dies weicht von dem verwendeten Symbol ∂ in [6] ab, erhöht aber nach Meinung des Autors die Lesbarkeit dieser Arbeit. Komplementär zu $\mathrm{bd}(A)$ ist $\mathrm{in}(A) := A \setminus \mathrm{bd}(A)$ das Innere von A. Falls sich es nicht um "G" handelt, wird der Graph, auf den sich $\mathrm{E}, \mathrm{N}, \mathrm{bd}$ usw. beziehen, als Index angegeben, z.B. $\mathrm{N}_{G-X}(x)$.

Ein Weg entlang der Knoten $x_0, x_1, \ldots, x_l$ wird durch $x_0 x_1 \ldots x_l$ beschrieben und ist ungerichtet zu verstehen. Die Länge dieses Weges ist l. In einem Weg komme kein Knoten doppelt vor. Zwei Wege heißen intern disjunkt (oder auch kreuzungsfrei), wenn ein gemeinsamer Knoten dieser Wege in beiden ein Endknoten ist. Für $H \subseteq V$ ist ein H-Weg ein Weg mit Länge ≥ 1, dessen (verschiedene) Endknoten in H sind, aber dessen andere Knoten alle nicht in H sind.

Ein Kreis $x_1 x_2 \ldots x_l x_1$ der Länge l besteht aus einem Weg $x_1 x_2 \ldots x_l$ und einer Kante $x_l x_1 \in E$, die nicht in diesem Weg enthalten ist. Damit hat ein Kreis immer Länge ≥ 3.

Eine Knotenmenge $H \subseteq V$ heißt unabhängig, falls $\mathrm{E}(H) = \emptyset$, und vollständig, falls $\mathrm{E}(H) = \{xy : x \in H, y \in H, x \neq y\}$ ist. Der Graph G selbst heißt unabhängig beziehungsweise vollständig, falls dies für V gilt. Es sei $\alpha(G)$

die Unabhängigkeitszahl von G, also die Kardinalität einer größten unabhängigen Menge in G. Schließlich sei $\chi(G)$ die chromatische Zahl von G, d.h. die minimale Anzahl von unabhängigen Mengen, deren Vereinigung V ist.

Komponenten eines Graphen werden als induzierte Teilgraphen aufgefasst, enthalten also sowohl Knoten als auch Kanten. Die Menge der Komponenten von G sei $\mathcal{C}(G)$ (nicht $\mathcal{C}_G$ wie in [6]). Um all zu verschachtelte Notation zu vermeiden, wird für eine Komponente $C \in \mathcal{C}(G)$ aber statt $\mathrm{V}(C)$ meistens einfach C geschrieben. Die Menge der H-Komponenten, also Komponenten $C \in \mathcal{C}(G)$ mit $C \cap H \neq \emptyset$, sei $\mathcal{C}^H(G)$. Die Anzahl der Komponenten eines Graphen sei $\mathrm{c}(G)$ bzw. $\mathrm{c}^H(G)$, wenn nur H-Komponenten gezählt werden.

1.2 Literaturüberblick

Die Toughness (deutsch: "Robustheit" oder "Zähigkeit") einer Knotenmenge H in einem Graphen beschreibt quantitativ, wie schwer es ist, durch das Löschen von beliebigen Knoten die Menge H zu trennen. Dabei ist die Anzahl der H-Komponenten nach dem Löschen das Maß dafür, wie gut H getrennt wurde.

Definition 1 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Sei $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$. Falls $\forall\ Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$*

$$t\mathrm{c}^H(G - Z) \leq |Z|$$

gilt, so ist H t-tough in G. *Falls $H = V$ ist, so wird der Graph G als t-tough bezeichnet.*

Definition 2 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Die* Toughness $\tau_G(H)$ von H in G *ist definiert als*

$$\tau_G(H) := \sup\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, H \text{ ist } t\text{−tough in } G\}$$

und sei $+\infty$, falls H für jedes $t \geq 0$ t-tough in G ist. Falls es klar ist, auf welchen Graphen sich $\tau_G(H)$ bezieht, wird der Index weggelassen. Im Falle $H = V$ wird auch $\tau(G)$ statt $\tau_G(V)$ geschrieben.

Die Definition der Toughness eines Graphen, also der Fall $H = V$, geht auf Chvátal [5] zurück. Man sieht leicht ein, dass ein Kreis 1-tough ist. Ein Graph G, der einen Hamilton-Kreis (einen Kreis durch alle Knoten von G) enthält, ist deshalb mindestens 1-tough. Chvátal stellte die Vermutung auf, dass es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass jeder t_0-toughe Graph einen Hamilton-Kreis enthält. Diese Vermutung ist weiterhin offen, aber das Zusammenspiel von Toughness und Hamilton-Kreisen oder allgemeiner großen Kreisen wurde intensiv studiert. Einen Überblick bieten [1] und [2]. Aus diesem Themenkreis soll auch [14] erwähnt sein, da darin die Toughness einer Knotenmenge H definiert wird. Insgesamt ist die Literatur zur Toughness von Knotenmengen H anstatt ganz V aber noch sehr dünn gesät. Deswegen folgen erst einmal einige wichtige Resultate zur Toughness von Graphen.

Weg von Kreisen weist die Interpretation eines Hamilton-Kreises als (zusammenhängender) 2-Faktor. Schnell die Definition eines Faktors: Für eine auf der Knotenmenge definierte Funktion f mit Werten in $\mathbb{N}$ ist ein f-Faktor in einem Graphen $G = (V, E)$ ein Teilgraph $G' = (V, E')$ auf der selben Knotenmenge, so dass für jeden Knoten x gilt $d_{G'}(x) = f(x)$. Ein k-Faktor, $k \in \mathbb{N}$, ist ein f-Faktor mit $f \equiv k$. Chvátal vermutete 1973, dass jeder k-toughe Graph, $k \in \mathbb{N}$, unter trivialen Zusatzbedingungen einen k-Faktor enthält. Dies bewiesen Enomoto, Jackson, Katerinis und Saito [8] ein Jahrzehnt später:

Satz 1 (Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito) *Sei $G = (V, E)$ ein nicht vollständiger Graph. Sei G t-tough. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $t \geq k$ und $k|V|$ gerade. Dann enthält G einen k-Faktor.*

Außerdem zeigten sie, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, einen $(k-\varepsilon)$-toughen Graphen mit $k|V|$ gerade gibt, der keinen k-Faktor enthält. In diesem Sinne ist die Aussage also scharf.

Insbesondere enthält also ein 2-tougher Graph einen 2-Faktor. Allerdings können auch Graphen konstruiert werden, die $(9/4 - \varepsilon)$-tough sind, aber keinen zusammenhängenden 2-Faktor, d. h. keinen Hamilton-Kreis, enthalten [3]. Man kann also nicht hoffen, aus diesem Satz die andere Vermutung einfach abzuleiten.

Enomoto fand stärkere Versionen von Satz 1, die leicht abgewandelte Definitionen von t-tough nutzen. So kann die Bedingung in Definition 1 auf $|Z| \geq t\mathrm{c}(G - Z) - \frac{7}{8}|Z|$ abgeschwächt werden [9]. Falls $|V| \geq k^2 - 1$ gilt, ist sogar $|Z| \geq t\mathrm{c}(G - Z) - |Z|$ ausreichend, wie Enomoto [10] für $k \leq 2$ und später Enomoto und Hagita für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ zeigten [11].

Wieder im Zusammenhang mit Hamiltonkreisen definierte Katona "Edge-Toughness" [17], welche es erlaubt, zusätzlich zu Knoten $X \subseteq V$ gezielt Kanten $Y \subseteq \mathrm{E}(G - X)$ zu löschen, um den Graphen zu trennen. Dabei soll jede Komponente C von $G' := (V \setminus X, Y)$ alle Kanten von $G[C]$ enthalten, in gewisser Weise also kanteninduziert sein. Dann ist ein zusammenhängender Graph G t-edge-tough, wenn für alle solche X und Y und entsprechendes G' gilt

$$t\mathrm{c}\left(G - X - Y - \bigcup_{C \in \mathcal{C}(G')} \mathrm{in}_{G-X}(C)\right) \leq |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}(G')} \left\lfloor \frac{|\mathrm{bd}_{G-X}(C)|}{2} \right\rfloor.$$

Die rechte Seite dieses Terms ist dabei die sogenannte Permeabilität von X und Y (vgl. z.B. [6], S. 75f.). Diese ist eine obere Schranke für die Anzahl gleichzeitig in G liegender intern disjunkter Wege, deren Enden weder in X noch in den an Y beteiligten Knoten liegen, aber einen Knoten aus X oder eine Kante aus Y nutzen. (Diese Wege müssen also von X und Y "durchgelassen" werden, deswegen der Name Permeabilität.)

Wenn man die Definition von t-edge-tough nur für $Y = \emptyset$ betrachtet, ergibt sich direkt die Definition für t-tough. Somit ist ein t-edge-tougher Graph auch t-tough. Umgekehrt ist ein $2t$-tougher Graph t-edge-tough. Es gilt, dass ein hamiltonscher Graph 1-edge-tough ist. Katona vermutete [18], dass für $k \in \mathbb{N}$ ein k-edge-tougher Graph einen $2k$-Faktor enthält. Dies gilt zwar für $k = 1$, im Allgemeinen stellte es sich aber als falsch heraus [15].

Leider verzichtete Katona ursprünglich darauf, diese Definition auf Teilmengen $H \subseteq V$ zu erweitern. Dabei besagt ein grundlegendes Resultat von Mader [21], gemeinhin "der Satz von Mader", dass die maximale Anzahl eines Systems intern disjunkter H-Wege exakt durch das Minimum der Permeabilitäten aller solcher $X \subseteq V \setminus H$ und $Y \subseteq \mathrm{E}(G - X - H)$ bestimmt wird, wobei noch eventuelle Kanten in $\mathrm{E}(H)$ berücksichtigt werden müssen. In einer inzwischen recht verbreiteten Schreibweise lautet dieser Satz so:

Satz 2 (Mader) *Sei $G = (V, E)$ und $H \subseteq V$. Die maximale Kardinalität eines Systems intern disjunkter H-Wege ist*

$$|\mathrm{E}(H)| + \min \left\{ |X| + \sum_{C \in \mathcal{C}(G')} \left\lfloor \frac{|\mathrm{bd}_{G-X}(C)|}{2} \right\rfloor \right\},$$

wobei das Minimum über alle $X \subseteq V \setminus H$, $Y \subseteq \mathrm{E}(G - X - H)$ gebildet wird, so dass in $G' := (V \setminus X, Y)$ für jede Komponente $C \in \mathcal{C}(G')$ gilt $\mathrm{E}(G[C]) = \mathrm{E}(G'[C])$.

Die Definition einer lokalen und stärkeren Variante der Edge-Toughness holten Göring und Katona in [15] nach. Sie definierten die topologische Toughness einer Knotenmenge H wie folgt: H ist topologisch t-tough (kurz: t-topo-tough) in G, wenn es für jedes $H' \subseteq H$, $|H'| \geq 2$, in G ein Wegesystem mit mindestens $t|H'|$ intern disjunkten H'-Wegen gibt. Diese Definition zählt vorhandene Wege anstatt getrennter Knoten und dreht damit scheinbar das Toughness-Konzept um. Andererseits sei wieder an Satz 2 erinnert, dass ein geeigneter Trenner die Anzahl der Wege genau bestimmen kann. Insofern ist diese Definition tatsächlich nur eine hübschere Schreibweise für eine lokale Edge-Toughness, die diese Toughness auch von allen Teilmengen fordert.

Falls $\mathrm{V}(G)$ t-topo-tough ist, so ist G auch t-edge-tough und damit t-tough. Göring und Katona gaben für $t \in \mathbb{N}$ aber Graphen mit Toughness $t^2 - \frac{1}{2}$ an, deren topologische Toughness nur $t - \frac{3}{2}$ ist. Allerdings zeigten sie auch, dass jede $(4t^2 + 2t)$-toughe Knotenmenge H mit $|H| \geq (t + \frac{3}{2})^2/2$ dann t-topo-tough ist. Führt man in dem zugehörigen Beweis einige Größen bis zum Ende mit, ergibt sich:

Satz 3 (Göring, Katona) *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. H sei t-tough in G. H ist t'-topo-tough, falls $|H| \geq (t' + \frac{3}{2})^2/2$, $t \geq 2t' \min\{\chi(G[H]), 2t' + 1\}$ und $t \geq (t' + \frac{1}{2})^2 + 1$ ist.*

Die wohl wesentliche Eigenschaft der topologischen Toughness benötigt die Definition eines H-lokalen k- bzw. $\hat{f}$-Faktors. Für eine Funktion $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$ heißt ein System $\mathcal{W}$ von intern disjunkten H-Wegen ein H-lokaler $\hat{f}$-Faktor, falls darin jeder Knoten $x \in H$ in genau $\hat{f}(x)$ Wegen enthalten ist. Ein H-lokaler k-Faktor ist ein H-lokaler $\hat{f}$-Faktor für $\hat{f} \equiv k$. Für $H = V$ ist diese Definition äquivalent zu der eines normalen $\hat{f}$-Faktors, da ein V-Weg nur zwei Knoten enthalten darf, also einer Kante entspricht.

Göring und Katona zeigten, dass eine Knotenmenge $H \subseteq V$ für $k \in \mathbb{N}$ genau dann k-topo-tough ist, wenn für jede Teilmenge $H' \subseteq H$ mit $|H'| \geq 2$ ein H'-lokaler $2k$-Faktor in G existiert. Somit ergibt sich sofort folgender Zusammenhang zwischen der Toughness von H und der Existenz eines H-lokalen k-Faktors:

Korollar 1 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$ sei t-tough. Sei $k \in \mathbb{N}$ gerade. Falls $|H| \geq (k+3)^2/8$, $t \geq k \min\{\chi(G[H]), k+1\}$ und $t \geq (k+1)^2/4+1$ gilt, dann existiert ein H-lokaler k-Faktor in G.*

Dies ist womöglich das erste Resultat in der Literatur, das ausdrücklich H-lokale k-Faktoren aus der Toughness von H folgert, und sich nicht auf $k \leq 2$ beschränkt.

Man kann H-lokale $\hat{f}$-Faktoren mit f-Faktoren für $f|_H \equiv \hat{f}$ und$f|_{V \setminus H} \equiv 2$ vergleichen. Diese Definitionen sind nicht äquivalent, zeigen aber viele gemeinsame Eigenschaften. In diesem Zusammenhang verdient ein weiteres Ergebnis zur Toughness, wenn auch der eines Graphen, noch Aufmerksamkeit. Das folgende Resultat von Katerinis [16] verallgemeinert Satz 1 von k-Faktoren auf f-Faktoren.

Satz 4 (Katerinis) *Sei $G = (V, E)$ ein t-tougher Graph. Sei $f : V \to \mathbb{N}$ mit $f(V) \equiv 0 \pmod 2$. Seien $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$, $b \leq |V| - 1$, so dass $\forall x \in V$ gelte $a \leq f(x) \leq b$.*

Wenn gilt

$$t \geq \begin{cases} \frac{(b+a)^2+2(b-a)}{4a} & \text{falls } a \equiv b \pmod 2 \\ \\ \frac{(b+a)^2+2(b-a)+1}{4a} & \text{falls } a \not\equiv b \pmod 2, \end{cases}$$

dann enthält G einen f-Faktor.

Setzt man hier $b = k$ und $a = 2$ ein, erhält man $t \geq k(k+6)/8$ (bzw. $+1/8$), und dies kann auch als Richtlinie für ein Kriterium für H-lokale k-Faktoren gelten.

1.3 Ergebnisse dieser Arbeit

Das Ziel dieser Diplomarbeit war es, den Zusammenhang zwischen lokaler Toughness und lokalen k-Faktoren weiter zu untersuchen und womöglich ein ähnliches Resultat wie Satz 1 zu zeigen. Das Hauptergebnis ist der folgende Satz.

Satz 5 *Sei $G = (V, E)$ und $H \subseteq V$ sei t-tough in G. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $k \leq |H| - 1$. Falls*

$$t \geq k \text{ und } t \geq k \min\{\chi(G[H]), k-1\} \qquad \textbf{(A)}$$

oder

$$t \geq 2k \text{ und } t \geq \frac{k}{2} \min\{\chi(G[H]), k-1\} \qquad \textbf{(B)}$$

ist, dann besitzt G einen H-lokalen k-Faktor mit Defekt höchstens 1.

Dabei bedeutet Defekt höchstens 1, dass im Fall $k|H|$ ungerade alle bis auf einen Knoten in H an k H-Wegen und ein H-Knoten an $k-1$ H-Wegen beteiligt sind. Im Fall $k|H|$ gerade folgt aus diesem Satz immer die Existenz eines H-lokalen k-Faktors.

Dieses Ergebnis ist eine recht deutliche Verbesserung von Korollar 1. Im Vergleich zu einer hypothetischen Verallgemeinerung von Satz 1 wie z. B. "H ist k-tough, daraus folgt die Existenz eines H-lokalen k-Faktors", erscheint Satz 5 aber recht starke Anforderungen zu stellen. Es werden deswegen in Abschnitt 4.2.3 Beispiele demonstriert, die zeigen, dass ein solcher linearer Zusammenhang unmöglich ist, selbst wenn man zusätzlich $k \leq \varepsilon|H|$ für beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, fordert. Außerdem wird in Abschnitt 4.2.3 gezeigt, dass die Schranke $t \geq \frac{k}{2}\chi(G[H])$ in einem gewissen Sinn scharf ist:

Satz 6 *Für alle $c \in \mathbb{N}$ mit $c \geq 5$ und für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, existiert ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Menge $H \subseteq V$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq |H| - 1$, so dass $c = \chi(G[H])$ und H t-tough in G ist mit $t \geq 2k$ und $t \geq \frac{k}{2}\chi(G[H])(1-\varepsilon)$, aber G keinen H-lokalen k-Faktor mit Defekt höchstens 1 besitzt.*

Zur Artenvielfalt der Toughness möchte auch der Autor beitragen und schlägt mit der Simple-Edge-Toughness eine Variante der lokalen Toughness vor, die auf einfache Weise diese Beschränkungen umgeht und Satz 1 wie erhofft verallgemeinert (s. Abschnitt 4.2.4).

Da die vorliegende Arbeit an mehreren Stellen an existierende Resultate anknüpft, soll nun überblicksweise aufgeführt werden, welchen Anteil der Autor an den präsentierten Aussagen hat. Ein "neues" Resultat meint dabei, dass dem Autor keine Veröffentlichung bekannt ist, die diese oder eine sehr ähnliche Aussage enthält.

Abschnitt 2.1 zur Toughness einer Knotenmenge enthält fast nur Beobachtungen, die sich im Fall $H = V$ zu bereits bekannten Aussagen über die Toughness von Graphen vereinfachen. Neu ist hier vor allem Lemma 1, welches nur für $H \neq V$ Bedeutung hat.

Der kurze Abschnitt 2.2 definiert im Wesentlichen nur H-lokale Faktoren und enthält keine neuen Errungenschaften.

Das wichtigste Hilfsmittel in dieser Arbeit ist Satz 7, welcher von Mader bewiesen wurde [22]. Der gesamte Abschnitt 3.1 hat Entsprechungen in Maders Publikation. Die Ergebnisse werden hier jedoch ausführlicher erklärt. Korollar 2 ist von Tuttes f-Faktor-Satz inspiriert (ursprünglich in [23], auch z. B. in [24], S. 143).

Abschnitt 3.2 enthält wieder Bestandteile, die auf Mader zurückgehen. Die Idee für Lemma 3 stammt aus der Arbeit von Enomoto u. a. [8]. Um dieses und das eigentliche Resultat Lemma 4 zu zeigen, benötigt man im Fall $H \neq V$ aber mehr Aufwand. Lemma 5 ist neu und ein unscheinbarer, aber wichtiger Bestandteil des Hauptbeweises.

Abschnitt 3.3 dient nur der Vollständigkeit und ist als Folklore anzusehen.

Zu den Resultaten: Lemma 6 kann auch direkt aus Satz 2 abgeleitet werden und dürfte in der einen oder anderen Variante schon öfter bewiesen worden sein. Das neue Lemma 7 orientiert sich an dem Beweis von Satz 3. Ebenfalls neu ist Lemma 8 und entstammt dem Beweis von Satz 1. Details hierzu finden sich im Anschluss an die beiden großen Beweise in Abschnitt 4.1. Satz 5 ist schließlich ein direktes Resultat dieser Lemmata.

Abschnitt 4.2 diskutiert die Notwendigkeit der Schranken und etwaige Verbesserungsmöglichkeiten von Satz 5. Dies läuft auf die Konstruktion von geeigneten Graphen in Satz 6 hinaus. Da ein vergleichbares Resultat zu Satz 5 bisher fehlt, dürfte dieser Teil neu sein. Die Definition der Simple-Edge-Toughness ist schließlich zu simpel, um nicht schon einmal getroffen worden zu sein, veröffentlicht wurde sie anscheinend aber nicht. Korollar 3 ist neu, zeigt es doch den Zusammenhang zwischen Simple-Edge-Toughness und lokalen Faktoren.

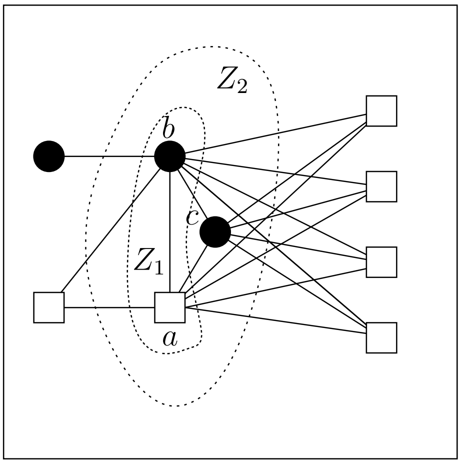
2 Toughness und Faktoren

2.1 Toughness

Die Toughness $\tau(H)$ einer Knotenmenge H ähnelt dem Konzept des Zusammenhangs $\kappa(H)$ dieser Knotenmenge. $\kappa(H)$ ist (falls $G[H]$ nicht vollständig ist) die minimalen Mächtigkeit einer Knotenmenge Z, die gelöscht werden muss, damit $G - Z$ mehr als eine H-Komponente hat. Für die Toughness wird jedoch nicht unbedingt ein kleinster Trenner Z gesucht, sondern es wird das Verhältnis zwischen der Größe des Trenners und der Anzahl von H-Komponenten nach dem Löschen betrachtet. Eine niedrige Toughness bedeutet, dass man H sehr leicht trennen kann, also viele H-Komponenten selbst bei wenig gelöschten Knoten erhält. Eine hohe Toughness hingegen erfordert das Löschen von sehr vielen Knoten, um viele H-Komponenten zu erhalten.

Definition 1 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Sei $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$. Falls $\forall\ Z \subseteq V$ mit $c^H(G - Z) \geq 2$*

$$tc^H(G - Z) \leq |Z|$$



Mit □ werden Knoten in H, mit • Knoten nicht in H gekennzeichnet. Der Trenner $Z_1 = \{a, b\}$ zeigt, dass H höchstens 1-tough sein kann. Der größere Trenner $Z_2 = \{a, b, c\}$ zeigt aber, dass H sogar nur $\frac{3}{5}$-tough sein kann.

Abbildung 1: Ein Graph und zwei Trenner

*gilt, so ist H t-*tough *in G. Falls $H = V$ ist, so wird der Graph G als t-tough bezeichnet.*

Leicht ersichtlich ist eine t-toughe Menge H auch t'-tough für $0 \leq t' \leq t$.

Beobachtung 1 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$ sei t-tough in G. Dann ist H für jedes $t' \in \mathbb{R}, 0 \leq t' \leq t$, auch t'-tough in G.*

Beweis: Die zu untersuchenden Trenner $Z \subseteq V$ hängen von H und G, nicht aber von t ab. Da H t-tough in G ist, muss für alle $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$ gelten

$$|Z| \geq t\mathrm{c}^H(G - Z) \geq t'\mathrm{c}^H(G - Z),$$

und es folgt sofort die Behauptung. □

Definition 2 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Die* Toughness $\tau_G(H)$ von H in G *ist definiert als*

$$\tau_G(H) := \sup\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0, H \text{ ist } t\text{−tough in } G\}$$

und sei $+\infty$, falls H für jedes $t \geq 0$ t-tough in G ist. Falls es klar ist, auf welchen Graphen sich $\tau_G(H)$ bezieht, wird der Index weggelassen. Im Falle $H = V$ wird auch $\tau(G)$ statt $\tau_G(V)$ geschrieben.

Etwas natürlicher ist die folgende Charakterisierung der Toughness.

Beobachtung 2 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Genau dann, wenn $G[H]$ vollständig ist, ist $\tau_G(H) = +\infty$. Falls $G[H]$ nicht vollständig ist, gilt*

$$\tau_G(H) = \min\left\{\frac{|Z|}{\mathrm{c}^H(G-Z)} : Z \subseteq V, \mathrm{c}^H(G-Z) \geq 2\right\}$$

Beweis: Falls $G[H]$ vollständig ist, so ist für jedes $Z \subseteq V$ ebenfalls $G[H \setminus Z]$ vollständig (oder leer) und damit in einer gemeinsamen Komponente. Somit ist $\mathrm{c}^H(G - Z) \leq 1$ und es ist keine weitere Bedingung zu erfüllen. Also ist H t-tough für jedes $t \geq 0$ und $\tau(H) = +\infty$.

Sei umgekehrt $\tau(H) = +\infty$. Falls es $x \in H, y \in H, x \neq y$ mit $xy \notin \mathrm{E}(H)$ gäbe, so wäre $Z := V \setminus \{x, y\}$ ein Trenner mit $\mathrm{c}^H(G-Z) = \mathrm{c}^H((\{x,y\},\emptyset)) = 2$. Für $t > |Z|/2$ wäre

$$|Z| \geq t\mathrm{c}^H(G-Z) = 2t > |Z|,$$

was ein Widerspruch ist. Also muss $G[H]$ vollständig sein.

Sei ab nun deshalb $\tau(H) < +\infty$ und $G[H]$ nicht vollständig. Da es mindestens einen, aber nur endlich viele mögliche Trenner $Z \subseteq V$ gibt, existiert

$$\min\left\{\frac{|Z|}{\mathrm{c}^H(G-Z)} : Z \subseteq V, \mathrm{c}^H(G-Z) \geq 2\right\}$$

sicherlich. Für ein $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$, gilt dann

$$\begin{aligned}
& H \text{ ist } t\text{−tough in } G \\
\iff \quad & \forall\, Z \subseteq V : \mathrm{c}^H(G-Z) \geq 2 \text{ gilt } t\mathrm{c}^H(G-Z) \leq |Z| \\
\iff \quad & t \leq \min\left\{\frac{|Z|}{\mathrm{c}^H(G-Z)} : Z \subseteq V, \mathrm{c}^H(G-Z) \geq 2\right\}
\end{aligned}$$

Das Supremum über alle solche t ergibt dann genau dieses Minimum. □

Jeder Trenner $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$ liefert also eine weitere Schranke für die Toughness und damit für die Werte t, für die H t-tough sein kann.

Allerdings hängt die Toughness von $H \subseteq V$ in komplexer Weise von dem zugrundeliegenden Graphen G ab. (In diesem Zusammenhang sei angemerkt, dass es NP-schwer ist, die Toughness eines Graphen zu bestimmen [4].) Ein paar einfache Monotonie-Aussagen sind dennoch sofort treffbar.

Beobachtung 3 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$ sei t-tough in G.*

1. *Sei $G' = (V', E')$ ein Graph und $G \subseteq G'$. Dann ist H t-tough in G'.*
2. *Sei $H' \subseteq H$. Dann ist H' t-tough in G.*

Beweis:

1. Sei $G' = (V', E')$, $G \subseteq G'$. Dann ist $H \subseteq V'$. Sei $Z' \subseteq V'$ mit $\mathrm{c}^H(G' - Z') \geq 2$. Sei $Z := Z' \cap V$. Dann ist $G - Z \subseteq G' - Z'$. Es sind keine H-Knoten hinzugekommen und H-Knoten, die in $G' - Z'$ noch in der selben Komponente liegen, müssen dies in $G - Z$ nicht. Somit ist $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq \mathrm{c}^H(G' - Z')$. Also ist $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$ und mit der Toughness von H in G folgt
$$|Z'| \geq |Z| \geq t\mathrm{c}^H(G - Z) \geq t\mathrm{c}^H(G' - Z').$$
Also ist H t-tough in G'.

2. Sei $H' \subseteq H$. Sei $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^{H'}(G - Z) \geq 2$. Da
$$\begin{aligned} 2 \leq c^{H'} &= |\{C \in \mathcal{C}(G - Z) : \mathrm{V}(C) \cap H' \neq \emptyset\}| \\ &\leq |\{C \in \mathcal{C}(G - Z) : \mathrm{V}(C) \cap H \neq \emptyset\}| \\ &= c^H(G - Z) \end{aligned}$$
muss gelten
$$|Z| \geq t\mathrm{c}^H(G - Z) \geq t\mathrm{c}^{H'}(G - Z).$$
Also ist H' t-tough in G.

□

Die erste Aussage dieser Beobachtung bestätigt die Intuition, dass H in einem Graphen G' mit zusätzlichen Kanten und Wegen schwieriger zu trennen sein sollte. Der zweite Teil betrifft eine Teilmenge H' von H. Es muss H' immer mindestens so tough in G sein wie H in G. Insbesondere gilt also für alle $H \subseteq V$ stets $\tau_G(H) \geq \tau(G)$.

Die folgende wichtige Beobachtung beschäftigt sich mit der maximalen Anzahl der H-Komponenten, die beim Trennen entstehen können. Wählt man aus jeder solchen H-Komponente einen Knoten von H aus, erhält man eine unabhängige Menge. Umgekehrt kann man jede unabhängige aus H-Knoten bestehende Menge trennen.

Beobachtung 4 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$.*

1. *Für alle $Z \subseteq V$ gilt $\mathrm{c}^H(G - Z) \leq \alpha(G[H \setminus Z])$.*

2. *Sei $H' \subseteq H$ eine unabhängige Menge. Dann existiert ein $Z' \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G - Z') \geq |H'|$.*

Beweis:

1. Sei $Z \subseteq V$. Für jedes $C \in \mathcal{C}^H(G - Z)$ sei $x_C \in C \cap H$ ausgewählt. Dann ist $U := \{x_C : C \in \mathcal{C}^H(G - Z)\} \subseteq H \setminus Z$ unabhängig, denn es existieren keine Kanten zwischen den Knoten unterschiedlicher Komponenten. Also ist $\mathrm{c}^H(G - Z) = |U| \leq \alpha(G[H \setminus Z])$.

2. Sei $H' \subseteq H$ eine unabhängige Menge, $Z' := \mathrm{N}(H')$ und $G' := G - Z'$. Da H' unabhängig ist, folgt $\mathrm{N}(H') \cap H' = \emptyset$ und $H' \subseteq \mathrm{V}(G')$. Die Knoten von H' müssen aber in G' isoliert sein, denn alle ihre Nachbarn wurden gelöscht. Somit ist $\mathrm{c}^H(G - Z') \geq |H'|$.

$\square$

Insbesondere gilt also für jedes $Z \subseteq V$, dass $\mathrm{c}^H(G-Z) \leq \alpha(G[H])$ ist, und es gibt einen Trenner Z', so dass diese Schranke auch angenommen wird. Nebenbei ergibt sich wieder die Beobachtung, dass für vollständiges $G[H]$, $H \neq \emptyset$, kein Trenner $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G-Z) \geq 2$ existieren kann, denn dann ist $\alpha(G[H]) = 1$.

Der letzte Aspekt der Toughness-Definition sind die Trenner Z. Zuerst werden ein paar spezielle Trenner vorgestellt.

Beobachtung 5 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$.*

1. *Es ist $\tau(H) = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{c}^H(G) \geq 2$. (Trenner $Z := \emptyset$.)*
2. *Sei $x \in H$ mit $H \setminus \{x\} \not\subseteq \mathrm{N}(x)$. Dann ist $\tau(H) \leq \frac{|\mathrm{N}(x)|}{2}$. (Trenner $Z := \mathrm{N}(x)$.)*
3. *Falls $G[H]$ nicht vollständig ist, gilt $\tau(H) \leq \frac{|V|}{\alpha(G[H])} - 1$. (Trenner $Z := \mathrm{N}(U)$, U maximal unabhängig in H.)*

Beweis:

1. Sei $\tau(H) = 0$. Dann ist $G[H]$ nicht vollständig, $|H| \geq 2$ und es existiert ein Trenner Z mit $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$ und $0 = \tau(H) = \frac{|Z|}{\mathrm{c}^H(G-Z)}$. Also ist $|Z| = 0$ und damit $\mathrm{c}^H(G) = \mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$.

   Falls $\mathrm{c}^H(G) \geq 2$ ist, so folgt mit dem Trenner $Z := \emptyset$ sofort $\tau(H) \leq 0$, also $\tau(H) = 0$.

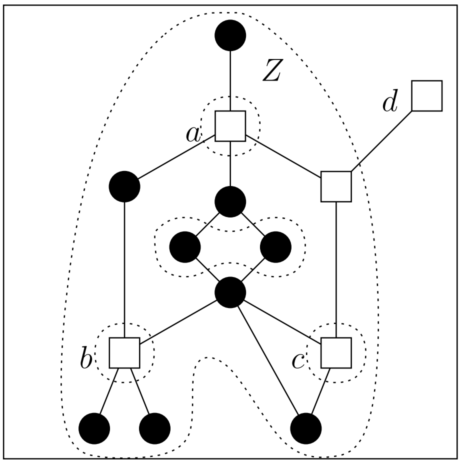
2. Sei $x \in H$ mit $H \setminus \{x\} \not\subseteq \mathrm{N}(x)$. Dann ist $Z := \mathrm{N}(x)$ ein Trenner mit $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$, denn x ist isoliert in $G - Z$, aber es gibt noch einen anderen Knoten aus H in $G - Z$. Also ist $\tau(H) \leq \frac{|Z|}{\mathrm{c}^H(G-Z)} \leq \frac{|\mathrm{N}(x)|}{2}$.

3. Sei $G[H]$ nicht vollständig, also $\alpha(G[H]) \geq 2$. Es sei $U \subseteq H$ eine unabhängige Menge mit $|U| = \alpha(G[H])$. Wie in Beobachtung 4 sei $Z := \mathrm{N}(U)$. Dann ist $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq \alpha(G[H]) \geq 2$ und $|Z| \leq |V| - \alpha(G[H])$. Somit ist

$$\tau(H) \leq \frac{|Z|}{\mathrm{c}^H(G - Z)} \leq \frac{|V| - \alpha(G[H])}{\alpha(G[H])} = \frac{|V|}{\alpha(G[H])} - 1.$$

$\square$

Über einen Knoten x mit $H \setminus \{x\} \subseteq \mathrm{N}(x)$ trifft obige Beobachtung keine Aussage. Dies liegt daran, dass ein solcher Knoten immer im Trenner Z enthalten sein muss, damit mehr als eine H-Komponente entstehen kann.



$U := \{a, b, c\} \subseteq H$ ist unabhängig. Der Trenner sei $Z = \mathrm{N}(U)$. Allerdings ist U keine bezüglich Inklusion maximale unabhängige Menge, wie d zeigt, und deswegen entsteht noch eine weitere H-Komponente neben den isolierten Knoten von U.

Abbildung 2: Der Trenner $\mathrm{N}(U)$

Beobachtung 6 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Sei $x \in V$ mit $H \setminus \{x\} \subseteq \mathrm{N}(x)$. Dann folgt aus $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$, dass $x \in Z$ ist.*

Beweis: Sei $x \in V$ mit $H \setminus \{x\} \subseteq \mathrm{N}(x)$. Es sei $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$. Angenommen es ist $x \notin Z$. Da aber $H \setminus Z \subseteq \{x\} \cup \mathrm{N}(x) \setminus Z$ ist und $G[\{x\} \cup \mathrm{N}(x) \setminus Z]$ zusammenhängt, liegt ganz $H \setminus Z$ in der selben Komponente. Dies ist ein Widerspruch zu $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$. □

Damit kann die Toughness von H leider fast nichts über einen solchen vollständig zu H verbundenen Knoten x aussagen. Selbst ob es sich um einen H-Knoten handelt oder nicht, beeinflusst die Toughness von H nicht.

Wenn x sowieso immer im Trenner sein muss, ist es naheliegend, x aus G zu löschen und die Toughness von $H \setminus \{x\}$ in $G - \{x\}$ zu untersuchen. Auch der umgekehrte Fall, ein Knoten wird zu G hinzugefügt und mit ganz H verbunden, ist kontrollierbar.

Beobachtung 7 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$ sei t-tough in G.*

1. *Sei $x \in V$ mit $H \setminus \{x\} \subseteq \mathrm{N}(x)$. Dann ist $H \setminus \{x\}$ $(t - \frac{1}{2})$-tough in $G - \{x\}$.*
2. *Sei $x \notin V$. Sei $G' := (V \cup \{x\}, E \cup \{xy : y \in H\})$. Dann sind H und $H \cup \{x\}$ jeweils $\left(t + \frac{1}{\alpha(G[H])}\right)$-tough in G'.*

Beweis:

1. Sei $x \in V$ mit $H \setminus \{x\} \subseteq \mathrm{N}(x)$. Sei $H' := H \setminus \{x\}$ (also evtl. $H = H'$) und $G' := G - \{x\}$. Es genügt $\tau_{G'}(H') \geq t - \frac{1}{2}$ zu zeigen. Falls $G[H]$

vollständig ist, so ist auch $G[H']$ vollständig und H' ist beliebig tough in G'.

Ansonsten sei $Z' \subseteq \mathrm{V}(G')$ mit $\mathrm{c}^{H'}(G'-Z') \geq 2$ und $\tau_{G'}(H') = \frac{|Z'|}{\mathrm{c}^{H'}(G'-Z')}$. Sei $Z := Z' \cup \{x\}$. Dann ist $G - Z = G' - Z'$ und $\mathrm{c}^{H}(G-Z) = \mathrm{c}^{H'}(G' - Z') \geq 2$. Also gilt

$$\begin{aligned} t &\leq \frac{|Z|}{\mathrm{c}^{H}(G-Z)} \\ &= \frac{|Z'|+1}{\mathrm{c}^{H'}(G'-Z')} \\ &= \tau_{G'}(H') + \frac{1}{\mathrm{c}^{H'}(G'-Z')} \\ &\leq \tau_{G'}(H') + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Sei $x \notin V$ und $G' := (V \cup \{x\}, E \cup \{xy : y \in H\})$, $H' := H \cup \{x\}$. Da $H \subseteq H'$ ist, genügt es laut Beobachtung 3 zu zeigen, dass H' entsprechend tough in G' ist. Falls $G[H]$ vollständig ist, so ist $G'[H']$ ebenfalls vollständig und H' beliebig tough in G'.

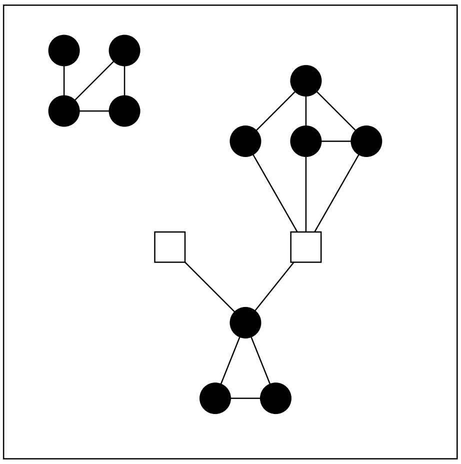
   Sei $G[H]$ nicht vollständig. Dann ist $G'[H']$ auch nicht vollständig. Sei $Z' \subseteq \mathrm{V}(G')$ mit $\mathrm{c}^{H'}(G' - Z') \geq 2$ und $\tau_{G'}(H') = \frac{|Z'|}{\mathrm{c}^{H'}(G'-Z')}$. Dann ist $x \in Z'$. Sei $Z := Z' \setminus \{x\}$. Es ist $G - Z = G' - Z'$, also $\mathrm{c}^{H}(G-Z) = \mathrm{c}^{H'}(G' - Z') \geq 2$. Damit ist

$$\begin{aligned} t &\leq \frac{|Z|}{\mathrm{c}^{H}(G-Z)} \\ &= \frac{|Z'|-1}{\mathrm{c}^{H}(G'-Z')} \\ &\leq \frac{|Z'|}{\mathrm{c}^{H}(G'-Z')} - \frac{1}{\alpha(G'[H])} \\ &= \tau_{G'}(H') - \frac{1}{\alpha(G[H])}. \end{aligned}$$

   H' ist also $\left(t + \frac{1}{\alpha(G[H])}\right)$-tough in G'.

□

Somit ist in diesem speziellen Fall etwas über die Toughness von H in $G - \{x\}$ bekannt. Im Gegenteil zu Knoten, die mit ganz H verbunden sind, kann es auch Knoten geben, die schlecht oder gar nicht zu H verbunden sind und auch keine für die Toughness wichtigen Verbindungen in G darstellen.



Über fast keinen der Knoten von $V \setminus H$ ist ein H-Weg möglich. Besonders interessant sind diese Fälle aber nicht.

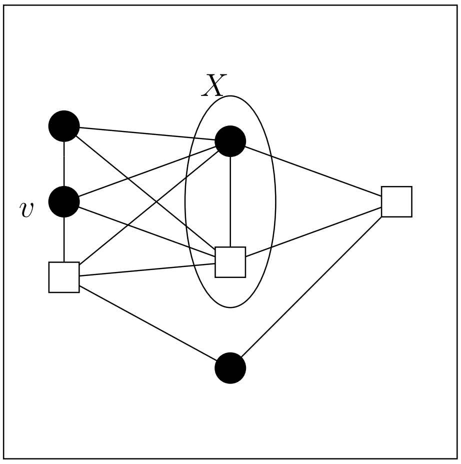
Abbildung 3: Knoten, über die kein H-Weg möglich ist

Manchmal können solche Knoten entfernt werden, ohne die Toughness von H zu beeinflussen.

Beispielsweise sind die Knoten einer Komponente $C \in \mathcal{C}(G)$ mit $C \cap H = \emptyset$ für die Toughness von H bedeutungslos, denn über C wird nie ein H-Weg möglich sein. Deshalb ist $\mathrm{c}^H(G - Z) = \mathrm{c}^H(G - (\mathrm{V}(C) \cup Z))$ für alle $Z \subseteq V$. Leider ist die Bedingung, dass überhaupt kein H-Weg über einen Knoten v möglich ist, nur selten erfüllt. Falls es beispielweise Knoten x und y gibt, die zu ganz $V \setminus \{x\}$ beziehungsweise $V \setminus \{y\}$ verbunden sind, so lässt sich für alle $v \in V \setminus \{x, y\}$ ein H-Weg h_1xvyh_2 finden. Andererseits sind solche Knoten laut Beobachtung 6 in jedem Trenner $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$ enthalten. Der Weg h_1xvyh_2 ist in $G - Z$ also nicht mehr möglich, unabhängig davon, ob $v \in Z$ ist. Wenn $X \subseteq V$ so ist, dass für jedes $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$ gilt $X \subseteq Z$, dann lässt sich obige Bedingung derart abschwächen, dass bloß in $G - X$ (statt G) kein H-Weg über v existieren soll (vgl. Abb 4).

Diese Bedingung wird sich im Beweis der wichtigen Lemmata 7 und 8 bereits als nützlich herausstellen. Allerdings wird dort noch eine allgemeinere Version benötigt. Dafür lohnt es sich, die Frage zu stellen, ob denn H-Wege über v in $G - X$ prinzipiell ausgeschlossen sein müssen, damit H noch t-tough in $G - \{v\}$ ist. Sicherlich hat dann v keinen Einfluss auf die Anzahl der H-Komponenten. Aber dies gilt auch, wenn jeder H-Weg $W = x_0 \dots x_l$, der v enthält, Knoten x_0 und x_l aus H verbindet, die auch ohne v noch verbunden sind (vgl. Abb 5). Dies ist der Fall, wenn man W abkürzen kann, so dass v übersprungen wird. Das folgende Lemma fasst diese Bedingung zusammen.

Lemma 1 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$ sei t-tough in G. Sei $X \subseteq V$ so, dass für jedes $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$ gilt $X \subseteq Z$. Sei $v \in V \setminus (H \cup X)$.*



In $G - X$ ist über v kein H-Weg möglich, in G aber schon. Hier gilt $\tau_G(H) = \tau_{G-\{v\}}(H)$.

Abbildung 4: Ein Knoten ohne H-Weg in $G - X$

Angenommen für jeden H-Weg $W = x_0 \ldots x_l$ in $G - X$, der v enthält, also $v = x_j$ für ein j, existieren Indizes i und k, $0 \leq i < j < k \leq l$, mit $x_i x_k \in \mathrm{E}(G - X)$. Dann ist H t-tough in $G - \{v\}$.

Beweis:
Sei $G' := G - \{v\}$. Wegen $v \notin H$ ist $G[H] = G'[H]$. Falls $G[H]$ vollständig ist, so ist H beliebig tough in G' und die Behauptung folgt.

Sei $G[H]$ nicht vollständig. Sei $Z' \subseteq \mathrm{V}(G')$ mit $\mathrm{c}^H(G' - Z') \geq 2$ und $\tau_{G'}(H) = \frac{|Z'|}{\mathrm{c}^H(G'-Z')}$. Sei $Z := Z' \cup \{v\}$. Da $G' - Z' = G - Z$ ist, ergibt sich $\mathrm{c}^H(G - Z) = \mathrm{c}^H(G' - Z') \geq 2$.

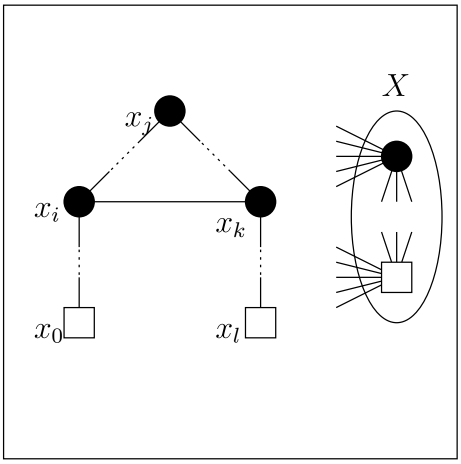
Es genügt $\mathrm{c}^H(G - Z') = \mathrm{c}^H(G - Z)$ zu zeigen, denn dann ist

$$t \leq \frac{|Z'|}{\mathrm{c}^H(G - Z')} = \frac{|Z'|}{\mathrm{c}^H(G - Z)} = \frac{|Z'|}{\mathrm{c}^H(G' - Z')} = \tau_{G'}(H),$$

also H t-tough in G'.

Es ist $G - Z \subseteq G - Z'$ und aus $v \notin H$ folgt $\mathrm{V}(G - Z) \cap H = \mathrm{V}(G - Z') \cap H$. Damit ist $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq \mathrm{c}^H(G - Z')$.

Angenommen es ist $\mathrm{c}^H(G - Z) > \mathrm{c}^H(G - Z')$. Dann existiert in $G - Z'$ ein Weg, der zwei H-Komponenten von $G - Z$ verbindet. Insbesondere existiert dann ein H-Weg W, der diese Komponenten verbindet. Da $G - Z = G - Z' - \{v\}$ ist, muss dieser Weg v enthalten. Sei $W = x_0 \ldots x_l$, $v = x_j$ mit $1 \leq j \leq l - 1$. Wegen $c^H(G - Z) \geq 2$ ist $X \subseteq Z$ und wegen $v \notin X$ ist $X \subseteq Z'$. Somit ist W auch ein H-Weg in $G - X$. Laut Annahme existieren dann Indizes i und k, $0 \leq i < j < k \leq l$, so dass $x_i x_k \in \mathrm{E}(G - X)$. Da $G - Z'$ ein induzierter Untergraph von G und auch von $G - X$ ist, ist $x_i x_k \in \mathrm{E}(G - Z')$. Dann ist aber $W' := x_0 \ldots x_i x_k \ldots x_l$ ein Weg in $G - Z$, denn es ist ein Weg in $G - Z'$, der v



Der H-Weg über x_j in $G - X$ kann durch $x_i x_k$ abgekürzt werden. Die Knoten aus X sollen in dieser Darstellung übrigens zu allen anderen Knoten verbunden sein.

Abbildung 5: Ein Weg, der abgekürzt werden kann

nicht enthält. W' verbindet die selben zwei Komponenten von $G - Z$ wie W. Damit sind diese zwei Komponenten aber nur eine. Dies ist ein Widerspruch. Somit gilt $\mathrm{c}^H(G-Z) = \mathrm{c}^H(G-Z')$, woraus die Behauptung wie bereits gezeigt folgt. $\square$

Wie in der Herleitung besprochen, erfüllt ein $v \in V \setminus (X \cup H)$ die Bedingung des Lemmas, wenn es in $G - X$ keinen H-Weg gibt, der v nutzt. Dann fällt nämlich die Bedingung an den Weg weg. Dieser und noch ein anderer nützlicher Spezialfall sollen noch einmal gesondert erwähnt werden:

Beobachtung 8 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$ sei t-tough in G. Sei $X \subseteq V$ so, dass aus $Z \subseteq V$ und $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$ stets $X \subseteq Z$ folgt.*

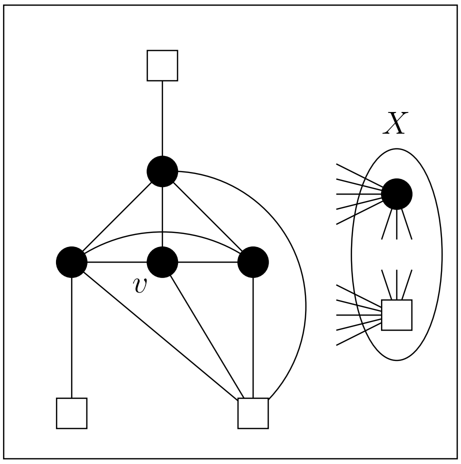
1. *Sei $v \in V \setminus (H \cup X)$ so, dass es in $G - X$ keinen H-Weg gibt, der v enthält. Dann ist H t-tough in $G - \{v\}$.*

2. *Sei $v \in V \setminus (H \cup X)$ und $G[\mathrm{N}_{G-X}(v)]$ vollständig. Dann ist H t-tough in $G - \{v\}$.*

Beweis:

1. Da gar kein H-Weg über v in $G - X$ existiert, erfüllt v die Bedingung aus Lemma 1. Damit ist H t-tough in $G - \{v\}$.

2. Sei W ein H-Weg über v in $G - X$. Da $v \notin H$, ist v kein Ende von W. Also hat W die Gestalt $W = x_0 \dots x_{j-1} x_j x_{j+1} \dots x_l$ mit $v = x_j$. Dann sind $\{x_{j-1}, x_{j+1}\} \subseteq \mathrm{N}(v) \setminus X$, denn W ist ein Weg in $G - X$. Wegen der Vollständigkeit von $G[\mathrm{N}_{G-X}(v)]$ ist $x_{j-1} x_{j+1} \in \mathrm{E}(G - X)$, die gesuchten



Jeder H-Weg in $G-X$ über v ist abkürzbar, denn $v \notin H$ und $\mathrm{N}_{G-X}(v)$ ist vollständig. Damit ist H in $G-\{v\}$ genauso tough wie in G.

Abbildung 6: $\mathrm{N}_{G-X}(v)$ ist vollständig

Indizes sind also $j-1$ und $j+1$. Somit ist die Voraussetzung von Lemma 1 an jeden H-Weg über v erfüllt und H ist t-tough in $G-\{v\}$.

□

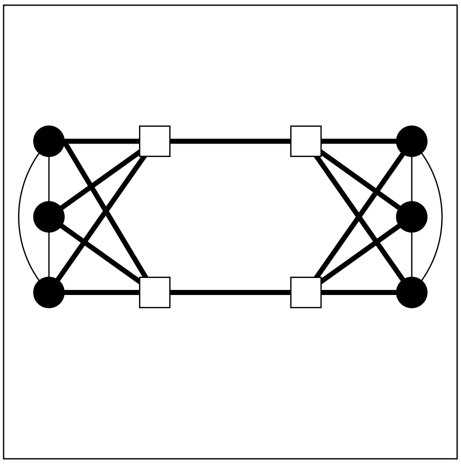
Als Schlussbemerkung sei noch erwähnt, dass ein größtmögliches $X \subseteq V$, das in jedem Trenner $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G-Z) \geq 2$ enthalten sein soll, sich natürlich als

$$X := \bigcap_{Z \subseteq V : \mathrm{c}^H(G-Z) \geq 2} Z$$

ergibt. Allerdings wird in den Beweisen, die zur Hauptaussage dieser Arbeit führen, immer eine Menge X bereits bekannt sein, die in allen Trennern enthalten sein muss.

2.2 lokale Faktoren

Im üblichen graphentheoretischen Sprachgebrauch (siehe z. B. [24], S. 141ff.) sind Faktoren Teilgraphen von $G=(V,E)$, bei denen der Grad jedes Knotens $v \in V$ einem vorgegebenen Wert $f(v)$ entspricht. Welche Kanten aus E verwendet werden, um diese Vorgaben zu erfüllen, ist allerdings offen. Dieses Konzept wird durch H-lokale Faktoren verallgemeinert, indem der Grad nur für eine Teilmenge $H \subseteq V$ vorgeschrieben wird. Die Definition sieht außerdem vor, dass ein Knoten $v \notin H$, dessen Grad also nicht vorgeschrieben ist, nicht beliebig verwendet werden kann, sondern entweder Grad 0 hat oder Bestandteil genau eines H-Weges ist. Ein H-lokaler Faktor besteht somit nur aus H-Wegen, da dazu auch Kanten innerhalb von H zählen.



Die breiteren Kanten sind in den H-Wegen des H-lokalen 4-Faktors enthalten.

Abbildung 7: Ein H-lokaler 4-Faktor

Definition 3 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Ein* Wegesystem $\mathcal{W}$ *sei eine Menge von Wegen in G. Es wird ein* H-Wegesystem *genannt, falls alle darin enthaltenen Wege paarweise intern disjunkt und H-Wege sind. Der* Grad eines Knotens $x \in H$ in $\mathcal{W}$, $\mathrm{d}^{\mathcal{W}}(x)$*, sei die Anzahl der Wege in $\mathcal{W}$, die x enthalten.*

Nun kann man einen lokalen Faktor als spezielles H-Wegesystem definieren. Dabei sollen die für die Knoten in H vorgegebenen Grade als obere Schranken verstanden werden. Falls eine davon nicht erreicht wird, hat der Faktor einen "Defekt".

Definition 4 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{W}$ ein H-Wegesystem, so dass $\forall x \in H\ \mathrm{d}^{\mathcal{W}}(x) \leq \hat{f}(x)$ gilt. Dann heiße $\mathcal{W}$ ein* defekter H-lokaler $\hat{f}$-Faktor. *Der Defekt eines Knotens $x \in H$ sei $\hat{f}(x) - \mathrm{d}^{\mathcal{W}}(x)$. Der* Defekt *eines defekten $H-lokalen$ $\hat{f}$-Faktors $\mathcal{W}$ sei die Summe der Defekte der Knoten in H.*

Ein defekter H-lokaler $\hat{f} - Faktor$ mit Defekt 0 wird einfach H-lokaler $\hat{f}$-Faktor genannt. Auch sonst wird zumindest die doppelte Nennung des Defektes vermieden, also "H-lokaler $\hat{f}$-Faktor mit Defekt ≤ 1" statt "defekter H-lokaler $\hat{f}$-Faktor mit Defekt ≤ 1" geschrieben.

Für den Fall $H = V$ vereinfacht sich diese Definition zu der eines gewöhnlichen Faktors: Der Grad wird auf jedem Knoten vorgegeben und jeder V-Weg kann nur die Länge 1 haben, also eine einzelne Kante sein. Dadurch wird aus einem V-Wegesystem einfach eine Teilmenge der Kanten von G und der lokale Faktor ist ein Teilgraph $G' = (V, E')$ von G. Das klassische Resultat, dass die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade sein muss, zeigt, dass ein solcher Faktor mit $\hat{f}(V) \equiv 1 \pmod 2$ nicht Defekt 0 haben kann. Dies gilt auch für lokale Faktoren im Allgemeinen:

Beobachtung 9 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{W}$ ein H-lokaler $\hat{f}$-Faktor mit Defekt r. Dann ist $r \equiv \hat{f}(H) \pmod 2$.*

Beweis: Jeder Weg in $\mathcal{W}$ erhöht den Grad von genau zwei Knoten in H um je genau 1. Damit ist

$$\sum_{x \in H} \mathrm{d}^{\mathcal{W}}(x) = 2|\mathcal{W}|$$

und der Defekt

$$r = \sum_{x \in H} (\hat{f}(x) - \mathrm{d}^{\mathcal{W}}(x)) = \hat{f}(H) - 2|\mathcal{W}|.$$

Also ist $r \equiv \hat{f}(H) - 2|\mathcal{W}| \equiv \hat{f}(H) \pmod 2$. □

Somit ist Defekt 1 der kleinste, den man von einem lokalen Faktor mit $\hat{f}(H)$ ungerade erwarten kann. Andererseits kann ein lokaler Faktor mit $\hat{f}(H)$ gerade nie Defekt 1 haben. Die Bedingung, dass ein Faktor mit Defekt höchstens 1 existiert, läuft also in beiden Fällen darauf hinaus, dass der Faktor möglichst wenig Defekt hat, d.h. $|\mathcal{W}|$ möglichst groß ist. Interessant ist die maximale Größe eines Faktors natürlich auch, wenn dieser einen höheren Defekt hat.

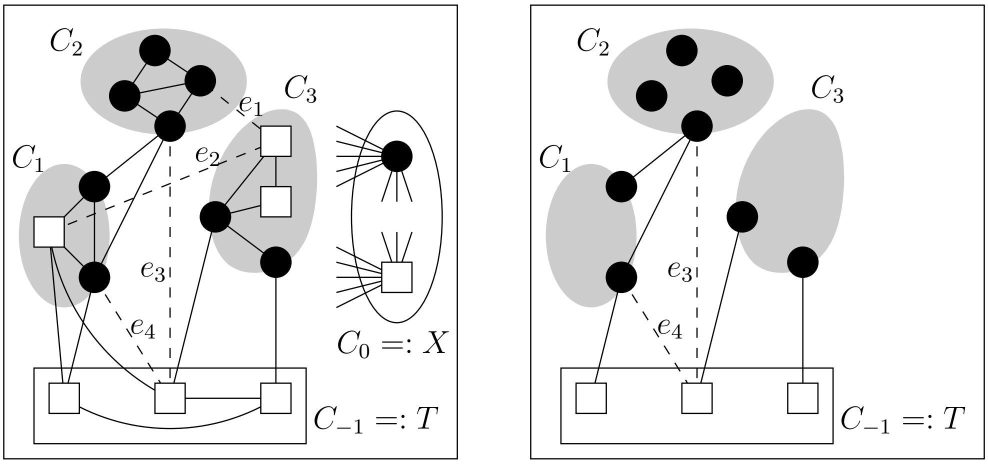
Definition 5 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mu(G, H, \hat{f})$ die maximale Kardinalität $|\mathcal{W}|$ eines defekten H-lokalen $\hat{f}$-Faktors $\mathcal{W}$ in G.*

Die Frage nach der Existenz eines lokalen Faktors beziehungsweise dessen Defektes ist äquivalent zur Bestimmung von $\mu(G, H, \hat{f})$. Das zentrale Hilfsmittel dabei ist ein Satz von Mader, der $\mu(G, H, \hat{f})$ genau angibt [22]. Diesem und der dafür benötigten Technik widmet sich ein Großteil von Kapitel 3.

3 Hilfsmittel

3.1 Ein Satz von Mader

Im Folgenden wird Maders Resultat zur exakten Bestimmung von $\mu(G, H, \hat{f})$, also der Größe eines maximalen defekten H-lokalen $\hat{f}$-Faktors, behandelt. Die Grundlage bildet die Idee, dass man den Graphen G durch das Löschen von Knoten und Kanten trennt, bis er sicher keinen Weg mehr enthält, der in einem Faktor gezählt werden kann. Die gelöschten Knoten und Kanten heißen Knoten- bzw. Kantentrenner, oder zusammen einfach Trenner. Leitet man dann eine obere Schranke ν für die Anzahl der Wege, die man auf diese Weise getrennt hat, aus dem Trenner ab, so kann es auch nur ν Wege in einem Faktor gegeben



Die Partition $\mathcal{P} := (C_{-1}, C_0, C_1, C_2, C_3)$ ist nur H-kompatibel, wenn die gestrichelten Kanten nicht in G enthalten sind, denn e_1 und e_2 verstoßen gegen die 2. Bedingung, e_3 und e_4 gegen die 3. Bedingung der Definition.

Abbildung 8: G mit einer H-kompatiblen Partition $\mathcal{P}$ und $G - \mathcal{P}$

haben. Die wahre Kunst ist es allerdings, die Menge der zulässigen Trenner und die Bestimmung der Schranke ν so zu wählen, dass es immer einen Trenner mit $\mu = \nu$ gibt. Dass dies möglich ist, zeigt Mader [22] und wird hier nur zitiert (s. Satz 7). Aber zumindest soll die Schranke ν anschaulich begründet werden.

Zuerst wird Maders Beschreibung von Trennern eingeführt.

Definition 6 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $-m \in \mathbb{N}_0$, also m eine ganze Zahl ≤ 0. Für $m \leq i \leq n$ sei $C_i \subseteq V$. Für $m \leq i < j \leq n$ gelte $C_i \cap C_j = \emptyset$. Außerdem sei $\bigcup_{m \leq i \leq n} C_i = V$. Dann wird $\mathcal{P} := (C_m, \ldots, C_n)$ eine* Partition *von V genannt.*

Diese Definition besagt noch nicht viel, außer dass eine Partition die Knotenmenge V beliebig zerlegt. Nun bekommen die Mengen C_i mit $i < 0, = 0$ bzw. > 0 aber unterschiedliche Bedeutungen. (Die Erklärung folgt im Anschluss.)

Definition 7 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Eine Partition $\mathcal{P} = (C_m, \ldots, C_n)$ von V heißt H-kompatibel, falls*

1. *$m = -1$ und $C_{-1} \subseteq H$;*
2. *$\forall 1 \leq i \leq n \ \mathrm{bd}_{G-C_0-C_{-1}}(C_i) \cap H = \emptyset$;*
3. *$G - \mathcal{P} := G - \mathrm{E}(C_{-1}) - \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathrm{E}(C_i) - (C_0 \cup (H \setminus C_{-1}))$ keinen C_{-1}-Weg enthält.*

Die Menge der H-kompatiblen Partitionen sei $\beta(G, H)$.

Die noch zu erarbeitende Schranke ν soll die Anzahl der H-Wege in einem H-lokalen $\hat{f}$-Faktor abschätzen. Dabei bleibt der exakte Verlauf der Wege aber meistens unbekannt. Nun kann es passieren, dass zwar ein H-Wegesystem mit sehr vielen H-Wegen existiert, deren Endpunkte aber nicht zu den vorgegebenen Graden auf den Knoten passen: Ein Teil von H kann zu viele, ein Teil zu wenige Wege haben. Deswegen wird statt ganz H nur eine Teilmenge $C_{-1} \subseteq H$ untersucht, anhand derer man sozusagen "Versorgungslücken" entdecken möchte. Dies ist der Sinn hinter der ersten Bedingung der Definition. Entsprechend wird C_{-1} ab nun als *Testmenge* T bezeichnet. (Allerdings wird ν immer eine Schranke für die Gesamtzahl der Wege sein, nicht bloß der Wege, die ein Ende in T haben.)

Die zweite Bedingung ist fast technischer Natur und muss kurz auf Erklärung warten. Die dritte Bedingung, dass die Partition T trennt, definiert erst die Struktur und Verwendungsweise des Trenners. Dass T getrennt wird, sollte nicht mehr überraschen, möchte man doch eine möglichst gute Abschätzung für die Anzahl der H-Wege, an denen Knoten aus T beteiligt sind. Jede Kante innerhalb von T, also eine Kante im Term $\mathrm{E}(C_{-1})$ in obiger Definition, ist ein T-Weg. Sie wird deswegen gelöscht und auch als ein Weg gezählt. Insgesamt sind dies

$$|\mathrm{E}(T)|$$

viele. Interessanterweise wird dabei und bei den noch kommenden Überlegungen nicht auf die vorgeschriebenen Maximalgrade in T geachtet. Dies erklärt sich unter anderem damit, dass T an sich schon eine Menge ist, für die die Gesamtzahl der Wege kritisch ist.

Knoten in C_0 werden ganz aus dem Graphen entfernt, sie sind der *Knotentrenner* $X := C_0$. Das Löschen eines Knotens $x \in X \cap H$ kann bis zu $\hat{f}(x)$ Wege unterbrechen. Ein Knoten $x \in X \setminus H$ hingegen kann nur Bestandteil eines H-Weges sein und wird somit immer nur als ein Weg gezählt. Dies trägt

$$\hat{f}(X \cap H) + |X \setminus H|$$

zu ν bei. Allgemein ist festzuhalten, dass Knoten aus X als unkompliziert angenommen werden, und dementsprechend auch auf die einfachste denkbare Weise behandelt werden.

Anspruchsvoller präsentieren sich die C_i, $1 \leq i \leq n$. (Nachdem C_{-1} und C_0 bereits umbenannt wurden, werden ab jetzt immer "die Mengen C_i" die mit $i \geq 1$ sein.) Von diesen C_i werden die Kanten und eventuell darin enthaltene Knoten aus H, also $\mathrm{E}(C_i)$ und $C_i \cap H$, gelöscht. Die Bezeichnung als *Kantentrenner* trifft damit nicht ganz zu, ist aber das übliche Gegenstück zum Knotentrenner X. Da es in $G - \mathcal{P}$ keinen T-Weg gibt, und Kanten innerhalb von T sowie Wege über X bereits abgehandelt wurden, verbleiben als mögliche H-Wege nur solche, die Knoten aus einem der C_i enthalten (aber nicht aus X). Bis zur nächsten Definition werden nur noch solche H-Wege in $G - X - \mathrm{E}(T)$ betrachtet.

Gemeinsam ist allen noch nicht behandelten H-Wegen, dass sie entweder ein C_i betreten oder dort beginnen müssen. ("Betreten" meint dabei, dass der Weg nicht komplett innerhalb von C_i liegt, sondern woanders beginnt.) Analog dazu muss ein H-Weg entweder in einem C_i enden oder es wieder verlassen.

Das Betreten kann über einen Knoten $x \in C_i \setminus H$ stattfinden, dann kam der Weg entweder aus T oder einem anderen C_j. Es kommen hierfür nur

$$|\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H|$$

viele Knoten aus C_i in Frage, die jeweils in nur einem H-Weg liegen dürfen. (Übrigens hat jeder dieser Knoten im Rand, der nicht in H ist, höchstens eine Kante zu T, denn sonst ergibt sich sofort ein T-Weg in $G - \mathcal{P}$. Diese Tatsache wird noch häufig verwendet werden.)

Oder der Weg betritt C_i über ein $C_i \cap H$. Hier spielt aber die zweite Bedingung eine Rolle, denn sie besagt, dass kein H-Knoten im Rand zu einem anderen C_j liegt. Somit kommt ein Weg, der C_i in $C_i \cap H$ erreicht, direkt aus T und nutzt also eine Kante von $\mathrm{E}(C_i \cap H, T)$. Es gibt

$$|\mathrm{E}(C_i \cap H, T)|$$

viele von diesen Kanten.

Wenn der Weg die Menge C_i weder in $C_i \setminus H$ noch in $C_i \cap H$ betritt, fängt er offensichtlich in C_i an. Das heißt, er nutzt einen der

$$\hat{f}(C_i \cap H)$$

Startpunkte, die die H-Knoten in C_i zur Verfügung stellen können.

Da Wege ungerichtet sind, stehen "betreten/ anfangen" und "verlassen/ enden" für den gleichen Vorgang und die gleichen Überlegungen gelten auch für das andere Ende des Weges. Für einen H-Weg, der einen Knoten aus $C_i \cap H$ nutzt, sieht man damit sofort ein, dass dieser Weg mindestens noch eine andere dieser Ressourcen von C_i beanspruchen muss, um in C_i zu enden oder C_i zu verlassen.

Angenommen ein H-Weg W nutzt von jedem C_i höchstens eine Ressource. Dann kann W keinen Knoten von $H \setminus (T \cup X)$ enthalten und ist damit ein T-Weg. Es ist möglich, dass W von einem C_i nur eine Ressource nutzt, nämlich einen Knoten $x \in \mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H$. Von dort aus kann W weiter zu einem Knoten $y \in \mathrm{bd}_{G-X}(C_j) \setminus H$ führen. Dann kann W aber keine Kante von $\mathrm{E}(C_i)$ nutzen, denn dann müsste W C_i doch wieder über einen anderen Randknoten als x verlassen. Allgemeiner kann W keine Kante von $\mathrm{E}(C_j)$ für irgendein C_j nutzen. Damit ist W ein Weg in $G - \mathrm{E}(T) - \bigcup_{1 \leq j \leq n} \mathrm{E}(C_j) - (X \cup (H \setminus T)) = G - \mathcal{P}$. Da $\mathcal{P}$ H-kompatibel ist, existiert ein solcher T-Weg aber nicht.

Schließlich ergibt sich, dass die Anzahl der H-Wege über jedes einzelne C_i maximal

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \left(\hat{f}(C_i \cap H) + |\mathrm{E}(C_i \cap H, T)| + |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| \right) \right\rfloor$$

sein kann. Dass dabei abgerundet wird ist wieder eine Konsequenz dessen, dass ein einzelner Zugang zu C_i nichts nützt, da der Weg nicht mehr weitergeführt werden kann. Diese Vorüberlegungen rechtfertigen die folgende Definition:

Definition 8 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$. Dann sei*

$$\begin{aligned} \nu(G, H, \hat{f}, \mathcal{P}) \quad := \quad & \hat{f}(X \cap H) + |X \setminus H| + |\mathrm{E}(T)| \\ & + \sum_{1 \leq i \leq n} \left\lfloor \frac{1}{2} \Big(\hat{f}(C_i \cap H) + |\mathrm{E}(C_i \cap H, T)| + |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| \Big) \right\rfloor \end{aligned}$$

Die folgende Beobachtung sichert die Existenz von H-kompatiblen Partitionen. Auch zeigt sie, dass T dabei beliebig vorgegeben werden kann.

Beobachtung 10 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $T \subseteq H$. Sei $X \subseteq V \setminus T$ mit $\{x \in V \setminus H : |\mathrm{E}(x, T)| \geq 2\} \subseteq X$. Seien $C_1, \ldots, C_n$ die Knoten der Komponenten in $\mathcal{C}(G - X - T)$. Dann ist $\mathcal{P} := (T, X, C_1, \ldots, C_n)$ H-kompatibel.*

Beweis: Die erste Bedingung aus Definition 7 ist offensichtlich erfüllt. Zur zweiten sei bemerkt, dass $\mathrm{bd}_{G-X-T}(C_i) = \emptyset$ ist, denn die C_i sind Komponenten im Graphen $G - X - T$.

Es bleibt also zu zeigen, dass $G - \mathcal{P}$ keinen T-Weg enthält. Die einzigen T-Wege, die in $G - \mathcal{P}$ enthalten sein können, sind die über Knoten aus $C_i \setminus H$. Da Knoten $x \in V \setminus H$, die mehr als eine Kante zu T haben, in X aufgenommen wurden, hat jeder Knoten in $C_i \setminus H$ höchstens eine Verbindung zu T. Ein Weg $W = vx \ldots w$ von $v \in T$ über $x \in C_i \setminus H$ zu $w \in T$ enthält also eine Kante $xy \in \mathrm{E}(G - X)$, $y \in V \setminus H$. Damit sind x und y aber in der selben Komponente von $G - X - T$ und diese Kante xy ist in $G - \mathcal{P}$ gelöscht. Also gibt es keinen T-Weg in $G - \mathcal{P}$. □

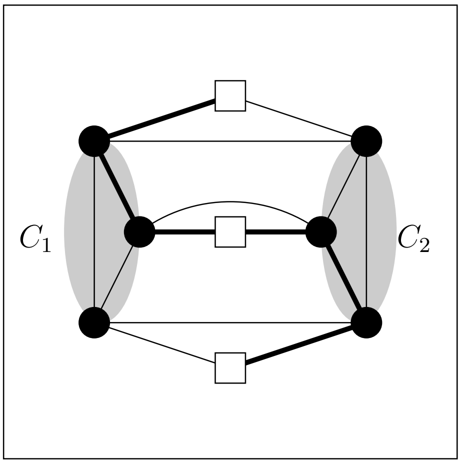
Allerdings können nicht alle Partitionen auf diese Weise konstruiert werden: Es kann bessere, niedrigere Werte für ν ergeben, wenn eine Komponente von $G - X - T$ in mehrere Partitionsmengen unterteilt wird, denn dann kann womöglich häufiger abgerundet werden. Ein Beispiel hierfür zeigt Abbildung 9.

Wie angekündigt ist ν nicht bloß eine obere Schranke für die Kardinalität eines defekten H-lokalen $\hat{f}$-Faktors, sondern es gibt auch immer eine H-kompatible Partition, für die ν die Größe des Faktors exakt bestimmt. Dies zeigt Mader und es ergibt sich folgender Satz (s. [22], Satz 2).

Satz 7 (Mader) *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\mu(G, H, \hat{f}) = \min_{\mathcal{P} \in \beta(G,H)} \nu(G, H, \hat{f}, \mathcal{P}).$$

Dieser wird im Folgenden leicht umgeschrieben.



Für $T = H$ und $X = \emptyset$ ergibt sich aus den Komponenten von $G - X - T$ die Partition $\hat{\mathcal{P}} := (H, \emptyset, V \setminus H)$ und für $\hat{f} \equiv 2$ ist $\nu(G, H, 2, \hat{\mathcal{P}}) = 3$. Es kann aber nur zwei H-Wege in einem defekten H-lokalen 2-Faktor in diesem Graphen geben. Das Aufteilen in $\mathcal{P} := (H, \emptyset, C_1, C_2)$ erlaubt es, zweimal den ungeraden Rand abzurunden, und es ist $\nu(G, H, 2, \mathcal{P}) = 2$.

Abbildung 9: Die Komponenten von $G - X - T$ sind nicht immer eine gute Wahl

Definition 9 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{P} \in \beta(G, H)$. Dann sei*

$$\rho_G(\mathcal{P}) := 2\nu(G, H, \hat{f}, \mathcal{P}) - \hat{f}(H),$$

wobei der Index G meistens nicht geschrieben wird. H und $\hat{f}$ sind dem Kontext zu entnehmen.

Korollar 2 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$. Es existiert in G ein defekter H-lokaler $\hat{f}$-Faktor mit Defekt höchstens $r, r \in \mathbb{N}$, genau dann, wenn*

$$-r \leq \min_{\mathcal{P} \in \beta(G,H)} \rho(\mathcal{P}).$$

Beweis: Da jeder Weg, der in $\mu(G, H, \hat{f})$ gezählt wird, den Defekt um 2 verringert, existiert ein defekter H-lokaler $\hat{f}$-Faktor mit Defekt $\leq r$ genau dann, wenn

$$r \geq \hat{f}(H) - 2\mu(G, H, \hat{f}).$$

Also wegen Satz 7 genau dann, wenn

$$\forall \mathcal{P} \in \beta(G, H) \quad -r \leq 2\nu(G, H, \hat{f}, \mathcal{P}) - \hat{f}(H) = \rho(\mathcal{P}).$$

$\square$

Die Terme in $\rho(\mathcal{P})$ lassen sich umformen, so dass sie für den Hauptbeweis natürlicher erscheinen. Das Abrunden wird dabei mittels einer handlichen Funktion q erledigt:

Definition 10 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$, $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$ und $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$. Es sei $\forall i, 1 \leq i \leq n$,*

$$\mathrm{q}(C_i) \quad := \quad \begin{cases} 1 \text{ falls} & \hat{f}(C_i \cap H) + |\mathrm{E}(C_i \cap H, T)| + |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| \equiv 1 \pmod 2 \\ 0 \text{ sonst} & \end{cases}$$

der q-Anteil von C_i *und*

$$\mathrm{q}(\mathcal{P}) := \sum_{1 \leq i \leq n} \mathrm{q}(C_i).$$

Damit ist $\mathrm{q}(C_i)$ genau dann 1, wenn der zu C_i gehörende Term in $\nu(G, H, \hat{f}, \mathcal{P})$ tatsächlich abgerundet wird. $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ fasst die ganzen Abrundungen zusammen. Damit lässt sich leicht zeigen:

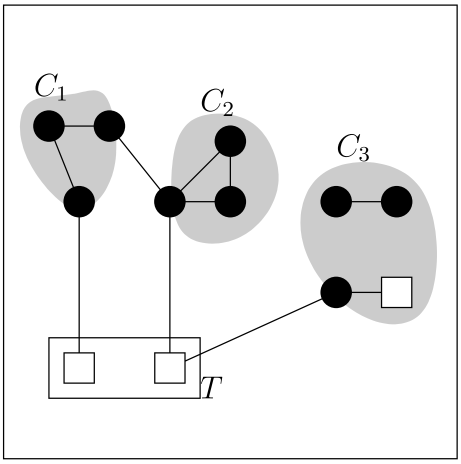
Beobachtung 11 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$. Sei f die Fortsetzung von $\hat{f}$ auf V mit 2. Dann gilt*

$$\rho(\mathcal{P}) = f(X) - f(T) + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - \mathrm{q}(\mathcal{P}).$$

Beweis: Es ist unter Berücksichtigung von $\bigcup_{1 \leq i \leq n}(C_i \cap H) = H \setminus (X \cup T)$

$$\begin{aligned}
& 2\nu(G, H, \hat{f}, \mathcal{P}) \\
= \; & 2\hat{f}(X \cap H) + 2|X \setminus H| + 2|\mathrm{E}(T)| \\
& + \sum_{1 \leq i \leq n} \Big(\hat{f}(C_i \cap H) + |\mathrm{E}(C_i \cap H, T)| + |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - \mathrm{q}(C_i) \Big) \\
= \; & 2f(X \cap H) + f(X \setminus H) + 2|\mathrm{E}(T)| \\
& + f(H \setminus (X \cup T)) + |\mathrm{E}(H \setminus (X \cup T), T)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - \mathrm{q}(\mathcal{P}) \\
= \; & f(X) + f(X \cap H) + f(H) - f(X \cap H) - f(T) \\
& + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}(x, H \setminus X)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - \mathrm{q}(\mathcal{P}) \\
= \; & f(X) + f(H) - f(T) + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - \mathrm{q}(\mathcal{P}).
\end{aligned}$$

Subtraktion von $f(H)$ ergibt die Behauptung. $\square$



Die Partitionsmengen C_1 und C_2 widersprechen nicht der Definition der Standardform. $G[C_3]$ hingegen besteht aus zwei Komponenten und deswegen ist diese Partition nicht in Standardform.

Abbildung 10: Eine Partition nicht in Standardform

Diese neue Darstellung von $\rho(\mathcal{P})$ zeigt deutlicher als ν, dass T der wichtigste Bestandteil der Partition ist. Ein negatives $\rho(\mathcal{P})$ steht für den Mangel an Wegenden für T, selbst wenn jeder sonstige Bestandteil des Graphen alle seine Wege nach T richtet und die vorgegebenen Grade in T ignoriert werden. Im Einzelnen sind dies noch einmal: $f(X \cap H)$ viele Wege von T zu X; $|X \setminus H|$ Wege von T zu T über Knoten aus $X \setminus H$, also $f(X \setminus H) = 2|X \setminus H|$ Wegenden für T; und bis auf die Rundungsproblematik wird jede Kante von T zu $H \setminus (X \cup H)$ als Weg genutzt und je zwei Randknoten von $C_i \setminus H$ liefern einen T-Weg.

Allerdings ist in manchen Situationen die Schreibweise mit ν besser geeignet, z.B. dann, wenn Monotonieeigenschaften von $\rho(\mathcal{P})$ zu zeigen sind.

Zu bemerken ist noch, dass $\forall \mathcal{P} \in \beta(G, H)$ wegen $\nu(G, H, \hat{f}, \mathcal{P}) \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\rho(\mathcal{P}) \equiv \hat{f}(H) \pmod 2.$$

3.2 Operationen auf Partitionen

Die nächste Definition hilft, Partitionen etwas leichter handhabbar zu machen.

Definition 11 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \dots, C_n) \in \beta(G, H)$. $\mathcal{P}$ wird eine H-kompatible Partition* in Standardform *genannt, falls $\forall i, 1 \leq i \leq n$, gilt $\mathrm{c}(G[C_i]) = 1$. (Insbesondere $C_i \neq \emptyset$.)*

Standardform bedeutet aber nicht, dass die C_i Komponenten von $G - X - T$ sind, sondern bloß, dass Knoten unterschiedlicher Komponenten nicht in dem gleichen C_i sein können.

Es genügt, in Korollar 2 das Minimum über alle $\mathcal{P} \in \beta(G, H)$, die in Standardform sind, zu bilden. Dies zeigt das nächste Lemma:

Lemma 2 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$, $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$, $\mathcal{P} \in \beta(G, H)$. Dann existiert ein $\hat{\mathcal{P}} \in \beta(G, H)$ in Standardform mit $\rho(\hat{P}) \leq \rho(\mathcal{P})$.*

Beweis: Sei $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$. Sei $1 \leq i \leq n$. Eine leere Menge $C_i = \emptyset$ kann einfach aus $\mathcal{P}$ herausgenommen werden, ohne die H-Kompatibilität oder $\rho(\mathcal{P})$ zu beeinflussen. Sei $C_i \neq \emptyset$ mit $\mathrm{c}(G[C_i]) \geq 2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $i = n$. Es sei $\mathcal{C}(G[C_i]) = \{\hat{C}_n, \ldots, \hat{C}_{\hat{n}}\}, \hat{n} \geq n + 1$. Dann ist

$$\hat{P} := (T, X, C_1, \ldots, C_{n-1}, \hat{C}_n, \ldots, \hat{C}_{\hat{n}})$$

eine Partition von V. Wegen

$$\mathrm{E}(C_n) = \bigcup_{n \leq i \leq \hat{n}} \mathrm{E}(\hat{C}_i)$$

wird T von $\hat{\mathcal{P}}$ getrennt und mit

$$\mathrm{bd}_{G-X-T}(C_n) = \bigcup_{n \leq i \leq \hat{n}} \mathrm{bd}_{G-X-T}(\hat{C}_i)$$

ist $\hat{\mathcal{P}} \in \beta(G, H)$. Für $\rho(\hat{P}) \leq \rho(\mathcal{P})$ genügt es, $\nu(G, H, \hat{f}, \hat{\mathcal{P}}) \leq \nu(G, H, \hat{f}, \mathcal{P})$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}
& \nu(G, H, \hat{f}, \mathcal{P}) - \nu(G, H, \hat{f}, \hat{\mathcal{P}}) \\
= & \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\hat{f}(C_n \cap H) + |\mathrm{E}(C_n \cap H, T)| + |\mathrm{bd}_{G-X}(C_n) \setminus H| \right) \right\rfloor \\
& - \sum_{n \leq i \leq \hat{n}} \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\hat{C}_i \cap H) + |\mathrm{E}(\hat{C}_i \cap H, T)| + |\mathrm{bd}_{G-X}(\hat{C}_i) \setminus H| \right) \right\rfloor \\
\geq & \; 0,
\end{aligned}$$

da für beliebige endliche Mengen $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt $\lfloor \sum_{i \in I} a_i \rfloor \geq \sum_{i \in I} \lfloor a_i \rfloor$.

Durch Wiederholung dieses Schrittes kann also eine Partition $\hat{P} = (T, X, \hat{C}_1, \ldots, \hat{C}_{\hat{n}}) \in \beta(G, H)$ mit $\rho(\hat{\mathcal{P}}) \leq \rho(\mathcal{P})$ und $\forall i, 1 \leq i \leq \hat{n}, \mathrm{c}(G[\hat{C}_i]) = 1$ gefunden werden. $\square$

Es kann hilfreich sein, beim Übergang von G zu $G - Z$ Partitionen weiterzuverwenden. Dies geht folgendermaßen:

Definition 12 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$, $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$ und $Z \subseteq V$. Dann sei*

$$\mathcal{P} - Z := (T \setminus Z, X \setminus Z, C_1 \setminus Z, \ldots, C_n \setminus Z).$$

Beobachtung 12 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$, $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$ und $Z \subseteq V$. Dann ist $\mathcal{P} - Z \in \beta(G - Z, H \setminus Z)$. Falls $Z \subseteq V \setminus H$, dann gilt außerdem $\rho(\mathcal{P} - Z) \leq \rho(\mathcal{P})$.*

Beweis: $\mathcal{P} - Z$ ist eine Partition von $V \setminus Z$. Es ist $\forall i, 1 \leq i \leq n$,

$$\mathrm{bd}_{G-Z-(X\setminus Z)-(T\setminus Z)}(C_i \setminus Z) \subseteq \mathrm{bd}_{G-X-T}(C_i).$$

und somit ist $\mathrm{bd}_{G-Z-(X\setminus Z)-(T\setminus Z)}(C_i \setminus Z) \cap H = \emptyset$. Auch trennt $\mathcal{P} - Z$ jeden $(T \setminus Z)$-Weg in $G - Z$. Es folgt $\mathcal{P} - Z \in \beta(G - Z, H \setminus Z)$.

Falls $Z \subseteq V \setminus H$ ist, so sind die einzigen Terme, die sich von $\rho(\mathcal{P})$ zu $\rho(\mathcal{P} - Z)$ verändern können, $f(X)$ und $|\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H|$ und deren Einfluss auf $\mathrm{q}(\mathcal{P})$. Da $f(X \setminus Z) \leq f(X)$, ist hier alles in Ordnung. Es ist $\mathrm{bd}_{G-Z-X}(C_i \setminus Z) \setminus H \subseteq \mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H$ und damit $|\mathrm{bd}_{G-Z-X}(C_i \setminus Z) \setminus H| \leq |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H|$. Falls sich der Anteil von C_i an q verändert, so kann das nicht an $f(C_i \cap H)$ oder $\mathrm{E}(C_i \cap H, T)$ liegen, da $C_i \cap H = (C_i \setminus Z) \cap H$. Also ist $|\mathrm{bd}_{G-Z-X}(C_i \setminus Z) \setminus H| \leq |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - 1$ und dies gleicht die Veränderung in q aus. Damit ist $\rho(\mathcal{P} - Z) \leq \rho(\mathcal{P})$. $\square$

Außerdem können beliebige Kanten aus G gelöscht werden und $\mathcal{P}$ bleibt dabei H-kompatibel, denn die Anforderungen an einen Trenner werden dadurch schwächer. Allerdings ist zu erwarten, dass das Löschen von Kanten den Faktoren schadet, $\rho(\mathcal{P})$ also kleiner wird.

Beobachtung 13 *Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V, E')$ Graphen mit $E' \subseteq E$. Sei $\mathcal{P} \in \beta(G, H)$. Dann ist $\mathcal{P} \in \beta(G', H)$ und es gilt*

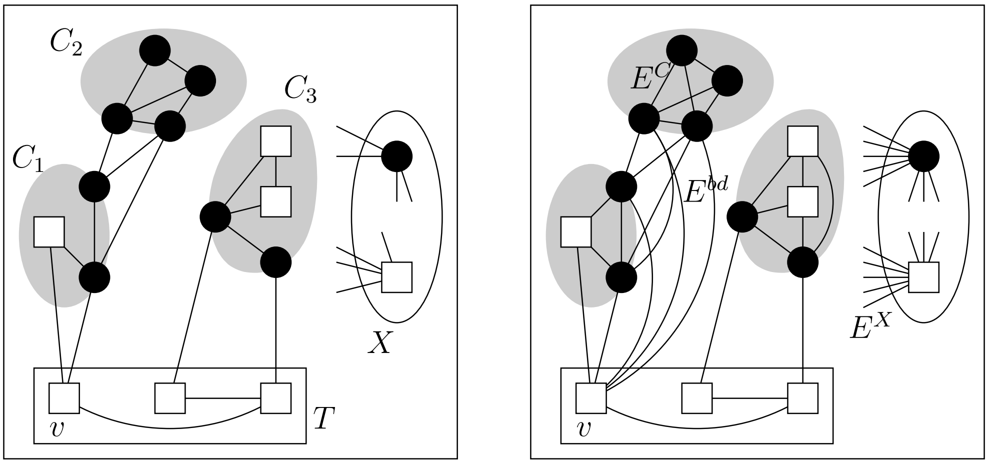
$$\rho_{G'}(\mathcal{P}) \leq \rho_G(\mathcal{P}).$$

Beweis: Die H-Kompatibiliät von $\mathcal{P}$ in G' folgt sofort aus $E' \subseteq E$: Es gilt $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $\mathrm{bd}_{G'-T-X}(C_i) \subseteq \mathrm{bd}_{G-T-X}(C_i)$ und damit ist $\mathrm{bd}_{G'-X-T}(C_i) \cap H = \emptyset$. Auch ist $G' - \mathcal{P} \subseteq G - \mathcal{P}$ und enthält damit keinen T-Weg.

Die Monotonie von ρ wird mittels ν gezeigt: Die Terme $f(X), \hat{f}(X \cap H), |X \setminus H|$ und $f(C_i \cap H)$,$1 \leq i \leq n$, sind in $\nu(G, H, \hat{f}, \mathcal{P})$ und $\nu(G', H, \hat{f}, \mathcal{P})$ gleich. Weiter gilt $|E_{G'}(T)| \leq |E_G(T)|$ und $|E_{G'}(C_i \cap H, T)| \leq |E_G(C_i \cap H, T)|$. Auch ist $|\mathrm{bd}_{G'-X}(C_i) \setminus H| \leq |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H|$ und damit werden alle Terme nicht größer. Es folgt $\nu(G', H, \hat{f}, \mathcal{P}) \leq \nu(G, H, \hat{f}, \mathcal{P})$. $\square$

Umgekehrt wird für viele Beweise der Graph G um bestimmte Kanten erweitert. Diese sind allerdings so gewählt, dass sie weder Einfluss auf die H-Kompatibilität von $\mathcal{P}$ haben noch in $\rho(\mathcal{P})$ gezählt werden.

Definition 13 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$. Es sei $G - \mathcal{P}$ der zugehörige Graph aus Definition 7, der keinen T-Weg*



Beim Bilden von $G^{\mathcal{P}}$ werden alle Kanten von X zu allen anderen Knoten, alle möglichen Kanten innerhalb von jedem C_i und auch alle möglichen Kanten in jeder Komponente von $G - \mathcal{P}$ ergänzt. Durch letztere Kanten wird v direkt mit Randknoten von C_2 verbunden, obwohl vorher v nur mit C_1 verbunden war.

Abbildung 11: G und $G^{\mathcal{P}}$

enthalten darf. Es sei

$$\begin{aligned}
E^X &:= \{xy : x \in X, y \in V \setminus \{x\}\} \\
E^C &:= \bigcup_{1 \le i \le n} \{xy : \{x,y\} \subseteq C_i, x \neq y\} \\
E^{bd} &:= \bigcup_{C \in \mathcal{C}(G-\mathcal{P})} \{xy : \{x,y\} \subseteq C, x \neq y\} \setminus E^C \\
E^{\mathcal{P}} &:= E \cup E^X \cup E^C \cup E^{bd}.
\end{aligned}$$

Dann wird $G^{\mathcal{P}} := (V, E^{\mathcal{P}})$ *der* kantenmaximale Graph zu $\mathcal{P}$ *genannt.*

Wirklich "kantenmaximal" muss $G^{\mathcal{P}}$ übrigens nicht sein, es kann noch andere Kanten geben, die sich hinzufügen lassen, ohne $\rho(\mathcal{P})$ zu verändern. Das Interessante an $G^{\mathcal{P}}$ ist aber, dass die hinzugefügten Kanten die Struktur der Partition nicht verändern. Die folgende Beobachtung zeigt dies.

Beobachtung 14 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\mathcal{P} \in \beta(G, H)$. Sei $G^{\mathcal{P}}$ der kantenmaximale Graph zu $\mathcal{P}$. Dann ist $\mathcal{P} \in \beta(G^{\mathcal{P}}, H)$ und $\rho(\mathcal{P})$ ist in G und $G^{\mathcal{P}}$ gleich, d.h.*

$$\rho_G(\mathcal{P}) = \rho_{G^{\mathcal{P}}}(\mathcal{P}).$$

Beweis: Sei $E^{\mathcal{P}} = E \cup E^X \cup E^C \cup E^{bd}$ wie in Definition 13.

Zuerst wird $\mathcal{P} \in \beta(G^{\mathcal{P}}, H)$ gezeigt. Die erste Bedingung in Definition 7 ist offensichtlich erfüllt. Auch die zweite ist nicht verletzt: Die einzigen Kanten, die zwischen Partitionsmengen C_i und C_j hinzugefügt werden, sind in E^{bd}, und damit zwischen Knoten aus $G - \mathcal{P}$. Die einzigen H-Knoten in $G - \mathcal{P}$ sind aber die in T, somit kann auch in $G^{\mathcal{P}}$ kein H-Knoten im Rand einer Menge C_i liegen.

Auch die dritte Bedingung gilt, wie leicht einzusehen ist. In $G^{\mathcal{P}} - \mathcal{P}$ existiert genau dann kein T-Weg, wenn in jeder Komponente $C \in \mathcal{C}(G^{\mathcal{P}} - \mathcal{P})$ höchstens ein Knoten aus T liegt. E^X und E^C sind in $G^{\mathcal{P}} - \mathcal{P}$ gelöscht und haben keinen Einfluss auf dessen Komponenten. Damit ist $\mathrm{E}(G^{\mathcal{P}} - \mathcal{P}) = \mathrm{E}(G - \mathcal{P}) \cup \mathrm{E}^{bd}$. Aber Kanten aus E^{bd} liegen per Definition innerhalb von Komponenten von $G - \mathcal{P}$. Somit bestehen die Komponenten von $G - \mathcal{P}$ und $G^{\mathcal{P}} - \mathcal{P}$ aus den gleichen Knoten, weshalb auch in $G^{\mathcal{P}} - \mathcal{P}$ kein T-Weg existiert.

Damit ist $\mathcal{P}$ auch in $G^{\mathcal{P}}$ H-kompatibel.

Es soll nun gezeigt werden, dass sich kein Term von $\rho(\mathcal{P})$ oder $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ beim Übergang zu $G^{\mathcal{P}}$ verändert. Dies trifft sicherlich auf $f(X)$, $f(T)$ sowie $f(C_i \cap H)$ und $|\mathrm{E}(C_i \cap H, T)|$, $1 \leq i \leq n$, zu. Die Kanten in E^X und E^C gehen nirgends in $\rho(\mathcal{P})$ ein, da sie die Ränder in $G - X$ nicht beeinflussen und auch keine Kante zu $\mathrm{E}_{G-X}(T, H)$ hinzufügen. Es bleiben also die Kanten aus E^{bd}. Da jede Komponente von $G - \mathcal{P}$ höchstens einen Knoten aus H enthält, verändern diese Kanten $\mathrm{E}_{G-X}(T, H)$ nicht. Die Ränder $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H$ können durch zusätzliche Kanten nicht kleiner werden. Sie werden aber auch nicht größer: Sei $x \in \mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i) \setminus H$. Dann enthält die Komponente von $G^{\mathcal{P}} - \mathcal{P}$, in der x liegt, mindestens noch einen anderen Knoten y. Wie oben gezeigt, liegen diese Knoten auch in $G - \mathcal{P}$ in der selben Komponente. Damit gibt es einen Weg in $G - \mathcal{P}$ von x nach y. In $G - \mathcal{P}$ hat x aber keinen Nachbarn in C_i, also muss dieser Weg über T oder eine andere Komponente C_j führen. Damit liegt x bereits in $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$. Somit ist $|\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| = |\mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i) \setminus H|$ und damit ändert sich auch dieser Bestandteil von $\rho(\mathcal{P})$ nicht. $\square$

Nun soll eine weitere Operation auf H-kompatiblen Partitionen definiert werden: Mit etwas Vorsicht lässt sich ein Knoten aus T herausnehmen und in die C_i einfügen. Das Ziel wird es dann sein, eine Partition mit minimalem T zu finden.

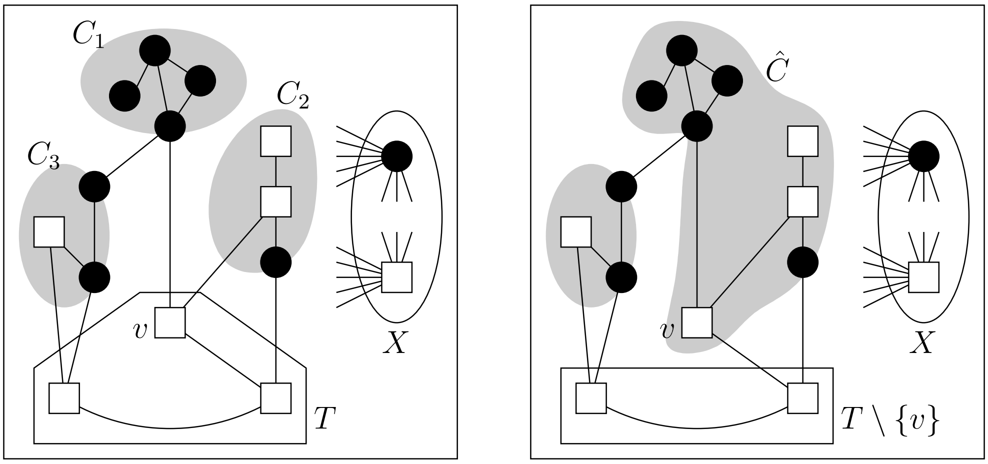
Definition 14 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$. Sei $v \in T$ und*

$$I := \{i : \mathrm{N}(v) \cap C_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n\}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $I = \{1, \ldots, j\}$ für ein $j \in \mathbb{N}$ oder $I = \emptyset$ und $j = 0$. Es sei

$$\hat{C} := \{v\} \cup \bigcup_{i \in I} C_i.$$

Dann sei $\mathcal{P}^{v \to C} := (T \setminus \{v\}, X, \hat{C}, C_{j+1}, \ldots, C_n)$.



Da v aus T nach C verschoben wird, müssen die Partitionsmengen C_1 und C_2 zu $\hat{C}$ zusammengefasst werden. X wird nicht verändert.

Abbildung 12: Ein Knoten wird aus T herausgeschoben

Beobachtung 15 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Sei $\mathcal{P} \in \beta(G, H)$. Sei $v \in T$ und $\mathcal{P}^{v \to C}$ wie in Definition 14. Dann ist $\mathcal{P}^{v \to C}$ H-kompatibel.*

Beweis: Sei $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n)$. Seien I, j und $\hat{C}$ wie in Definition 14. Es ist leicht erkennbar, dass $\mathcal{P}^{v \to C}$ eine Partition von V ist. Auch ist $T \setminus \{v\} \subseteq H$.

Bei einer Partitionsmenge C_i, $i \notin I$, die keinen Nachbarn von v enthält und in $\mathcal{P}^{v \to C}$ weiterhin eine eigene Menge ist, sind die Ränder $\mathrm{bd}_{G-X-T}(C_i)$ und $\mathrm{bd}_{G-X-(T \setminus \{v\})}(C_i)$ gleich. Zu $\hat{C}$ sei bemerkt, dass v nicht in $G - X - (T \setminus \{v\})$ im Rand liegen kann, denn $\mathrm{N}_{G-X}(v) \setminus (T \setminus \{v\}) = \mathrm{N}_{G-X-(T \setminus \{v\})}(v)$ ist per Definition in $\hat{C}$ enthalten. Somit ist

$$\mathrm{bd}_{G-X-(T \setminus \{v\})}(\hat{C}) \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathrm{bd}_{G-X-T}(C_i)$$

und die zweite Bedingung der H-Kompatibilität erfüllt.

Schließlich ist $\bigcup_{1 \leq i \leq j} \mathrm{E}(C_i) \subseteq \mathrm{E}(\hat{C})$ und damit

$$\begin{aligned}
G - \mathcal{P}^{v \to C} &= G - \mathrm{E}(\hat{C}) - \bigcup_{j < i \leq n} \mathrm{E}(C_i) - \mathrm{E}(T \setminus \{v\}) - (X \cup (H \setminus (T \setminus \{v\}))) \\
&\subseteq G - \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathrm{E}(C_i) - \mathrm{E}(T \setminus \{v\}) - (X \cup \{v\} \cup (H \setminus T))) \\
&\subseteq G - \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathrm{E}(C_i) - \mathrm{E}(T) - (X \cup (H \setminus T)) \\
&= G - \mathcal{P}.
\end{aligned}$$

Es wird also jeder $(T \setminus \{v\})$-Weg durch $\mathcal{P}^{v \to C}$ getrennt. $\square$

In $\mathcal{P}^{v\to C}$ werden genau die C_i zu $\hat{C}$ zusammengefasst, die sonst dafür sorgen würden, dass v im Rand von $\hat{C}$ liegt. Ohne diese Vereinigung ist also keine H-Kompatibilität von $\mathcal{P}^{v\to C}$ möglich.

Allerdings ist es nicht auszuschließen, dass $\rho(\mathcal{P}^{v\to C}) > \rho(\mathcal{P})$ ist, die neue Partition also "schlechter" ist. Falls dies für alle $v \in T$ zutrifft, ist T also in gewisser Weise minimal. Falls G bereits kantenmaximal ist, lässt sich dann der Maximalgrad in $G[T]$ abschätzen.

Lemma 3 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$. Falls gilt $G = G^{\mathcal{P}}$ und*

$$\forall v \in T \quad \rho(\mathcal{P}^{v\to C}) > \rho(\mathcal{P}),$$

dann ist $|E(v, T)| \leq \hat{f}(v) - 2$ für alle $v \in T$.

Beweis: Für $T = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei also $T \neq \emptyset$.

f sei wieder die Fortsetzung von $\hat{f}$ auf V mit 2. Sei $v \in T$ und $T' := T \setminus \{v\}$ und $\mathcal{P}' := \mathcal{P}^{v\to C} = (T', X, \hat{C}, C_{j+1}, \ldots, C_n)$ wie in Definition 14. Nach der Annahme ist $\rho(\mathcal{P}') > \rho(\mathcal{P})$ und wegen $\rho(\mathcal{P}') \equiv f(H) \equiv \rho(\mathcal{P}) \pmod 2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 2 \;\leq\;& \rho(\mathcal{P}') - \rho(\mathcal{P}) \\ =\;& f(X) - f(T') + \sum_{x\in T'} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| \\ & + |\mathrm{bd}_{G-X}(\hat{C}) \setminus H| + \sum_{j<i\leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - \mathrm{q}(\mathcal{P}') \\ & - \left(f(X) - f(T) + \sum_{x\in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| + \sum_{1\leq i\leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - \mathrm{q}(\mathcal{P}) \right). \end{aligned}$$

Es ist $-f(T') + f(T) = f(v)$. Die Kanten $\mathrm{E}(v, T') = \mathrm{E}(v, T)$ werden in $\rho(\mathcal{P}')$ nur noch einmal statt zweimal gezählt. Kanten in $\mathrm{E}_{G-X}(v, H \setminus T)$ werden in $\rho(\mathcal{P}')$ gar nicht mehr gezählt. Damit ist

$$\begin{aligned} 2 \;\leq\;& f(v) - |\mathrm{E}(v, T)| - |\mathrm{E}_{G-X}(v, H \setminus T)| \\ & + |\mathrm{bd}_{G-X}(\hat{C}) \setminus H| - \sum_{1\leq i\leq j} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| + \mathrm{q}(\mathcal{P}) - \mathrm{q}(\mathcal{P}'). \end{aligned}$$

Jedes C_i mit $C_i \cap \mathrm{N}(v) = \emptyset$ wird überhaupt nicht beeinflusst, und wird in $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ genau dann gezählt, wenn es in $\mathrm{q}(\mathcal{P}')$ gezählt wird. Damit ist

$$|\mathrm{q}(\mathcal{P}') - \mathrm{q}(\mathcal{P})| \leq |\mathrm{N}_{G-X}(v) \setminus T| = |\mathrm{E}_{G-X}(v, H \setminus T)| + |\mathrm{N}_{G-X}(v) \setminus H|.$$

Da $\hat{C} \setminus H$ die Vereinigung der $C_i \setminus H, i \in I$, enthält, gilt

$$\mathrm{bd}_{G-X}(\hat{C}) \setminus H \subseteq \bigcup_{1 \le i \le j} \mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H.$$

Ein Knoten $x \in \mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H$, der ein Nachbar von v ist, ist aber nicht mehr im Rand von $\hat{C}$: Im Rand zu T' kann x nicht liegen, denn die einzige Verbindung zu T war v (sonst gäbe es einen T-Weg in $G - \mathcal{P}$). Ein Nachbar y von x in einer anderen Partitionsmenge C_j (woraus $y \notin H$ folgt) bedeutet aber, dass x und y in der selben Komponente von $G - \mathcal{P}$ sind und damit auch v und y. Da $G = G^{\mathcal{P}}$ gilt, ist $vy \in \mathrm{E}(G)$. Somit ist $C_j \subseteq \hat{C}$ und insbesondere $y \in \hat{C}$. Also ist $x \notin \mathrm{bd}_{G-X}(\hat{C})$.

Dies ergibt

$$|\mathrm{bd}_{G-X}(\hat{C}) \setminus H| - \sum_{1 \le i \le j} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| \le -|\mathrm{N}_{G-X}(v) \setminus H|$$

und zusammen mit der Abschätzung für $\mathrm{q}(\mathcal{P}') - \mathrm{q}(\mathcal{P})$ folgt

$$2 \le f(v) - |\mathrm{E}(v, T)|.$$

$\square$

Eine Partition $\mathcal{P}$ mit einem T, welches diese Bedingung erfüllt, kann im Prinzip algorithmisch gefunden werden: Ein Knoten $v \in T$ mit $\rho(\mathcal{P}^{v \to C}) \le \rho(\mathcal{P})$ wird einfach aus T herausgenommen, also $\mathcal{P}$ durch $\mathcal{P}^{v \to C}$ ersetzt. Um diesen Schritt mehrmals durchzuführen, müsste dann wieder gelten, dass G der kantenmaximale Graph zu $\mathcal{P}^{v \to C}$ ist, was aber nicht unbedingt stimmen muss.

Im Allgemeinen ist nicht einmal G kantenmaximal. Es genügt jedoch, die Voraussetzung in $G^{\mathcal{P}}$ zu zeigen, denn $G[T] = G^{\mathcal{P}}[T]$. Dass der Algorithmus dann trotzdem funktioniert, steckt im Beweis des folgenden Lemmas:

Lemma 4 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$.*

Dann existiert eine Partition $P' = (T', X', C'_1, \ldots, C'_{n'}) \in \beta(G, H)$ mit $T' \subseteq T$, $X' = X$, $\rho(\mathcal{P}') \le \rho(\mathcal{P})$ und für alle $v \in T'$ gilt $|\mathrm{E}(v, T')| \le \hat{f}(v) - 2$.

Beweis: Laut Beobachtung 14 ist $\mathcal{P} \in \beta(G^{\mathcal{P}}, H)$. Angenommen es gilt

$$\forall\, v \in T \quad \rho_{G^{\mathcal{P}}}(\mathcal{P}) < \rho_{G^{\mathcal{P}}}(\mathcal{P}^{v \to C}),$$

wobei der Schritt von $\mathcal{P}$ zu $\mathcal{P}^{v \to C}$ in $G^{\mathcal{P}}$ durchgeführt werden soll. (Da v in $G^{\mathcal{P}}$ möglicherweise mehr Nachbarn hat als in G, ist die Angabe, worin $\mathcal{P}^{v \to C}$ gebildet wird, wichtig.) Dann folgt aus Lemma 3 und $|E_G(v, T)| = |E_{G^{\mathcal{P}}}(v, T)|$ die Behauptung.

Ansonsten ist $T \neq \emptyset$ und es existiert ein $v \in T$ mit $\rho_{G^{\mathcal{P}}}(\mathcal{P}) \ge \rho_{G^{\mathcal{P}}}(\mathcal{P}^{v \to C})$. Sei $P' := P^{v \to C}$ (wieder in $G^{\mathcal{P}}$ gebildet).

Wegen $\mathrm{E}(G) \subseteq \mathrm{E}(G^{\mathcal{P}})$ ist laut Beobachtung 13 auch $\mathcal{P}' \in \beta(G,H)$ und es gilt

$$\rho_G(\mathcal{P}') \leq \rho_{G^{\mathcal{P}}}(\mathcal{P}') \leq \rho_{G^{\mathcal{P}}}(\mathcal{P}) = \rho_G(\mathcal{P}).$$

Falls $\mathcal{P}'$ die Voraussetzung von Lemma 3 auch nicht erfüllt (diesmal in $G^{\mathcal{P}'}$), kann dieser Schritt wiederholt werden. Zu beachten ist noch, dass X in allen diesen Partitionen gleich ist. □

Somit lässt sich auch in beliebigen Graphen eine Partition mit minimalem T finden. Das denkbar kleinste T, nämlich $T = \emptyset$, zeigt erste Ähnlichkeiten zwischen $\rho(\mathcal{P})$ und der Toughness von H:

Beobachtung 16 *Sei $G = (V,E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Es sei $\mathcal{P} \in \beta(G,H)$ eine Partition in Standardform, $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n)$. Falls $T = \emptyset$ ist, so gilt $\rho(\mathcal{P}) \geq f(X) - \mathrm{c}^H(G - X)$.*

Beweis: Da $G-X-T = G-X$, ist für alle $i, 1 \leq i \leq n$, $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \cap H = \emptyset$ und damit $|\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| = |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)|$. Es gilt $|\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)| \geq 1$ genau dann, wenn C_i keine Komponente von $G - X$ ist. Für ein C_i mit $|\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)| \geq 1$ lässt sich durch diesen Term aber der Anteil von C_i an $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ ausgleichen, der höchstens 1 ist. Somit gilt

$$\rho(\mathcal{P}) = f(X) + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)| - \mathrm{q}(P) \geq f(X) - \mathrm{c}(G - X).$$

Da aber für eine auch in $\mathcal{P}$ enthaltene Komponente $C_i \in \mathcal{C}(G - X)$ mit $C_i \cap H = \emptyset$ immer $\mathrm{q}(C_i) = 0$ gelten muss, folgt die Behauptung. □

Das folgende Lemma zeigt, dass es in $G^{\mathcal{P}} - \{v\}$ auch keinen H-lokalen $(k-1)$-Faktor mit Defekt höchstens 1 geben kann, wenn es in G keinen H-lokalen k-Faktor mit Defekt höchstens 1 gibt, aber ein Knoten v in der Testmenge T enthalten ist, der zu allen anderen Knoten von H verbunden ist. Die Vorstellung dahinter ist, dass ein solches v an den kleineren Faktor angefügt werden könnte, wenn es diesen gäbe. Es sei noch bemerkt, dass beliebige von X ausgehende Kanten in $G^{\mathcal{P}}$ hinzugefügt werden können. Damit reicht es schon, dass v in G zu allen anderen $H \setminus X$ verbunden ist.

Lemma 5 *Sei $G = (V,E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Sei $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G,H)$. Sei $v \in T$ mit $H \setminus X \subseteq \mathrm{N}_{G-X}(v) \cup \{v\}$. Sei $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq |H| - 1$.*

Sei $\bar{G} := G^{\mathcal{P}} - \{v\}$, $\bar{H} := H \setminus \{v\}$, $\bar{k} := k - 1$ und $\bar{P} := (\bar{T}, X, C_1, \ldots, C_n) = \mathcal{P} - v \in \beta(\bar{G}, \bar{H})$, also $\bar{T} = T \setminus \{v\}$.

Sei $\rho(\mathcal{P})$ der Wert von $\rho_G(\mathcal{P})$ für $\hat{f} \equiv k$ und $\bar{\rho}(\bar{\mathcal{P}})$ der Wert von $\rho_{\bar{G}}(\bar{\mathcal{P}})$ für $\hat{\bar{f}} \equiv \bar{k}$. Dann ist $\bar{\rho}(\bar{\mathcal{P}}) \leq \rho(\mathcal{P})$.

Beweis: Seien f und $\bar{f}$ die Fortsetzungen von $\hat{f}$ bzw. $\hat{\bar{f}}$ auf V bzw. $V \setminus \{v\}$ mit 2. Es gilt

$$\begin{aligned}\bar{f}(X) &= f(X) - |X \cap H| \\ \bar{f}(\bar{T}) &= f(T) - k - (|T| - 1)\end{aligned}$$

Da v in $G^{\mathcal{P}}$ zu ganz $H \setminus \{v\}$ verbunden ist, folgt unter Beachtung von $\mathrm{E}(T,H) = \mathrm{E}_{G^{\mathcal{P}}}(T,H)$:

$$\begin{aligned}\sum_{x \in \bar{T}} |\mathrm{E}_{\bar{G}}(x, \bar{T})| &= \sum_{x \in T} |\mathrm{E}(x,T)| - 2(|T| - 1) \\ \sum_{x \in \bar{T}} |\mathrm{E}_{\bar{G}-X}(x, \bar{H} \setminus \bar{T})| &= \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H \setminus T)| - |H \setminus (X \cup T)|.\end{aligned}$$

Alles zusammen ergibt mit $\rho(\mathcal{P}) = \rho_{G^{\mathcal{P}}}(\mathcal{P})$ und $\forall i \; \mathrm{q}(C_i) = \mathrm{q}_{G^{\mathcal{P}}}(C_i)$

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(\bar{P}) \leq\; & \rho_{G^{\mathcal{P}}}(\mathcal{P}) - |X \cap H| + k + (|T| - 1) - 2(|T| - 1) - |H \setminus (X \cup T)| \\ & + \sum_{1 \leq i \leq n} \big(|\mathrm{bd}_{\bar{G}-X}(C_i) \setminus \bar{H}| - |\mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i) \setminus H| - \bar{\mathrm{q}}(C_i) + \mathrm{q}_{G^{\mathcal{P}}}(C_i)\big) \\ =\; & \rho(\mathcal{P}) - |X \cap H| - |T| - |H \setminus (X \cup T)| + k + 1 \\ & + \sum_{1 \leq i \leq n} \big(|\mathrm{bd}_{\bar{G}-X}(C_i) \setminus \bar{H}| - |\mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i) \setminus H| - \bar{\mathrm{q}}(C_i) + \mathrm{q}(C_i)\big) \\ =\; & \rho(\mathcal{P}) - |H| + k + 1 \\ & + \sum_{1 \leq i \leq n} \big(|\mathrm{bd}_{\bar{G}-X}(C_i) \setminus \bar{H}| - |\mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i) \setminus H| - \bar{\mathrm{q}}(C_i) + \mathrm{q}(C_i)\big)\end{aligned}$$

Da für alle $i, 1 \leq i \leq n$, $\mathrm{bd}_{\bar{G}-X}(C_i) \subseteq \mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i)$ ist, folgt insbesondere

$$\mathrm{bd}_{\bar{G}-X}(C_i) \setminus \bar{H} \subseteq \mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i) \setminus H.$$

Falls $|\mathrm{bd}_{\bar{G}-X}(C_i) \setminus \bar{H}| < |\mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i) \setminus H|$ ist, so ist

$$|\mathrm{bd}_{\bar{G}-X}(C_i) \setminus \bar{H}| - |\mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i) \setminus H| \leq -1 \leq \bar{\mathrm{q}}(C_i) - \mathrm{q}(C_i)$$

und der Summand zu C_i kann durch 0 nach oben abgeschätzt werden.

Andernfalls ist $|\mathrm{bd}_{\bar{G}-X}(C_i) \setminus \bar{H}| = |\mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i) \setminus H|$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{q}}(C_i) \equiv\; & \bar{f}(C_i \cap \bar{H}) + |\mathrm{E}_{\bar{G}}(C_i \cap \bar{H}, \bar{T})| + |\mathrm{bd}_{\bar{G}-X}(C_i) \setminus \bar{H}| \\ \equiv\; & f(C_i \cap H) - |C_i \cap H| + |\mathrm{E}(C_i \cap H, T)| - |C_i \cap H| + |\mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i) \setminus H| \\ \equiv\; & f(C_i \cap H) + |\mathrm{E}(C_i \cap H, T)| + |\mathrm{bd}_{G^{\mathcal{P}}-X}(C_i) \setminus H| \\ \equiv\; & \mathrm{q}_{G^{\mathcal{P}}}(C_i) \\ \equiv\; & \mathrm{q}(C_i) \pmod 2.\end{aligned}$$

Also wird ein solches C_i genau dann in $\bar{\mathrm{q}}(\bar{\mathcal{P}})$ gezählt, wenn es in $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ gezählt wird. Damit ist der Summand zu C_i exakt 0.

Also ist

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(\bar{\mathcal{P}}) &\leq \rho(\mathcal{P}) - |H| + k + 1 \\ &\leq \rho(\mathcal{P}).\end{aligned}$$

□

3.3 Verschiedenes

Zuerst ein sehr einfaches Resultat zur chromatischen Zahl $\chi(G)$.

Beobachtung 17 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $k \in \mathbb{N}_0$ und für alle $x \in V$ sei der Grad $\mathrm{d}(v) \leq k$. Dann ist $\chi(G) \leq k + 1$.*

Beweis: Der Beweis ist algorithmisch. Alle Knoten seien am Anfang nicht gefärbt. Ein $x \in V$ erhält dann eine beliebige Farbe. Da jeder weitere Knoten v maximal k Nachbarn hat, wird eine der $k + 1$ Farben in $\mathrm{N}(v)$ nicht verwendet. Damit kann v eingefärbt werden. □

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ und die Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$ stehen in einem simplen Zusammenhang zueinander.

Beobachtung 18 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann ist $\chi(G)\alpha(G) \geq |V|$.*

Beweis: Eine Färbung von G mit $\chi(G)$ Farben entspricht einer Partition von V in $\chi(G)$ unabhängige Mengen, jede höchstens $\alpha(G)$ groß. □

Mit der Idee, dass man aus einem vollständigen Teilgraphen immer bloß einen Knoten in eine unabhängige Menge aufnehmen kann, bekommt man eine obere Schranke für die Unabhängigkeitszahl.

Beobachtung 19 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für $i, 1 \leq i \leq n$, sei $K_i \subseteq V$ mit $G[K_i]$ vollständig und es sei $V = \bigcup_{1 \leq i \leq n} K_i$. (Die K_i müssen nicht disjunkt sein.) Dann ist $\alpha(G) \leq n$.*

Beweis: Sei $U \subseteq V$ eine unabhängige Menge mit $|U| = \alpha(G)$. Für jedes $K_i, 1 \leq i \leq n$, gilt $|U \cap K_i| \leq 1$ und somit

$$|U| = |U \cap V| = |U \cap \bigcup_{1 \leq i \leq n} K_i| \leq \sum_{1 \leq i \leq n} |U \cap K_i| \leq n.$$

□

4 Resultate

4.1 Hauptaussagen

Nach der ganzen Vorarbeit kann nun die Beziehung zwischen H-lokalen Faktoren und der Toughness von H beleuchtet werden. Dies ist im Fall $k = 1$ sehr einfach möglich.

Lemma 6 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$ sei 1-tough in G. Dann existiert ein H-lokaler 1-Faktor mit Defekt höchstens 1 in G.*

Beweis: Angenommen es existiert kein H-lokaler 1-Faktor mit Defekt höchstens 1 in G. Nach Korollar 2 mit $\hat{f} \equiv 1$ und f der Fortsetzung von $\hat{f}$ auf V mit 2 gibt es dann ein $\mathcal{P} \in \beta(G, H)$ mit $\rho(\mathcal{P}) < -1$. Lemma 3 zeigt die Existenz einer Partition $\mathcal{P}' = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$ mit $\rho(P') \leq \rho(\mathcal{P}) < -1$, so dass $\forall v \in T$ gilt $|\mathrm{E}(v, T)| \leq \hat{f}(v) - 2 = -1$. Also muss $T = \emptyset$ gelten. $\mathcal{P}'$ lässt sich zu einer Partition $\mathcal{P}''$ in Standardform mit $\rho(\mathcal{P}'') \leq \rho(P') < -1$ umformen, ohne T oder X zu verändern. Wie in Beobachtung 16 gezeigt wurde, ist dann wegen $T = \emptyset$

$$-1 > \rho(\mathcal{P}'') \geq f(X) - \mathrm{c}^H(G - X).$$

Da $f(X) = |X \cap H| + 2|X \setminus H| \geq |X|$, gilt also

$$-1 > |X| - \mathrm{c}^H(G - X)$$

Für $\mathrm{c}^H(G - X) \geq 2$ ist dies ein Widerspruch zur 1-Toughness von H in G. Ansonsten ist $-1 > -\mathrm{c}^H(G - X) \geq -1$ auch ein Widerspruch.

Also enthält G einen H-lokalen 1-Faktor mit Defekt höchstens 1. □

Das folgende Lemma zeigt für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ eine ähnliche Aussage wie Korollar 1, ist aus technischen Gründen aber in einer negierten (und stärkeren) Weise formuliert.

Lemma 7 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $k \leq |H| - 1$. H sei t-tough in G. Für $\hat{f} \equiv k$ sei $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n) \in \beta(G, H)$ mit $\rho(\mathcal{P}) < -1$.*

Es sei $t \geq k$. Dann gilt $T \neq \emptyset$ und $t < k\frac{|T|}{\alpha(G[T])}$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\mathcal{P}$ in Standardform, denn das Umformen in Standardform verändert T nicht und auch $\rho(\mathcal{P})$ wird dadurch nicht größer.

Für $k = 1$ kann Lemma 6 angewandt werden, um zu zeigen, dass es einen H-lokalen 1-Faktor mit Defekt ≤ 1 geben muss. Also gibt es keine solche Partition $\mathcal{P}$ und es ist nichts zu zeigen. Deswegen wird im Folgenden von $k \geq 2$ ausgegangen.

Sei G ein Gegenbeispiel mit $|V|$ minimal unter allen Gegenbeispielen. Seien H, t, k und $\mathcal{P}$ die anderen Bestandteile des Gegenbeispiels und $t \geq k$. In einem Gegenbeispiel muss $T = \emptyset$ oder $t \geq k\frac{|T|}{\alpha(G[T])}$ gelten.

Offensichtlich ist $G[H]$ nicht vollständig, da sonst für $k \leq |H| - 1$ ein H-lokaler k-Faktor mit Defekt höchstens 1 direkt in $G[H]$ zu finden ist und dies widerspricht $\rho(\mathcal{P}) < -1$.

Da H t-tough ist, aber $G[H]$ nicht vollständig, kann nun versucht werden, durch die geschickte Wahl von Trennern zusätzliche Informationen zu gewinnen. Die Struktur von $\mathcal{P}$ wird dabei die Richtung weisen.

Wie sehen gute Trenner in G aus und was wird überhaupt getrennt? Bei der Menge X und insbesondere $X \cap H$ ist es nicht auszuschließen, dass sie sehr stark mit dem Rest des Graphen verbunden sind. X sollte also ein Teil des Trenners sein. Es bleibt der Graph $G - X$. Darin sind die Komponenten von $G - X - T$ und T selbst. Zwar können die Komponenten von $G - X - T$ auch H-Knoten enthalten, es ist aber nicht garantiert. Deshalb wird T, das nur aus H-Knoten besteht, hauptsächlich für die H-Komponenten sorgen.

Zuerst soll der Fall $T = \emptyset$ ausgeschlossen werden: Laut Beobachtung 16 ist dann $-1 > \rho(\mathcal{P}) \geq f(X) - \mathrm{c}^H(G - X) \geq |X| - \mathrm{c}^H(G - X)$. Falls $\mathrm{c}^H(G - X) \geq 2$ ist, folgt aus der t-Toughness von H in G, dass $|X| \geq t\mathrm{c}^H(G - X) \geq \mathrm{c}^H(G - X)$ sein muss, also $-1 > 0$. Ansonsten ist $\mathrm{c}^H(G - X) \leq 1$ und damit $-1 > |X| - \mathrm{c}^H(G - X) \geq -1$. Also gilt $T \neq \emptyset$ und deswegen $t \geq k\frac{|T|}{\alpha(G[T])}$.

T ist noch aus einem anderen Grund ein guter Kandidat für die Anwendung der Toughness. Durch $\rho(\mathcal{P}) < -1 \leq 0$ ist bereits eine untere Schranke für $f(T) = k|T|$ gegeben:

$$k|T| > f(X) + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - \mathrm{q}(\mathcal{P})$$

Die Toughness liefert folgendermaßen dazu passend eine obere Schranke für $t|T|$:

Da T in $G - \mathcal{P}$ komplett getrennt ist, wird sich ein Trenner für T stark an $G - \mathcal{P}$ orientieren. In $G - \mathcal{P}$ ist $\mathrm{E}(T)$ gelöscht, um Wege innerhalb von T zu verhindern. Ein Knotentrenner Z, wie er zum Anwenden der Toughness benötigt wird, kann diesen Schritt aber nicht imitieren und im Allgemeinen aus T nur $\alpha(G[T])$ H-Komponenten gewinnen, wie Beobachtung 4 zeigt. Sei also $U \subseteq T$ eine unabhängige Menge mit $|U| = \alpha(G[T])$. Statt T soll nun diese getrennt werden, wobei sich das Ergebnis dann wieder von $|U| = \alpha(G[T])$ auf $|T|$ skalieren lässt.

Ein erster Ansatz erklärt die weitere Beweisidee, wird im Anschluss aber noch ausgebaut werden: Die Knoten von U sind in $G - X - \mathrm{N}_{G-X}(U) \subseteq G - \mathrm{N}(U)$ isoliert. Falls $\mathrm{c}^H(G - X - \mathrm{N}_{G-X}(U)) \geq 2$ ist, gilt also $t|U| \leq |X| + |N_{G-X}(U)|$. Die Größe der Nachbarschaft $|N_{G-X}(U)|$ lässt sich wie folgt beschränken:

$$\begin{aligned} t|U| &\leq |X| + |\mathrm{N}_{G-X}(U)| \\ &\leq |X| + |\mathrm{E}_{G-X}(U,H)| + |\mathrm{N}_{G-X}(U) \setminus H| \\ &\leq |X| + |\mathrm{E}_{G-X}(U,H)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| \end{aligned}$$

Diese Terme lassen sich leicht gegen die entsprechenden Terme aus $\rho(\mathcal{P})$ abschätzen, z.B. ist $|X| \leq f(X)$. Jedoch wirkt ein bestimmter Term in $\rho(\mathcal{P})$ in die falsche Richtung: Zu $-\mathrm{q}(\mathcal{P})$ gibt es kein Gegenstück. Dieses müsste die Größe des Trenners weiter einschränken. Es folgt aber

$$\begin{aligned} t\alpha(G[T]) &\leq |X| + |\mathrm{E}_{G-X}(U,H)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| \\ &\leq f(X) + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x,H)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| \\ &< k|T| + \mathrm{q}(\mathcal{P}). \end{aligned}$$

Wenn also $\mathrm{q}(\mathcal{P}) = 0$ ist, hat man unter der Annahme $\mathrm{c}^H(G - X - \mathrm{N}_{G-X}(U)) \geq 2$ bereits die gewünschte Schranke gezeigt, also einen Widerspruch herbeigeführt.

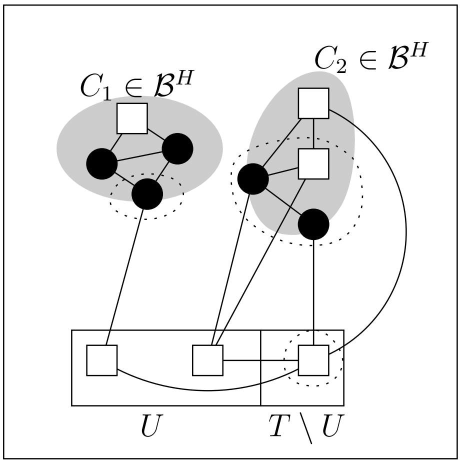
Im Allgemeinen wird aber ein mit etwas mehr Fingerspitzengefühl zusammengestellter Trenner Z von U benötigt. Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass die Terme in $\rho(\mathcal{P})$ es sogar erlauben, $X \cup (\mathrm{N}_{G-X}(T) \setminus U)$ statt bloß $X \cup \mathrm{N}_{G-X}(U)$ als Trenner zu verwenden. Allerdings wird $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ von diesem Trenner nicht kompensiert. $X \subseteq Z$ soll aber gelten, damit sich die weiteren Betrachtungen auf $G - X$ beziehen können. Da U eine maximale unabhängige Menge in T ist, ist $T \setminus U \subseteq \mathrm{N}(U)$. Dann ist $|T \setminus U| \leq |\mathrm{E}(U,T)|$ und $T \setminus U$ kann im Trenner Z enthalten sein und durch Terme in $\rho(\mathcal{P})$ abgeschätzt werden.

Da für jedes $C_i, 1 \leq i \leq n$ immer $\mathrm{q}(C_i) \leq 1$ ist, genügt es, pro solchem C_i die sich aus der t-Toughness ergebende Ungleichung um 1 zu verbessern oder zu zeigen, dass $\rho(\mathcal{P})$ noch Reserven hat. Dies wird dadurch erschwert, dass Trenner im Sinne der Toughness auf Komponenten basieren, eine solche Komponente aber in mehrere C_i partitioniert sein und mehrfach in $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ gezählt werden kann. Wie genau vorgegangen wird, hängt von dem einzelnen C_i ab, und soll nun erläutert werden.

Sei dazu

$$\mathcal{B}^H := \{C_i : (C_i \cap H) \setminus \mathrm{N}(U) \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n\}.$$

Von einem $C_i \in \mathcal{B}^H$ sollen $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H$ und $C_i \cap \mathrm{N}(U)$ gelöscht werden. Von $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$ bleiben dann nur noch Knoten übrig, die in H sind und im Graphen $G - X$ nur Nachbarn in C_i und $T \setminus U$ haben. Da $T \setminus U$ ebenfalls gelöscht wird, ist ein solches C_i eine Komponente im getrennten Graphen $G - Z$. Es ist eine H-Komponente wegen der definierenden Eigenschaft von $\mathcal{B}^H$, dass es einen



C_1 und C_2 sind in $\mathcal{B}^H$, da nach dem Löschen von $\mathrm{N}(U)$ in ihnen noch H-Knoten übrig sind. Außerdem enthält der Trenner für Mengen $C_i \in \mathcal{B}^H$ noch $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H$, was bei C_2 zu sehen ist.

Abbildung 13: Partitionsmengen in $\mathcal{B}^H$

H-Knoten in $C_i \setminus \mathrm{N}(U)$ gibt, der also nicht gelöscht wird. Dies verbessert die Ungleichung aus der Toughness um t, genug um für $\mathrm{q}(C_i)$ aufzukommen.

Sei $\mathcal{B}^{bd}$ die Menge der restlichen Partitionsmengen C_i, also

$$\mathcal{B}^{bd} := \{C_i : (C_i \cap H) \subseteq \mathrm{N}(U), 1 \leq i \leq n\}.$$

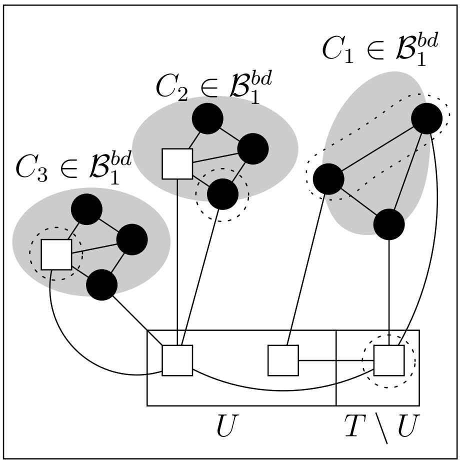
Ein $C_i \in \mathcal{B}^{bd}$ enthält, wenn überhaupt, nur noch in $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$ Knoten von H, deswegen "$\mathcal{B}^{bd}$". Außerdem gilt für $v \in C_i \cap H \subseteq \mathrm{N}(U)$ offensichtlich $|\mathrm{E}(v, T)| \geq 1$. Darauf aufbauend wird $\mathcal{B}^H$ ein weiteres Mal unterteilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1^{bd} &:= \{C_i \in \mathcal{B}^{bd} : \forall v \in C_i \cap H \text{ gilt } |\mathrm{E}(v, T)| = 1\} \\ \mathcal{B}_2^{bd} &:= \mathcal{B}^{bd} \setminus \mathcal{B}_1^{bd} \\ &= \{C_i \in \mathcal{B}^{bd} : \exists v \in C_i \cap H \text{ mit } |\mathrm{E}(v, T)| > 1\}.\end{aligned}$$

Für $C_i \in B_2^{bd}$ soll Z ganz $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$ enthalten. C_i muss einen Knoten $v \in H$ mit $|\mathrm{E}(v, T)| \geq 2$ enthalten, aber in $|Z|$ wird v nur einmal gezählt. Somit kann für C_i beim Abschätzen von $|\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)|$ durch $|\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| + |\mathrm{E}(C_i \cap H, T)|$ noch ein $+\mathrm{q}(C_i)$ gewonnen werden. Außerdem ist $C_i \setminus Z$ in $G - Z$ dann vom Rest des Graphen getrennt, denn es ist $G - Z \subseteq G - X$.

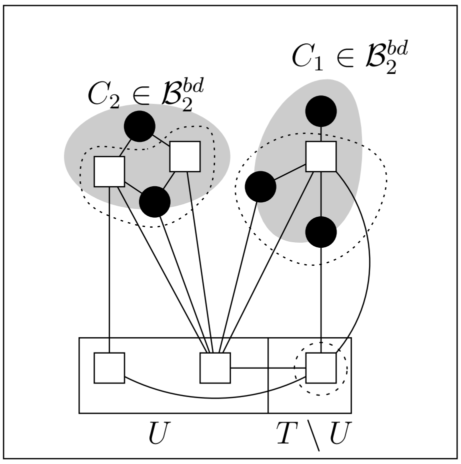
Für ein $C_i \in \mathcal{B}_1^{bd}$ gilt $|\mathrm{E}(v, T)| \leq 1$ $\forall v \in C_i \cap H$ und damit $|\mathrm{E}(v, T)| \leq 1$ $\forall v \in C_i$, denn für Knoten nicht in H muss dies immer gelten. Z enthalte alle bis auf einen Knoten von $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$.

Auch wenn ein $C_i \in \mathcal{B}_1^{bd}$ keine Komponente von $G - Z$ sein muss, so ist dennoch darüber kein U-Weg möglich. Die Begründung dafür ist ähnlich wie bei der Betrachtung der Ressourcen von C_i am Anfang von Abschnitt 3.1. Ein U-Weg kann C_i nur über dessen Rand betreten und verlassen. Da der Rand



Alle H-Knoten einer Partitionsmenge $C_i \in \mathcal{B}_1^{bd}$ sind Nachbarn von U und haben nur eine Verbindung zu T, die folglich zu U führt. Insbesondere ist $C_1 \in \mathcal{B}_1^{bd}$, da C_1 keinen H-Knoten enthält. Von einem $C_i \in \mathcal{B}_1^{bd}$ wird der Rand $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$ bis auf einen Knoten gelöscht. Welcher das ist, wird nicht vorgeschrieben.

Abbildung 14: Partitionsmengen in $\mathcal{B}_1^{bd}$



Die H-Knoten einer Partitionsmenge $C_i \in \mathcal{B}_2^{bd}$ sind Nachbarn von U, aber mindestens einer davon ist an mehr als einer Kante zu T beteiligt. Von einem $C_i \in \mathcal{B}_2^{bd}$ wird der ganze Rand $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$ gelöscht.

Abbildung 15: Partitionsmengen in $\mathcal{B}_2^{bd}$

aber nur einen Knoten enthält, kann der Weg keinen anderen Knoten von C_i enthalten, da er sonst C_i nicht mehr verlassen könnte. Da jeder Knoten im Rand von C_i maximal eine Kante zu T hat, muss ein U-Weg durch mehr als eine solche Menge aus $\mathcal{B}_1^{bd}$ gehen. Die einzigen Kanten zwischen diesen Mengen verbinden Knoten, die wegen der H-Kompatibilität von $\mathcal{P}$ nicht in H sind. Damit liegen so verbundene Mengen in $G - \mathcal{P}$ in der selben Komponente. Somit muss auch ein U-Weg komplett innerhalb einer Komponente von $G - \mathcal{P}$ liegen, denn die erste und letzte Kante des Weges gehen von U zu $V \setminus (X \cup H)$ und sind ebenfalls in $G - \mathcal{P}$ vorhanden. Dies ist ein Widerspruch, denn eine solche Komponente enthält höchstens einen T-Knoten, also insbesondere keine zwei Knoten aus U.

Nun ist die Vorgehensweise für alle C_i genannt. Zusammengefasst enthält der Trenner also

- $Z' := X \cup (T \setminus U)$,
- von $C_i \in \mathcal{B}^H$ alle Nachbarn von U und $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H$

$$Z_H := \bigcup_{C_i \in \mathcal{B}^H} \left((C_i \cap H \cap \mathrm{N}(U)) \cup (\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H) \right),$$

- von $C_i \in \mathcal{B}_2^{bd}$ den ganzen Rand

$$Z_2 := \bigcup_{C_i \in \mathcal{B}_2^{bd}} \mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$$

- und von jedem $C_i \in \mathcal{B}_1^{bd}$ alle bis auf einen Knoten von $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$. Dies ergebe Z_1.

Mit $Z := Z' \cup Z_H \cup Z_1 \cup Z_2$ ist wie oben besprochen $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq |U| + |\mathcal{B}^H|$. Der Fall $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$ ergibt, da H t-tough ist,

$$\begin{aligned} |Z| &\geq t|U| + t|\mathcal{B}^H| \\ &\geq t|U| + |\mathcal{B}^H|. \end{aligned}$$

Durch Z werden von den C_i nur Knoten der Ränder gelöscht. Diese lassen sich in $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H$ und $\mathrm{N}_{G-X}(T) \cap C_i \cap H$ aufteilen. Unter Beachtung der besonderen Behandlung der Ränder in $\mathcal{B}_1^{bd}$ folgt

$$|Z| \leq |X| + |T \setminus U| + \sum_{1 \leq i \leq n} \left(|\mathrm{N}_{G-X}(T) \cap C_i \cap H| + |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| \right) - |\mathcal{B}_1^{bd}|.$$

Nun wird noch $|\mathrm{N}_{G-X}(T) \cap C_i \cap H| \leq |\mathrm{E}(C_i \cap H, T)|$ für $C_i \notin \mathcal{B}_2^{bd}$ beziehungsweise $\leq |\mathrm{E}(C_i \cap H, T)| - 1$ für $C_i \in \mathcal{B}_2^{bd}$ eingearbeitet.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{N}_{G-X}(T) \cap C_i \cap H| &\leq \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{E}(C_i \cap H, T)| - |\mathcal{B}_2^{bd}| \\ &= |\mathrm{E}_{G-X}(H \setminus T, T)| - |\mathcal{B}_2^{bd}| \end{aligned}$$

Mit $|T \setminus U| \leq |\mathrm{E}(U,T)|$ folgt

$$\begin{aligned}
|Z| &\leq |X| + |\mathrm{E}(U,T)| + |\mathrm{E}_{G-X}(H \setminus T, T)| - |\mathcal{B}_2^{bd}| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - |\mathcal{B}_1^{bd}| \\
&\leq |X| + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - |\mathcal{B}^{bd}|
\end{aligned}$$

Aus $|Z| \geq t|U| + |\mathcal{B}^H|$ erhält man mit $|\mathcal{B}^H| + |\mathcal{B}_1^{bd}| + |\mathcal{B}_2^{bd}| = n \geq \mathrm{q}(\mathcal{P})$ und $f(X) \geq |X|$

$$\begin{aligned}
t|U| &\leq |Z| - |\mathcal{B}^H| \\
&\leq |X| + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - n \\
&\leq |X| + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - \mathrm{q}(\mathcal{P}) \\
&\leq \rho(\mathcal{P}) + k|T| \\
&< k|T|.
\end{aligned}$$

Da $|U| = \alpha(G[T])$ ist, erhält man also $t < k\frac{|T|}{\alpha(G[T])}$. Damit ist G kein Gegenbeispiel.

Es bleibt noch der Fall $\mathrm{c}^H(G - Z) \leq 1$. Wegen $T \neq \emptyset$ ist $|U| \geq 1$. Also ist $\mathrm{c}^H(G - Z) = 1 = |U|$ und $|\mathcal{B}^H| = 0$. Aus $|U| = \alpha(G[T]) = 1$ folgt, dass $G[T]$ vollständig ist. Sei $U = \{v\}$. Da $\mathcal{B}^H = \emptyset$ ist, sind alle C_i in $\mathcal{B}^{bd}$ und damit $C_i \cap H \subseteq \mathrm{N}(U) = \mathrm{N}(v)$. Folglich ist $H \setminus X \subseteq \mathrm{N}(v) \cup \{v\}$. Dass ein so stark verbundener Knoten in der Testmenge eines kleinsten Gegenbeispiels ist, wird durch Lemma 5 ausgeschlossen:

Sei dafür $\bar{G} := G^{\mathcal{P}} - \{v\}, \bar{H} := H \setminus \{v\}, \bar{T} := T \setminus \{v\}, \bar{k} := k - 1 \geq 1$ und $\bar{\mathcal{P}} := (\bar{T}, X, C_1, \ldots, C_n) = \mathcal{P} - v \in \beta(\bar{G}, \bar{H})$. Sei $\bar{\rho}(\bar{\mathcal{P}})$ der entsprechende Wert in $\bar{G}$ für $\bar{k}$. Lemma 5 zeigt $\bar{\rho}(\bar{P}) \leq \rho(\mathcal{P}) < -1$. Aus Beobachtung 7 folgt, dass $\bar{H}$ mindestens $(t - \frac{1}{2})$-tough in $\bar{G}$ ist. Sei $\bar{t} := (t - \frac{1}{2})$. Dann ist $\bar{t} \geq \bar{k}$. Entweder ist $\bar{T} = \emptyset$ oder $\alpha(\bar{G}[\bar{T}]) = \alpha(G^{\mathcal{P}}[T]) = 1$ und $\bar{t} \geq \bar{k}\frac{|\bar{T}|}{\alpha(\bar{G}[\bar{T}])}$. Somit ist $\bar{G}$ ein kleineres Gegenbeispiel. Also gibt es kein solches v und $\mathrm{c}^H(G - Z) \leq 1$ ist unmöglich.

Damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

Zum Anteil des Autors an Lemma 7: Der Beweis verwendet den gleichen Ansatz wie der Beweis von Satz 3 in [15] (dort ist es Satz 5): Nämlich eine größte unabhängige Teilmenge der Testmenge T zu trennen. Allerdings enden hier auch schon fast die Gemeinsamkeiten. Die in [15] verwendete Testmenge entstammt der Aussage von Satz 2 und insbesondere ist dort sinngemäß immer $T = H$. Die Behandlung von $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ wird in [15] für jede Partitionsmenge (bzw. "Kantentrenner") ähnlich wie für $\mathcal{B}_1^{bd}$ durchgeführt. Dies ist eine übliche Technik. Die aufwendigere Analyse hier ermöglicht aber, zum einen H-Knoten in

$G - X - T$ zu behandeln und zum anderen im Fall $\mathrm{c}^H(G - Z) = 1$ Lemma 5 anwenden zu können. Dieser Fall wird dadurch wesentlich kürzer abgehandelt als in [15] und kommt ohne die zusätzlichen Bedingungen $|H| \geq (k+3)^2/8$ und $t \geq (k+1)^2/4 + 1$ aus. Ob Lemma 5 auch dort angewandt werden kann, ist aber noch offen. Schließlich sei noch erwähnt, dass der Autor die Idee hatte, die Größe $|T|/\alpha(G[T])$ in [15] mitzuführen, woraus dann das $\chi(G[H])$ in Korollar 1 folgt.

Für viele Fälle lässt sich aber mit etwas stärkeren Voraussetzungen eine bessere Schranke für t als die in Lemma 7 zeigen:

Lemma 8 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $k \leq |H| - 1$. H sei t-tough in G. Für $\hat{f} \equiv k$ sei $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \dots, C_n) \in \beta(G, H)$ mit $\rho(\mathcal{P}) < -1$.*

Es sei $t \geq 2k$. Dann gilt $T \neq \emptyset$ und $t < \frac{k}{2}\chi(G[T])$.

Beweis: Dieser Beweis ähnelt an vielen Stellen dem vorhergehenden.

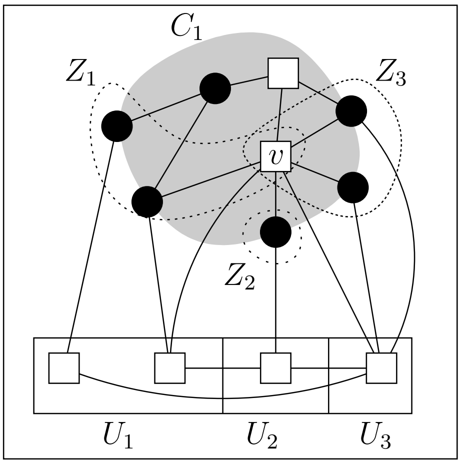
Sei G ein Gegenbeispiel mit $|V|$ minimal unter allen Gegenbeispielen. Seien H, t, k und $\mathcal{P}$ die anderen Bestandteile des Gegenbeispiels. Es gilt $T = \emptyset$ oder $t \geq \frac{k}{2}\chi(G[T])$.

Es kann wieder angenommen werden, dass $\mathcal{P}$ in Standardform ist. Auch führt $k = 1$ zu $\rho(\mathcal{P}) \geq -1$ und deswegen wird von $k \geq 2$ ausgegangen. $G[H]$ kann nicht vollständig sein.

Der Fall $T = \emptyset$ ist wieder unmöglich: Beobachtung 16 zeigt $-1 > \rho(\mathcal{P}) \geq f(X) - \mathrm{c}^H(G - X) \geq |X| - \mathrm{c}^H(G - X)$. Falls $\mathrm{c}^H(G - X) \geq 2$ ist, folgt aus der t-Toughness von H in G, dass $|X| \geq t\mathrm{c}^H(G - X) \geq \mathrm{c}^H(G - X)$ sein muss, also $-1 > 0$. Ansonsten ist $\mathrm{c}^H(G - X) \leq 1$ und damit $-1 > |X| - \mathrm{c}^H(G - X) \geq -1$. Also gilt in einem Gegenbeispiel $t \geq \frac{k}{2}\chi(G[T])$ und auch dies soll nun widerlegt werden.

Mittels der t-Toughness von H werden wieder obere Schranken für $|T|$ gezeigt. Da sich aus T gleichzeitig maximal $\alpha(T)$ H-Komponenten erzeugen lassen, wird diesmal aber versucht, die Toughness nicht bloß einmal anzuwenden, sondern T in mehrere unabhängige Mengen U_i zu zerlegen, und jede für sich zu untersuchen. Die gute Nachricht ist, dass die Trenner im Wesentlichen nur Knoten aus $\mathrm{N}(U_i) \cup X$ enthalten werden. Knoten aus $V \setminus (X \cup H)$ sind damit in höchstens einem dieser Trenner enthalten. Ein Knoten $x \in H \setminus (X \cup T)$ kann zwar mehrere Nachbarn in T haben und wird womöglich in mehr als einem Trenner gelöscht werden müssen, aber nicht öfter als $|\mathrm{E}(x, T)|$ mal. Die schlechte Nachricht ist, dass sich X nicht auf diese Weise auf die Teilmengen von T verteilen lässt.

Per Definition ist T in $\chi^T := \chi(G[T])$ unabhängige Mengen $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_{\chi^T}$ partitionierbar, welche den Farbklassen entsprechen. Diese werden nun zu (bezüglich Inklusion) maximalen unabhängigen Mengen $\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_{\chi^T}$ mit $\hat{U}_i \subseteq \bar{U}_i$ $\forall i$ erweitert. Diese müssen nicht mehr disjunkt sein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist die Reihenfolge der $\bar{U}_i$ so, dass $\bar{U}_1$ eine größte Menge ist.



Der Rand der Partitionsmenge C_1 verteilt sich auf die Trenner Z_1, Z_2 und Z_3, von denen hier nur $C_1 \cap Z_j, j = 1, 2, 3$, gemalt wurde. Der Knoten v ist in zweien der Trenner enthalten.

Abbildung 16: Die Trenner unterschiedlicher U_i

Sei $R_0 := T$, $U_1 := \bar{U}_1$ und der Rest von T sei $R_1 := T \setminus U_1$. Für $i = 2, \ldots, \chi^T$ sei $U_i := \bar{U}_i \cap R_{i-1}$ und $R_i := R_{i-1} \setminus U_i$. Dann ist $R_{\chi^T} = \emptyset$, also T vollständig aufgeteilt. Die gebildeten unabhängigen Mengen $U_1, \ldots, U_{\chi^T}$ sind disjunkt und wegen $\chi^T = \chi(G[T])$ auch alle nicht-leer. Außerdem ist $|U_i| \leq |\bar{U}_i|$ und $|U_1| = |\bar{U}_1|$, also U_1 immer noch eine Menge mit größter Kardinalität.

Da $\bar{U}_i \subseteq \bigcup_{j \leq i} U_j$, ist jedes U_i (bezüglich Inklusion) maximal unabhängig in R_{i-1}. Aus der Maximalität folgt leicht, dass $R_i \subseteq \mathrm{N}(U_i)$ und daher $|R_i| \leq |\mathrm{E}(U_i, R_i)|$ ist.

Sei U_i eine solche unabhängige Teilmenge von T. Wie zuvor kann man dem Trenner $Z_i := X \cup \mathrm{N}_{G-X}(U_i)$ (im günstigen Fall $\mathrm{c}^H(G - Z_i) \geq 2$) folgende Ungleichung entnehmen:

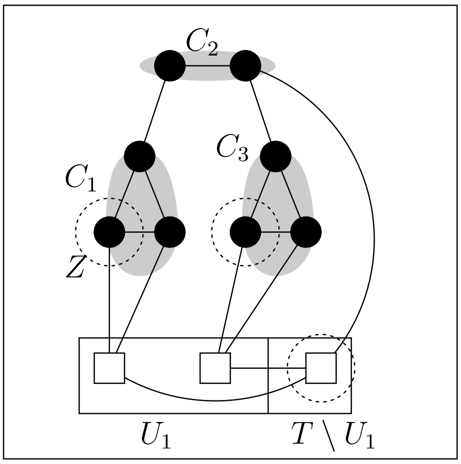
$$\begin{aligned} t|U_i| &\leq t\mathrm{c}^H(G - Z_i) \\ &\leq |Z_i| \\ &\leq |X| + |\mathrm{E}_{G-X}(U_i, H)| + |\mathrm{N}_{G-X}(U_i) \setminus H|. \end{aligned}$$

Wenn alle Trenner in mehr als einer H-Komponente resultieren, ergibt sich durch Summation

$$t|T| \leq \chi^T|X| + \sum_{v \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(v, H)| + |\mathrm{N}_{G-X}(T) \setminus H|.$$

Dem steht wieder $\rho(\mathcal{P}) < -1$ gegenüber, also insbesondere

$$k|T| > f(X) + \sum_{v \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(v, H)| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - \mathrm{q}(\mathcal{P}).$$



Wenn man aus jedem $\mathrm{N}(U_1) \cap C_i$ je einen Knoten nicht in den "Trenner" Z nimmt, ist ein U_1-Weg in $G - X - (T \setminus U_1)$ nicht ausgeschlossen.

Abbildung 17: Kein Trenner für U_1

Diese Ungleichungen sollen am Schluss miteinander verknüpft werden. Wegen $t \geq k$ ist dies leicht möglich und man erhält

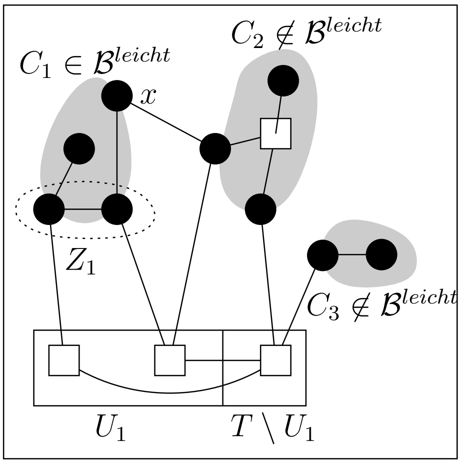
$$\chi^T |X| > \frac{t}{k} f(X) - \frac{t}{k} \mathrm{q}(\mathcal{P}).$$

Die Abschätzung $f(X) \geq 2|X|$ wird schließlich das Endergebnis bestimmen und die Schranke für t liefern, sofern man noch für $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ aufkommen kann.

Es genügt die Untersuchung der C_i nur für U_1 etwas aufwendiger zu gestalten, um in der späteren Rechnung $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ in den Griff zu bekommen. Dabei soll der Trenner Z_1 für U_1 bereits X und $R_1 = T \setminus U_1 = T \cap \mathrm{N}(U_1)$ enthalten. Für alle anderen $U_j, j \geq 2$, wird der Trenner immer genau $Z_j := \mathrm{N}(U_j)$ sein.

Die Abschätzung für $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ wird jedoch dadurch erschwert, dass der Trenner zu U_1 kleiner ist als der Trenner zu U im Beweis des vorhergehenden Lemmas. Es kann nicht mehr davon ausgegangen werden, dass ganz $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$ bis auf einen Knoten im Trenner ist, sondern nur die Nachbarschaft von U_1 wird bis auf eventuell einen Knoten entfernt. Dies bedeutet, dass ein U_1-Weg mittels des verbleibenden Nachbarn in C_i hinein kann und es durch einen anderen Randknoten wieder verlassen kann (vgl. Abb 17). Ein solcher U_1-Weg nutzt dann eine Kante aus $\mathrm{E}(C_i)$, die in $G - \mathcal{P}$ nicht enthalten ist. Somit sind U_1-Wege nicht zwingend auf Komponenten von $G - \mathcal{P}$ beschränkt und können unterschiedliche Knoten von U_1 verbinden. Es ist also Vorsicht angebracht.

Ein mächtiges Werkzeug, um bei der Untersuchung der C_i viele Fälle auszuschließen, ist die Reduktion auf ein kleineres Gegenbeispiel, ohne H oder k zu verändern. Die Idee ist wie folgt: Statt G wird der bezüglich $\mathcal{P}$ kantenmaximale Graph $G^{\mathcal{P}}$ betrachtet. Darin ist H mindestens so tough wie in G, denn $\mathrm{E}(G) \subseteq \mathrm{E}(G^{\mathcal{P}})$. Außerdem ist $\rho(\mathcal{P})$ in G und $G^{\mathcal{P}}$ gleich. Entscheidend ist, dass



Nur C_1 ist (wegen x) in $\mathcal{B}^{leicht}$. Der Trenner Z_1 soll ganz $C_1 \cap \mathrm{N}(U_1)$ enthalten. Für C_2 und C_3 muss der Trenner noch angegeben werden und ist nicht im Bild gezeigt.

Abbildung 18: Eine Partitionsmenge in $\mathcal{B}^{leicht}$ und zwei nicht

X in jedem Trenner Z mit $\mathrm{c}^H(G^{\mathcal{P}} - Z) \geq 2$ enthalten ist. Findet man in $G - X$ einen Knoten $x \notin H$, sodass H in $G^{\mathcal{P}} - \{x\}$ immer noch t-tough ist, dann hat man ein kleineres Gegenbeispiel gefunden. Denn laut Beobachtung 12 lässt sich aus $\mathcal{P}$ eine Partition $\mathcal{P} - x$ mit $\rho(\mathcal{P} - x) \leq \rho(\mathcal{P}) < -1$ ableiten, d. h. durch das Löschen von x entsteht kein H-lokaler k-Faktor mit Defekt höchstens 1, und auch T wird dabei nicht verändert.

Es werden nun die Vorgehensweisen für die Partitionsmengen C_i diskutiert. Sei zuerst

$$\mathcal{B}^{leicht} := \{C_i : |\mathrm{bd}_{G-X-T}(C_i) \setminus \mathrm{N}(T)| \geq 1, 1 \leq i \leq n\}.$$

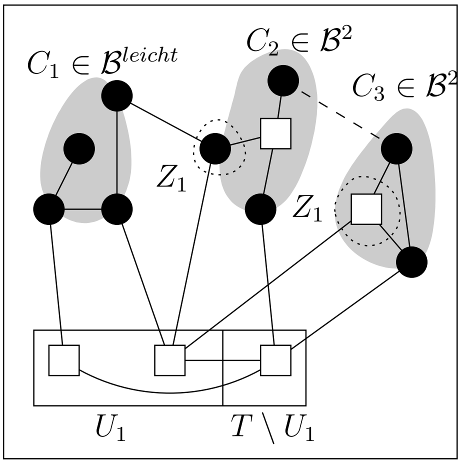
Ein $C_i \in \mathcal{B}^{leicht}$ hat also einen Knoten x, der im Rand zu einer anderen Menge C_j liegt, aber nicht im Rand zu T. Daher ist $x \notin H$. Auch der Trenner zu U_1 soll ganz $\mathrm{N}(U_1) \cap C_i$ enthalten und keinen weiteren Knoten von C_i. Dann liegt x in keinem der Trenner. Damit ist der Term $|\mathrm{bd}_{G-X-T}(C_i) \setminus \mathrm{N}(T)| = |\mathrm{bd}_{G-X-T}(C_i) \setminus (H \cup \mathrm{N}(T))| \geq 1$ in $\rho(\mathcal{P})$ ungenutzt und kann später den Anteil von C_i an $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ ausgleichen: Für $C_i \in \mathcal{B}^{leicht}$ ist gesorgt.

Für $C_i \notin \mathcal{B}^{leicht}$ gilt folglich $\mathrm{bd}_{G-X-T}(C_i) \subseteq \mathrm{N}(T)$ und damit $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) = \mathrm{N}(T) \cap C_i$. Sei

$$\mathcal{B}^2 := \{C_i : |E(C_i, T)| \geq 2, 1 \leq i \leq n\} \setminus \mathcal{B}^{leicht}.$$

Der q-Anteil von $C_i \in \mathcal{B}^2$ wird nicht direkt ausgeglichen, aber er lässt sich am Schluss durch $\frac{1}{2}|\mathrm{E}(C_i, T)| \geq 1 \geq \mathrm{q}(C_i)$ kontrollieren. (Dies wird die einzige Stelle im Beweis sein, an der $t \geq 2k$ statt bloß $t \geq k$ verwendet wird.) Auch hier kann der Trenner ganz $\mathrm{N}(U_1) \cap C_i$ enthalten.

Da für $C_i \notin B^{leicht}$ gilt $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \subseteq \mathrm{N}(T)$, ist für $C_i \notin \mathcal{B}^{leicht} \cup \mathcal{B}^2$ der Rand höchstens einelementig, d.h. $|\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)| \leq |\mathrm{E}(C_i, T)| \leq 1$.



C_2 und C_3 sind in $\mathcal{B}^2$. Wie die mindestens 2 Kanten von T zu C_i verlaufen ist egal. C_1 ist aber nicht in $\mathcal{B}^2$, da es bereits in $\mathcal{B}^{leicht}$ ist. Wenn die gestrichelte Kante zum Graphen hinzugefügt wird, sind auch C_2 und C_3 in $\mathcal{B}^{leicht}$.

Abbildung 19: Zwei der Partitionsmengen sind in $\mathcal{B}^2$

Es sei

$$\mathcal{B}^0 := \{C_i : |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)| = 0, 1 \leq i \leq n\} \setminus (\mathcal{B}^{leicht} \cup \mathcal{B}^2).$$

Ein $C_i \in \mathcal{B}^0$ ist einfach zu handhaben. Denn $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) = \emptyset$ bedeutet, dass C_i eine Komponente von $G - X$ ist. Falls $C_i \cap H = \emptyset$ ist, so ist kein H-Weg über diese Komponente in $G - X$ oder $G^{\mathcal{P}} - X$ möglich, was die Anwendung von Beobachtung 8.1 ermöglicht. Somit ist H t-tough in $G^{\mathcal{P}} - C_i$ und damit $G^{\mathcal{P}} - C_i$ ein kleineres Gegenbeispiel.

Es kann also davon ausgegangen werden, dass alle $C_i \in \mathcal{B}^0$ mindestens einen H-Knoten enthalten. Wenn U_1 untersucht wird und der Trenner X enthält, trägt dieses C_i dann zur Anzahl der verbleibenden H-Komponenten bei. Dies ergibt hinreichend viel Spielraum in der Abschätzung der Trennergröße, um später den q-Anteil von C_i auszugleichen.

Es sei

$$\mathcal{B}^1 := \{C_i : |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i)| = 1, 1 \leq i \leq n\} \setminus (\mathcal{B}^{leicht} \cup \mathcal{B}^2).$$

Offensichtlich ist $B^1 \cap B^0 = \emptyset$. $\mathcal{B}^1$ wird noch einmal unterteilt in

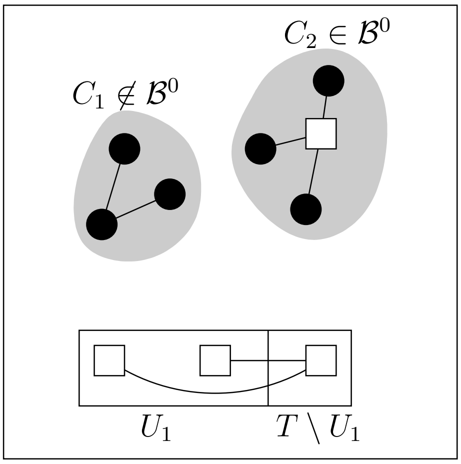
$$\mathcal{B}^1_{in} := \{C_i \in \mathcal{B}^1 : (C_i \setminus \mathrm{bd}_{G-X}(C_i)) \cap H \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{B}^1_{bd} := \{C_i \in \mathcal{B}^1 : \mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \cap H \neq \emptyset\} \setminus \mathcal{B}^1_{in}$$

und

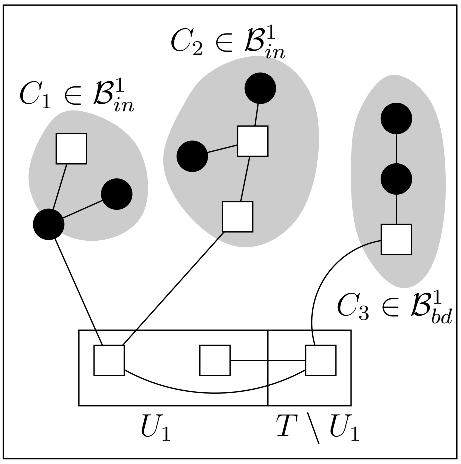
$$\mathcal{B}^1_{Rest} := \mathcal{B}^1 \setminus (\mathcal{B}^1_{in} \cup \mathcal{B}^1_{bd}),$$

wobei $\mathcal{B}^1_{Rest}$ sich als leer herausstellen wird.



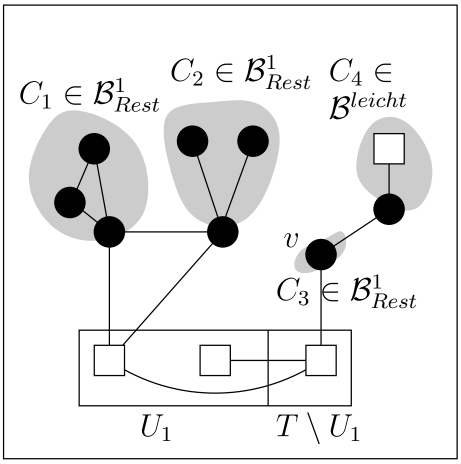
Die Partitionsmengen C_1 und C_2 sind prinzipiell in $\mathcal{B}^0$ denkbar. Allerdings enthält C_1 keinen H-Knoten und ist deswegen für die Toughness von H in $G^{\mathcal{P}} - X$ irrelevant. Deswegen ist C_1 nicht in einem minimalen Gegenbeispiel enthalten. Und nur C_2 ist wirklich in $\mathcal{B}^0$.

Abbildung 20: Eine Partitionsmenge in $\mathcal{B}^0$ und eine, die nicht existieren kann



C_1 und C_2 sind in $\mathcal{B}^1_{in}$, da hierfür egal ist, ob der Randknoten in H ist. C_3 ist in $\mathcal{B}^1_{bd}$, da der einzige Randknoten ein H-Knoten ist und auch nur eine Kante zu T hat.

Abbildung 21: Partitionsmengen in $\mathcal{B}^1$



Die Nicht-Randknoten von C_1 und C_2 können in $G^{\mathcal{P}} - X$ gelöscht werden ohne die Toughness zu beeinflussen, da ein H-Weg diese Mengen nicht wieder verlassen könnte. Damit bleiben nur noch einelementige Partitionsmengen wie $C_3 = \{v\}$ in $\mathcal{B}^1_{Rest}$ übrig. In $G^{\mathcal{P}}$ ist dann $\mathrm{N}_{G-X}(v)$ vollständig und somit H auch t-tough in $G^{\mathcal{P}} - \{v\}$.

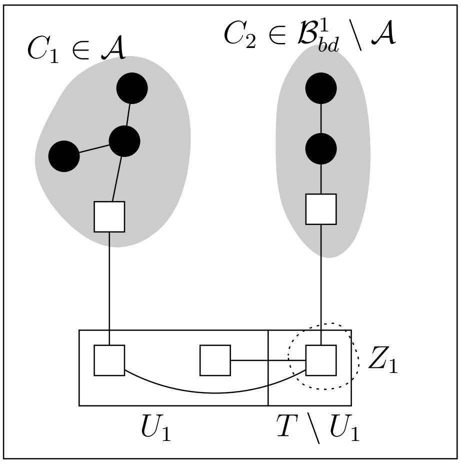
Abbildung 22: Partitionsmengen in $\mathcal{B}^1_{Rest}$, die also nicht existieren

Sei $C_i \in B^1_{in}$. Dann ist $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) = \{x\}$. In diesem Fall kann man durch das Löschen von x eine H-Komponente von T trennen. Dies wird reichen, um für den q-Anteil von C_i aufzukommen.

Sei $C_i \in B^1_{bd}$, also gilt $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) = \{x\}, x \in H$ und x ist der einzige H-Knoten in C_i. Dann hat x keinen Nachbarn in einer anderen Partitionsmenge C_j. Damit ist $C_i \in \mathcal{C}(G - X - T)$. Es kann sein, dass $\mathrm{N}(x) \cap T$ bereits im Trenner vorhanden ist (nämlich wenn $\mathrm{N}(x) \subseteq T \setminus U_1$ ist), dann ist C_i ohne weiteres Zutun eine H-Komponente im getrennten Graphen. Ansonsten reicht es zu bemerken, dass kein T-Weg über C_i in $G - X$ möglich ist, denn dieser müsste C_i in x betreten, könnte C_i dann aber nicht mehr verlassen. Somit muss x nicht in den Trenner aufgenommen werden und dies spart 1 in der Größe des Trenners, gerade genug um den q-Anteil auszugleichen.

Sei $C_i \in \mathcal{B}^1_{Rest}$. Dann ist $C_i \cap H = \emptyset$. Sei wieder $\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) = \{x\}$. Falls es noch einen anderen Knoten $y \in C_i \setminus \{x\}$ gibt, so existiert in $G^{\mathcal{P}} - X$ kein H-Weg, der y enthält. Dieser müsste, um zu y zu gelangen, C_i in x betreten und müsste C_i wieder über x verlassen. Laut Beobachtung 8.1 für y ist H also t-tough in $G^{\mathcal{P}} - \{y\}$ und dies ist ein kleineres Gegenbeispiel.

Somit kann von $C_i = \{x\}$ ausgegangen werden. Die Nachbarn von x, $\mathrm{N}_{G-X}(x)$, und x liegen in $G - \mathcal{P}$ in der selben Komponente. Somit ist $G^{\mathcal{P}}[\mathrm{N}_{G-X}(x)]$ vollständig (wegen Kanten aus E^{bd} und E^{C}). Damit erfüllt x die Voraussetzung aus Beobachtung 8.2 und H ist t-tough in $G^{\mathcal{P}} - \{x\}$. Dies ist wieder ein kleineres Gegenbeispiel. Somit ist $\mathcal{B}^1_{Rest} = \emptyset$ und abschließend sei bemerkt, dass für alle Partitionsmengen eine Verfahrensweise angegeben wurde, denn $\{C_1, \ldots, C_n\} = \mathcal{B}^{leicht} \cup \mathcal{B}^2 \cup \mathcal{B}^0 \cup \mathcal{B}^1_{in} \cup \mathcal{B}^1_{bd}$.



Beide Mengen sind in $\mathcal{B}^1_{bd}$. Nur C_1 ist in $\mathcal{A}$, da der Randknoten ein Nachbar von U_1 ist. Dies trifft auf C_2 nicht zu. Der Trenner Z_1 trennt C_1 *nicht* von U_1. Es ist trotzdem kein U_1-Weg über C_1 möglich. Aus C_2 entsteht eine H-Komponente, da $T \setminus U_1$ im Trenner Z_1 enthalten ist. Da U_1 keine Verbindung zu C_2 hat, kommt kein Knoten von C_2 für Z_1 in Frage.

Abbildung 23: Unterschied zwischen $C_1 \in \mathcal{A}$ und $C_2 \in \mathcal{B}^1_{bd} \setminus \mathcal{A}$

Damit die Abschätzungen ungestört gemacht werden können, soll ein Fall wie im Beweis von Lemma 7 wieder ausgeschlossen werden. Ein $v \in T$ mit $H \setminus X \subseteq \mathrm{N}(v) \cup \{v\}$ gibt nur wenig Information über G preis. Dank Lemma 5 kann ein solches v in einem kleinsten Gegenbeispiel nicht existieren: Sei dafür $\bar{G} := G^{\mathcal{P}} - \{v\}, \bar{H} := H \setminus \{v\}, \bar{T} := T \setminus \{v\}, \bar{k} := k - 1 \geq 1$ und $\bar{\mathcal{P}} := (\bar{T}, X, C_1, \ldots, C_n) = \mathcal{P} - v \in \beta(\bar{G}, \bar{H})$. Sei $\bar{\rho}(\bar{\mathcal{P}})$ der entsprechende Wert in $\bar{G}$ für $\bar{k}$. Lemma 5 zeigt $\bar{\rho}(\bar{P}) \leq \rho(\mathcal{P}) < -1$. Beobachtung 7 zeigt, dass $\bar{H}$ mindestens $(t - \frac{1}{2})$-tough in $\bar{G}$ ist. Sei $\bar{t} := (t - \frac{1}{2})$. Dann ist $\bar{t} \geq 2\bar{k}$ und $\bar{T} = \emptyset$ oder wegen

$$\chi(\bar{G}[\bar{T}]) = \chi(G^{\mathcal{P}}[T]) - 1 = \chi(G[T]) - 1$$

gilt $\bar{t} \geq \frac{\bar{k}}{2}\chi(\bar{G}[\bar{T}])$. Somit ist $\bar{G}$ ein kleineres Gegenbeispiel. Also gibt es kein solches v.

Beobachtung 20 *Es gilt*

$$t|U_1| \leq |X| + |R_1| + |\mathrm{N}_{G-X}(U_1) \setminus T| - (|\mathcal{B}^1_{bd}| + |\mathcal{B}^1_{in}| + t|B^0|).$$

Beweis: Der Trenner für U_1 soll auf jeden Fall $Z^{XR} := X \cup R_1$ enthalten. Alle Nachbarn von U_1 außerhalb von T und X sollen auch entfernt werden, bis auf die, die den Rand einer Komponente in $\mathcal{B}^1_{bd}$ bilden. Letzteres betrifft die Randknoten von

$$\mathcal{A} := \{C_i \in \mathcal{B}^1_{bd} : \mathrm{N}(U_1) \cap C_i \neq 0\}.$$

Damit ist

$$Z^N := (\mathrm{N}_{G-X}(U_1) \setminus T) \setminus \bigcup_{C_i \in \mathcal{A}} \mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$$

hierfür der richtige Trenner. Schließlich soll noch jedes $C_i \in \mathcal{B}^1_{in}$ eine eigene H-Komponente ergeben, indem der einelementige Rand gelöscht wird, also

$$Z^{in} := \bigcup_{C_i \in B^1_{in}} \mathrm{bd}_{G-X}(C_i)$$

in den Trenner genommen wird. ($Z_2 \cap Z_3 \neq \emptyset$ ist möglich.)

Es sei

$$Z_1 := Z^{XR} \cup Z^N \cup Z^{in}$$

und

$$G_1 := G - Z_1.$$

Es gibt keinen U_1-Weg in G_1: U_1 ist unabhängig und wegen Z^{XR} müsste ein U_1-Weg aus $V \setminus (X \cup T)$ kommen. Darin wurden aber alle Nachbarn von U_1 gelöscht, bis auf die, die in einem $C_i \in \mathcal{B}^1_{bd}$ liegen. Dieses C_i ist aber eine Komponente in $\mathcal{C}(G - X - T)$ und hat bloß eine Verbindung zu U_1. Somit ist hierüber kein U_1-Weg möglich.

Also liegen die Knoten von U_1 in $|U_1|$ verschiedenen H-Komponenten von G_1. Außerdem gibt es in G_1 noch die H-Komponenten aus $\mathcal{B}^0$, $\mathcal{B}^1_{in}$ und $\mathcal{B}^1_{bd} \setminus \mathcal{A}$. Damit ist

$$\mathrm{c}^H(G_1) \geq |U_1| + |B^0| + |B^1_{in}| + |\mathcal{B}^1_{bd} \setminus \mathcal{A}|.$$

Für $\mathrm{c}^H(G_1) \geq 2$ liefert die Toughness von H

$$t(|U_1| + |B^0| + |B^1_{in}| + |\mathcal{B}^1_{bd} \setminus \mathcal{A}|) \leq |Z^{XR} \cup Z^N \cup Z^{in}|.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |Z^{XR}| &= |X| + |R_1| \\ |Z^N| &= |\mathrm{N}_{G-X}(U_1) \setminus T| - |\mathcal{A}| \\ |Z^{in}| &= |\mathcal{B}^1_{in}| \end{aligned}$$

Damit ist

$$t\left(|U_1| + |B^0| + |B^1_{in}| + |\mathcal{B}^1_{bd} \setminus \mathcal{A}|\right) \leq |X| + |R_1| + |\mathrm{N}_{G-X}(U_1) \setminus T| - |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}^1_{in}|$$

und wegen $t \geq k \geq 2$

$$t|U_1| \leq |X| + |R_1| + |\mathrm{N}_{G-X}(U_1) \setminus T| - |\mathcal{B}^1_{bd}| - |\mathcal{B}^1_{in}| - t|B^0|.$$

Somit erhält man die Behauptung.

Sei nun $\mathrm{c}^H(G_1) \leq 1$. Wegen $T \neq \emptyset$ ist $|U_1| \geq 1$. Es folgt $|U_1| = \mathrm{c}^H(G_1) = 1$ und

$$|\mathcal{B}^0| = |\mathcal{B}^1_{in}| = |\mathcal{B}^1_{bd} \setminus \mathcal{A}| = 0.$$

Falls es noch einen weiteren Knoten $x \in H \setminus (X \cup T \cup \mathrm{N}(U_1))$ gibt, der dann in einem $C_i \in \mathcal{B}^{leicht} \cup \mathcal{B}^2$ liegt, so gibt es in G_1 noch eine H-Komponente mehr: Denn x ist nicht im Trenner und ein Weg von x zu U_1 beziehungsweise einem $C_i \in \mathcal{A}$ ist unmöglich, da die U_1 und C_i enthaltenden Komponenten von G_1 komplett in $T \cup \bigcup_{C_j \in \mathcal{A}} C_j$ liegen. Damit wäre aber $\mathrm{c}^H(G_1) \geq 2$, also gibt es keinen solchen Knoten x.

Anders gesagt ist also

$$\bigcup_{C_i \in \mathcal{B}^{leicht} \cup \mathcal{B}^2} C_i \cap H \subseteq \mathrm{N}(U_1).$$

Da es sonst nur noch Partitionsmengen vom Typ $\mathcal{A}$ geben kann, diese aber per Definition nur einen H-Knoten enthalten und der in $\mathrm{N}(U_1)$ ist, ist ganz $H \setminus (X \cup T) \subseteq \mathrm{N}(U_1)$. Wegen $|U_1| = 1$ ist T vollständig und damit

$$H \setminus X \subseteq \mathrm{N}(U_1) \cup U_1.$$

Ein solcher Knoten v, $U_1 = \{v\}$, wurde bereits mit Lemma 5 ausgeschlossen. Damit ist dieser Fall abgehandelt und die Behauptung gilt.

□

Beobachtung 21 *Für* $2 \leq i \leq \chi^T$ *gilt*

$$t|U_i| \leq |X| + |R_i| + |\mathrm{E}(U_i, T \setminus R_{i-1})| + |\mathrm{N}_{G-X}(U_i) \setminus T|.$$

Beweis:

Sei $Z_i := \mathrm{N}(U_i)$ und $G_i := G - Z_i$. Dann ist $\mathrm{c}^H(G_i) \geq |U_i|$, denn jeder Knoten von U_i ist in G_i isoliert. Falls $\mathrm{c}^H(G_i) \geq 2$, so ergibt sich aus der Toughness

$$t|U_i| \leq |\mathrm{N}(U_i)|.$$

Für die Nachbarschaft $\mathrm{N}(U_i)$ gilt

$$\mathrm{N}(U_i) \subseteq X \cup R_i \cup (\mathrm{N}(U_i) \cap (T \setminus R_{i-1})) \cup (\mathrm{N}_{G-X}(U_i) \setminus T),$$

woraus sich sofort die Behauptung ergibt.

Andernfalls ist $\mathrm{c}^H(G_i) \leq 1$, also $\mathrm{c}^H(G_i) = 1$ wegen $|U_i| \geq 1$. Dann ist $U_i = \{v\}$. Außerdem gilt $H \subseteq \mathrm{N}(v) \cup \{v\}$, denn $x \in H \setminus (U_i \cup \mathrm{N}(v))$ wäre in G_i in einer anderen Komponente als v.

So einen Knoten v kann es wieder nicht geben. Damit ist Beobachtung 21 schon bewiesen. □

Nun müssen nur noch die Schranken zusammengesetzt und ausgewertet werden. Aus Beobachtung 20 und 21 folgt mit $p := |\mathcal{B}^1_{bd}| + |\mathcal{B}^1_{in}| + t|B^0|$, dem Gegengewicht aus Beobachtung 20 zu $\mathrm{q}(\mathcal{P})$, und wenn man berücksichtigt, dass ein $x \in \mathrm{N}_{G-X}(T) \setminus T, x \notin H$, genau einen Nachbarn in T hat,

$$
\begin{aligned}
t|T| &= t \sum_{1 \le i \le \chi^T} |U_i| \\
&\le \chi^T|X| + \sum_{1 \le i \le \chi^T} (|R_i| + |\mathrm{E}(U_i, T \setminus R_{i-1})| + |\mathrm{N}_{G-X}(U_i) \setminus T|) - p \\
&\le \chi^T|X| + \sum_{1 \le i \le \chi^T} (|\mathrm{E}(U_i, R_i)| + |\mathrm{E}(U_i, T \setminus R_{i-1})|) \\
&\quad + |\mathrm{E}_{G-X}(T, H \setminus T)| + |\mathrm{N}_{G-X}(T) \setminus H| - p \\
&= \chi^T|X| + \sum_{1 \le i \le \chi^T} |\mathrm{E}(U_i, T)| + |\mathrm{E}_{G-X}(T, H \setminus T)| + |\mathrm{N}_{G-X}(T) \setminus H| - p \\
&= \chi^T|X| + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| + |\mathrm{N}_{G-X}(T) \setminus H| - p.
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$\mathrm{q}(\mathcal{P}) \le |\mathcal{B}^{leicht}| + |\mathcal{B}^2| + |\mathcal{B}^1_{bd}| + |\mathcal{B}^1_{in}| + |\mathcal{B}^0|$$

und zur Erinnerung:

$$|\mathcal{B}^{leicht}| \le \sum_{C_i \in \mathcal{B}^{leicht}} |\mathrm{bd}_{G-X-T}(C_i) \setminus \mathrm{N}(T)| \le \sum_{1 \le i \le n} |(\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H) \setminus \mathrm{N}(T)|.$$

Dies eingesetzt in $\rho(\mathcal{P})$ ergibt

$$
\begin{aligned}
0 &> \rho(\mathcal{P}) \\
&= f(X) - f(T) + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| + \sum_{1 \le i \le n} |\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H| - \mathrm{q}(\mathcal{P}) \\
&\ge f(X) - k|T| + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| + \sum_{1 \le i \le n} |(\mathrm{bd}_{G-X}(C_i) \setminus H) \cap \mathrm{N}(T)| \\
&\quad - |\mathcal{B}^2| - |\mathcal{B}^1_{bd}| - |\mathcal{B}^1_{in}| - |\mathcal{B}^0| \\
&= f(X) - k|T| + \sum_{x \in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x, H)| + |\mathrm{N}_{G-X}(T) \setminus H| \\
&\quad - |\mathcal{B}^2| - |\mathcal{B}^1_{bd}| - |\mathcal{B}^1_{in}| - |\mathcal{B}^0|.
\end{aligned}
$$

Multiplizieren mit $\frac{t}{k}$ und abschätzen von $t|T|$ liefert

$$\begin{aligned}
0 &> \frac{t}{k}\left(f(X) + \sum_{x\in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x,H)| + |\mathrm{N}_{G-X}(T)\setminus H| - |\mathcal{B}^2| - |\mathcal{B}^1_{bd}| - |\mathcal{B}^1_{in}| - |\mathcal{B}^0|\right) \\
&\quad - \left(\chi^T|X| + \sum_{x\in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x,H)| + |\mathrm{N}_{G-X}(T)\setminus H| - |\mathcal{B}^1_{bd}| - |\mathcal{B}^1_{in}| - t|\mathcal{B}^0|\right) \\
&= \frac{t}{k}f(X) - \chi^T|X| + \left(\frac{t}{k} - 1\right)\left(\sum_{x\in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x,H)| + |\mathrm{N}_{G-X}(T)\setminus H|\right) \\
&\quad - \left(\frac{t}{k} - 1\right)(|\mathcal{B}^1_{bd}| + |\mathcal{B}^1_{in}|) - \frac{t}{k}|\mathcal{B}^2| + \left(t - \frac{t}{k}\right)|\mathcal{B}^0|.
\end{aligned}$$

Da $t \geq \frac{t}{k}$ kann der Term mit $|\mathcal{B}^0|$ wegfallen. Es sei

$$e := \sum_{x\in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x,H)| + |\mathrm{N}_{G-X}(T)\setminus H| = \sum_{x\in T} |\mathrm{E}_{G-X}(x,V)|.$$

Ein $C_i \in \mathcal{B}^1$ hat genau eine Kante zu T. Ein $C_i \in \mathcal{B}^2$ hat mindestens zwei Kanten zu T. Damit ist

$$e \geq |\mathcal{B}^1_{bd}| + |\mathcal{B}^1_{in}| + 2|\mathcal{B}^2|$$

und weiter

$$\begin{aligned}
0 &> \frac{t}{k}f(X) - \chi^T|X| + \left(\frac{t}{k} - 1\right)e - \left(\frac{t}{k} - 1\right)(|\mathcal{B}^1_{bd}| + |\mathcal{B}^1_{in}|) - \frac{t}{k}|\mathcal{B}^2| \\
&\geq \frac{t}{k}f(X) - \chi^T|X| + \left(\frac{t}{k} - 2\right)|\mathcal{B}^2| \\
&\geq \frac{t}{k}f(X) - \chi^T|X|,
\end{aligned}$$

da $t \geq 2k$. (Hier wird diese Bedingung dann tatsächlich verwendet. Abgesehen von den Reduktionen nutzt der Beweis sonst nur $t \geq k$.)

Für $X = \emptyset$ ist $f(X) = |X| = 0$ und dies ein Widerspruch. Also ist $X \neq \emptyset$.

Wegen $k \geq 2$ kann man $f(X) = k|X \cap H| + 2|X \setminus H|$ durch $2|X|$ recht drastisch nach unten abschätzen und erhält

$$t < \frac{k}{2}\chi^T = \frac{k}{2}\chi(G[T]),$$

was zu zeigen war und in einem Gegenbeispiel nicht gelten kann. □

Zum Anteil des Autors an Lemma 8: Der Beweis übernimmt aus [8] die Grundidee des Beweises von Satz 1. Konkret heißt das, dort wird die Testmenge T aus Tuttes f-Faktor-Satz in mehrere unabhängige Mengen zerlegt, hier *ist es T aus Korollar 2. Auch die Aussagen von Beobachtung 20 und 21 und der daraus abgeleitete Widerspruch sind in [8] in großen Teilen wiederzufinden. Die Analyse von* $\mathrm{q}(\mathcal{P})$ *(und damit der Beweis von Beobachtung 20) ist dort deutlich leichter, da die C_i Komponenten von $G - X - T$ sein müssen. Es genügt dann nur zwischen Komponenten zu unterschieden, die einen Knoten mit genau einer Kante zu U_1 haben, und dem Rest. Auch ist dort natürlich nicht auf den Unterschied zwischen H- und nicht-H-Knoten zu achten, und es werden keine Reduktionen auf kleinere Gegenbeispiele benötigt. Zudem ist der Fall* $\mathrm{c}(G-Z) = 1$ *in [8] insgesamt deutlich unkomplizierter. Obwohl im vorliegenden Beweis dieser Fall nur sehr kurz erscheint, hängt ein Großteil der unterschiedlichen Behandlung der C_i damit zusammen und auch das neue Lemma 5 ist sehr hilfreich. Zu erwähnen ist noch, dass $\chi(G[T])$ in Kombination mit Lemma 4 dort nur implizit verwendet wird.*

Da laut dieser Lemmata aus der Nichtexistenz eines H-lokalen k-Faktors eine Schranke für die Toughness von H folgt, muss aus einer genügend großen Toughness also ein H-lokaler k-Faktor folgen. Dies fasst der folgende, eingangs bereits erwähnte Satz zusammen und ist damit die Kernaussage dieser Arbeit.

Satz 5 *Sei $G = (V, E)$ und $H \subseteq V$ sei t-tough in G. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $k \leq |H| - 1$. Falls*

$$t \geq k \text{ und } t \geq k \min\{\chi(G[H]), k-1\} \qquad \textbf{(A)}$$

oder

$$t \geq 2k \text{ und } t \geq \tfrac{k}{2} \min\{\chi(G[H]), k-1\} \qquad \textbf{(B)}$$

ist, dann besitzt G einen H-lokalen k-Faktor mit Defekt höchstens 1.

Beweis: Für $k = 1$ folgt das Ergebnis in beiden Fällen bereits aus $t \geq k$ mit Lemma 6. Sei also $k \geq 2$. Angenommen es gibt keinen defekten H-lokalen k-Faktor mit Defekt höchstens 1 in G. Dann gibt es für $\hat{f} \equiv k$ und entsprechendes f eine Partition $\hat{P} \in \beta(G, H)$ mit $\rho(\hat{P}) < -1$.

Lemma 4 erlaubt es, eine Partition $\mathcal{P} = (T, X, C_1, \ldots, C_n)$ mit $\rho(\mathcal{P}) \leq \rho(\hat{\mathcal{P}})$ zu finden, so dass der Maxmimalgrad in $G[T]$ höchstens $k - 2$ ist. Laut Beobachtung 17 ist dann $\chi(G[T]) \leq k - 1$.

- **(A)** Sei $t \geq k$ und $t \geq k \min\{\chi(G[H]), k-1\}$. Aus $t \geq k$ und $\rho(\mathcal{P}) < -1$ folgt mit Lemma 7, dass $T \neq \emptyset$ und $t < k\frac{|T|}{\alpha(G[T])}$ ist. Laut Beobachtung 18 ist $\frac{|T|}{\alpha(G[T])} \leq \chi(G[T])$. Mit $\chi(G[T]) \leq \chi(G[H])$ und $\chi(G[T]) \leq k - 1$ ist dies ein Widerspruch zur Voraussetzung $t \geq k \min\{\chi(G[H]), k-1\}$.
- **(B)** Sei $t \geq 2k$ und $t \geq \frac{k}{2} \min\{\chi(G[H]), k-1\}$. Aus $t \geq 2k$ und $\rho(\mathcal{P}) < -1$ folgt mit Lemma 8 nun $T \neq \emptyset$ und $t < \frac{k}{2}\chi(G[T])$. Auch dies ist ein Widerspruch.

□

4.2 Auswertung und offene Punkte

Satz 5 stellt hinreichende Kriterien für die Existenz von H-lokalen k-Faktoren mit Defekt ≤ 1 zur Verfügung, die auf der Toughness von H basieren. Er verallgemeinert Korollar 1 in diverse Richtungen und ähnelt qualitativ Satz 1, ohne diesen jedoch als Spezialfall zu enthalten.

4.2.1 Abweichung von Satz 1

Der Unterschied zwischen Satz 1 von Enomoto u. a. und dem Ergebnis der vorliegenden Arbeit soll als erstes untersucht werden. Zur Erinnerung:

Satz 1 (Enomoto, Jackson, Katerinis, Saito) *Sei $G = (V, E)$ ein nicht vollständiger Graph. Sei G t-tough. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $t \geq k$ und $k|V|$ gerade. Dann enthält G einen k-Faktor.*

Bedingung **(A)** mit $t \geq k$ ist in manchen Fällen, nämlich genau $k \leq 4$ oder $\chi(G[H]) \leq 3$, leichter erfüllbar als die Alternative **(B)** mit $t \geq 2k$. Dieser Abschnitt wird sich aber nur mit letzterer beschäftigen und es sei impliziert, dass in den genannten Fällen auch etwas schwächere Bedingungen möglich sind.

Ein kleiner technischer Vorteil von Satz 5 ist, dass auch Aussagen über Faktoren mit $k|H|$ ungerade getroffen werden können.

Die Voraussetzung $k \leq |H| - 1$ hat auf den ersten Blick keine Entsprechung in Satz 1. Für einen vollständigen Graphen und $H = V$ ist $k \leq |V| - 1$ aber eine triviale Bedingung für einen k-Faktor. Falls $G[H]$ nicht vollständig ist, ist die Toughness eines Graphen laut Beobachtung 5 höchstens $|V|/\alpha(G) - 1 \leq |V|/2 - 1$. Somit ist mit $t \geq k$ auch $2k \leq |V| - 2$ impliziert, eine zumindest formell stärkere Anforderung. (Mehr dazu in Abschnitt 4.2.3.)

Da Lemma 8 auf dem Beweis von Satz 1 aus [8] basiert, würde man erwarten, dass die entsprechende Folgerung **(B)** in Satz 5 diesen als Spezialfall enthält. Jedoch weicht sowohl die Bedingung $t \geq 2k$ als auch $t \geq \frac{k}{2} \min\{\chi(G[H], k-1\}$ davon ab und liefert für $H = V$ nicht die gewünschte Aussage.

Die Voraussetzung $t \geq \frac{k}{2} \min\{\chi(G[H], k-1\}$ hat gar keine Entsprechung in Satz 1. Ihr Ursprung erklärt sich aber, wenn man die vorletzte Formel des Beweises von Lemma 8 rekapituliert. Diese war

$$0 > \frac{t}{k} f(X) - \chi^T |X|.$$

Hier wurde nun $f(X) = f(X \cap H) + 2|X \setminus H| \geq 2|X|$ abgeschätzt, um das Ergebnis zu zeigen. Im Fall $X \subseteq H$ (insbesondere falls $H = V$) kann stattdessen aber $f(X) = k|X|$ verwendet werden. Dies ergibt mit $t \geq k$

$$0 > f(X) - \chi^T |X| = k|X| - \chi^T |X|.$$

Wenn man nun nutzt, dass eine Partition mit $\chi^T = \chi(G[T]) \leq k - 1$ existiert, erhält man einen Widerspruch. Genau dies passiert in [8] und damit kann diese

Bedingung entfallen. Wenn man zusätzlich noch Lemma 4 zur Beschränkung von $\chi(G[T])$ einsetzt, könnte die Aussage des Lemmas gleich auf den Widerspruch im Fall $H \subseteq V$ hinweisen.

Ein möglicher Ansatz zur Verallgemeinerung ist,

$$t < k\chi(G[T])\frac{|X|}{f(X)}$$

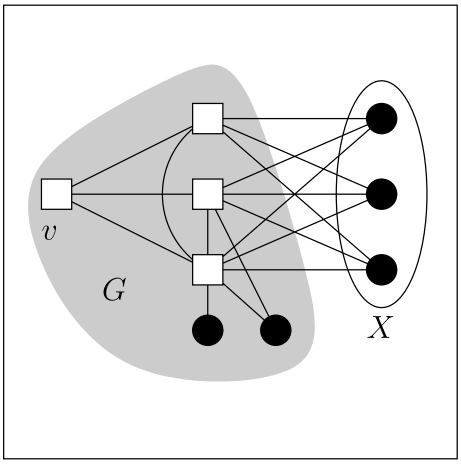
als Aussage des Lemmas zu formulieren. Dies sollte fast überall klappen, bei der Reduktion auf $k-1$, die folglich auch $|X|/f(X)$ erhöhen kann, ist etwas Vorsicht angebracht. Mit Blick auf Satz 5 erscheint diese Veränderung aber nicht als lohnend. Zum einen ist dort keine Partition $\mathcal{P}$ gegeben, aus der sich dieser Wert für X ergeben könnte. Somit kann diese Schranke nicht in die Bedingung des Satzes aufgenommen werden. Zum anderen ist es sogar das Ziel zu zeigen, dass eine solche Partition gar nicht existiert. Es muss also eine Schranke gefunden werden, die unabhängig von X ist. Nun stellt sich heraus, dass $f(X) \geq 2|X|$ zwar denkbar schlecht, in vielen Fällen aber angebracht ist. So sind z. B. Knoten $x \in V \setminus H$ mit $H \subseteq \mathrm{N}(x)$ für $|T| \geq 2$ in jedem X enthalten, da sich sonst ein T-Weg über x ergibt. Solche Knoten werden häufig in der Konstruktion von Beispielen verwendet (z. B. auch in [8]), da sich hierüber die Toughness von H (und von $H \cup \{x\}$) recht einfach erhöhen lässt (vgl. Beobachtung 7). Andererseits sind weniger stark verbundene Knoten aus H tendenziell nicht in X: Denn dies bedeutet in einer Partition mit minimalem $\rho(\mathcal{P})$, dass sie alle ihre Verbindungen T zur Verfügung stellen können, was wohl nur auf wenige Knoten von H zutrifft. Somit ist der Fall $|X \setminus H| \gg |X \cap H|$ oder sogar $X \cap H = \emptyset$ durchaus realistisch und die Abschätzung gerechtfertigt.

Die Bedingung $t \geq 2k$ wird nur verwendet, um $\mathrm{q}(C_i)$ für die $C_i \in \mathcal{B}^2$ zu kontrollieren. Dies ist im Beweis von Satz 1 nicht nötig, da die Partitionsmengen sich dort immer als Komponenten von $G - X - T$ ergeben und wegen $H = V$ auch immer als H-Komponenten gezählt werden können. Das ermöglicht eine ganz andere und wesentlich einfachere Behandlung der C_i. Diese parallel mitzuführen, erschien aber in Anbetracht der Tatsache, dass der Fall $H = V$ bereits stark von $H \neq V$ abweicht, und Lemma 4 dann auch noch einfließen müsste, nicht angebracht.

Der Autor möchte aber nicht ausschließen, dass die Bedingung $t \geq 2k$ durch geschicktere Wahl der Trenner in Lemma 8 auf $t \geq k$ abgeschwächt werden kann. Damit wäre **(A)** überflüssig. Zumindest wenn alle C_i Komponenten von $G - X - T$ sind, ist dies vermutlich möglich.

4.2.2 Vergleich zu Korollar 1

Im Vergleich zu Korollar 1 schneidet Satz 5 sehr gut ab. Die Voraussetzung k gerade aus Korollar 1 entfällt ersatzlos. Die Bedingung $k \leq |H| - 1$ von Satz 5 ist im Allgemeinen deutlich schwächer als $(k+3)^2/8 \leq |H|$. Die zusätzliche quadratische Bedingung $t \geq (k+1)^2/4 + 1$ kann ganz entfallen, was freilich



$v \in H$ ist in G zu $H \setminus \{v\}$ verbunden. Die $x = 3$ Knoten von X werden nur zu $H \setminus \{v\}$ verbunden.

Abbildung 24: G' mit $x = 3$

nur einen Unterschied macht, wenn sie nicht schon durch die andere Bedingung impliziert ist, also nur für $k\chi(G[H]) < (k+1)^2/4+1$. In $t \geq k \min\{\chi(G[H]), k+1\}$ wird außerdem $k+1$ zu $k-1$ abgeschwächt. Für $t \geq 2k$ ist noch einmal das Abschwächen der zweiten Bedingung an t um den Faktor $\frac{1}{2}$ möglich.

Allerdings muss man Korollar 1 zugutehalten, dass mit seinen Voraussetzungen deutlich mehr als nur ein H-lokaler k-Faktor folgt, sondern sogar für jedes $H' \subseteq H$ ein H'-lokaler k-Faktor existieren muss.

4.2.3 Schärfe der Voraussetzungen

Als einfachste Schranke soll $k \leq |H| - 1$ zuerst behandelt werden. Diese stellt sich als notwendig heraus, wenn es einen Knoten $v \in H$ mit $H \subseteq \mathrm{N}(v) \cup \{v\}$ gibt. Dies sieht man an folgendem Graphen G':

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$. Es existiere ein $v \in H$ mit $\mathrm{N}(v) = H \setminus \{v\}$, aber $G[H]$ sei nicht vollständig. Sei $x \in \mathbb{N}$ und X eine Menge mit $|X| = x$ und $X \cap V = \emptyset$. Sei

$$G' := (V \cup X, E \cup \{uw : w \in X, u \in H \setminus \{v\}\}).$$

(Vergleiche hierzu Abb. 24.)

Da v zu ganz H verbunden ist, muss v in jedem Trenner $Z \subseteq \mathrm{V}(G')$ mit $\mathrm{c}^H(G' - Z) \geq 2$ enthalten sein. Da jeder Knoten $w \in X$ die restlichen Knoten $H \setminus \{v\}$ verbindet, müssen auch alle $w \in X$ in so einem Z enthalten sein. Somit gilt für jeden Trenner $Z \subseteq \mathrm{V}(G')$ mit $\mathrm{c}^H(G' - Z) \geq 2$, dass $|Z| \geq x + 1$ ist.

Da $G[H] = G'[H]$ als nicht vollständig vorausgesetzt wurde, existiert ein $Z \subseteq \mathrm{V}(G')$ mit $\mathrm{c}^H(G' - Z) \geq 2$ und $\tau_{G'}(H) = \frac{|Z|}{\mathrm{c}^H(G'-Z)}$. Mit $\alpha := \alpha(G[H])$ gilt

dann
$$\tau_{G'}(H) = \frac{|Z|}{\mathrm{c}^H(G'-Z)} \geq \frac{x+1}{\mathrm{c}^H(G'-Z)} \geq \frac{x+1}{\alpha}.$$

Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ lässt sich also ein $x \in \mathbb{N}$ finden, so dass G' und H alle Bedingungen von Satz 5 bis auf $|H| \geq k+1$ erfüllen. Wegen $\mathrm{d}_{G'}(v) = \mathrm{d}_G(v) = |H|-1$ kann v aber höchstens in $|H|-1$ intern disjunkten H-Wegen enthalten sein. Somit muss für einen H-lokalen k-Faktor $k \leq |H|-1$ gelten.

Das Entscheidende an diesem Beispiel ist, dass v in jedem Trenner ist und damit die Toughness von H keine Aussage über den Grad von v treffen kann. Für einen anderen Knoten $u \in H$ mit $H \not\subseteq \mathrm{N}(u) \cup \{u\}$ liefert Beobachtung 5 immer die Schranke $\tau(H) \leq \mathrm{d}(u)/2$, wodurch dieses Problem behoben wird. Zu beachten ist aber, dass der Grad von u größer als $|H|-1$ sein kann, da auch Kanten zu $V \setminus H$ gezählt werden. Hier muss sich also nicht die Bedingung $|H| \geq 2k+2$ ergeben, wie sie in Satz 1 implizit vorkommt. Tatsächlich kann es H-lokale k-Faktoren mit beliebig großem $k \in \mathbb{N}$ geben, sofern es z. B. genügend Knoten $w \in V \setminus H$ mit $H \subseteq \mathrm{N}(w)$ gibt.

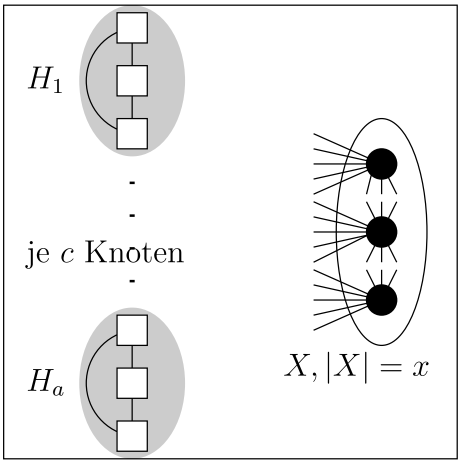
Dies lässt die Vermutung zu, dass die Bedingung $k \leq |H|-1$ entfallen kann, falls kein solches $v \in H$ mit $H \subseteq \mathrm{N}(v) \cup \{v\}$ existiert. Noch wird sie aber in beiden Lemmata in Abschnitt 4.1 in der Reduktion von k zu $k-1$ benötigt, da hierbei auch Kanten innerhalb von H hinzugefügt werden können. Dadurch könnte es passieren, dass diese Bedingung im kleineren Gegenbeispiel benötigt wird, aber nicht im größeren gegeben ist.

Nun soll die Bedingung an die Toughness untersucht werden. Die anschauliche Argumentation, warum $t \geq \frac{k}{2}\chi(G[H])$ notwendig ist, geht wie folgt: Werden einem Graphen x neue Knoten hinzugefügt, die alle zu H verbunden werden, so steigt die Toughness mindestens um $x/\alpha(G[H])$. Aber es kommen bloß x neue H-Wege hinzu. Wenn man diese Wege ohne auf Ganzzahligkeit zu achten gleichmäßig auf die Knoten verteilt, wird jeder Knoten bloß an $2x/|H|$ neuen H-Wegen beteiligt. Das k eines H-lokalen k-Faktors mit Defekt ≤ 1 kann also nur um $2x/|H|$ steigen, während die Toughness um $x/\alpha(G[H])$ steigt. Asymptotisch für $x \to \infty$ erzwingen die vielen neuen Knoten, dass H für den die Toughness definierenden Trenner in möglichst viele Komponenten geteilt wird, also in $\alpha(G[H])$ viele. Sowohl die Größe eines dafür in G benötigten Trenners (außer den neuen Knoten) als auch die Anzahl der bereits in G vorhandenen H-Wege ist für große x unbedeutend und es ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{t}{k} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\alpha(G[H])}}{\frac{2x}{|H|}} = \frac{|H|}{2\alpha(G[H])}.$$

War $G[H]$ nun so, dass $\chi(G[H]) = \frac{|H|}{\alpha(G[H])}$ gilt, ergibt sich die gewünschte Schranke.

Das Problem mit der Asymptotik ist aber, dass mit x auch k steigen muss, dieses aber durch die feste Schranke $|H|-1$ nicht möglich ist. Wie man alle Größen gleichzeitig anpassen kann, zeigt der Beweis des folgenden Satzes:



G ist eine sehr kanonische Konstruktion. Zu a vollständigen Mengen $H_1, \ldots, H_a$, jeweils mit $|H_i| = c$, wird eine Menge X mit $|X| = x$ vollständig verbundenen Knoten hinzugefügt.

Abbildung 25: Die Konstruktion von G in Satz 6

Satz 6 *Für alle $c \in \mathbb{N}$ mit $c \geq 5$ und für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, existiert ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Menge $H \subseteq V$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq |H| - 1$, so dass $c = \chi(G[H])$ und H t-tough in G ist mit $t \geq 2k$ und $t \geq \frac{k}{2}\chi(G[H])(1-\varepsilon)$, aber G keinen H-lokalen k-Faktor mit Defekt höchstens 1 besitzt.*

Beweis: Sei $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 5$ und $\varepsilon > 0$. Es sei $q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{q} < \varepsilon$. Es sei

$$a := 2qc.$$

Für $1 \leq i \leq a$ seien H_i paarweise disjunkte Mengen mit $|H_i| = c$. Es sei H die Vereinigung der H_i, also gilt

$$|H| = ac.$$

Sei

$$k := |H| - 1 = ac - 1.$$

Schießlich sei

$$x := \frac{k}{2}\left(c - \frac{1}{q}\right) a \in \mathbb{N}$$

und X eine zu H disjunkte Menge mit $|X| = x$. Der Graph G wird aus den H_i zusammengesetzt, die jeweils vollständig sind, aber keine Kanten untereinander haben, und den Knoten in X, die zu ganz H verbunden sind.

$$\begin{aligned} V &:= H \cup X \\ E &:= \bigcup_{1 \leq i \leq a} \{vw : v \in H_i, w \in H_i \setminus \{v\}\} \cup \{vw : v \in X, w \in H\} \\ G &:= (V, E) \end{aligned}$$

Dann ist $\chi(G[H]) \geq c$, denn keine zwei Knoten in $G[H_i]$ dürfen die selbe Farbe erhalten. Andererseits sieht man leicht, dass jedes H_i mit c Farben gefärbt werden kann und wegen $\mathrm{E}(H_i, H_j) = \emptyset$ für alle $i \neq j$ können diese Farben auch wiederverwendet werden. Also ist

$$\chi(G[H]) = c.$$

Beobachtung 19 zeigt, dass $\alpha(G[H]) \leq a$ ist. Andererseits findet man eine unabhängige Menge, indem man aus jedem H_i einen Knoten herausnimmt. Also ist $\alpha(G[H]) = a$. Die Menge X muss in jedem Trenner $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G-Z) \geq 2$ enthalten sein. Andererseits ist $\mathrm{c}^H(G - X) = a$, und damit wird H durch X bereits so gut wie möglich getrennt. Also ist $\tau(H) = x/a$. Damit gilt

$$\tau(H) = \frac{x}{a} = \frac{k}{2}\left(c - \frac{1}{q}\right) \geq \frac{k}{2}(c - \varepsilon)$$

und wegen $c \geq 5$ ist $c - \frac{1}{q} \geq 4$, also auch

$$\tau(H) \geq 2k.$$

Ein H-lokaler k-Faktor enthält $k|H|$ viele H-Wege. Die einzigen H-Wege in G sind die Kanten innerhalb der H_i und bis zu x Stück über X. In Partitionssprache lautet das: Sei $\mathcal{P} := (X, H, \emptyset)$. Beobachtung 10 zeigt $\mathcal{P} \in \beta(G, H)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\rho(\mathcal{P}) &= 2|X| - k|H| + 2|\mathrm{E}(H)| \\
&= 2x - (ac-1)ac + 2a\binom{c}{2} \\
&= 2\frac{k}{2}\left(c - \frac{1}{q}\right)a - (ac-1)ac + ac(c-1) \\
&= (ac-1)a\left(c - \frac{1}{q}\right) - (ac-1)ac + ac(c-1) \\
&= -\frac{1}{q}(ac-1)a + ac(c-1) \\
&= -(ac-1)2c + ac(c-1) \\
&= c(a(c-1) - 2(ac-1)) \\
&= c(-ac - a + 2) \\
&< -1
\end{aligned}$$

wegen $c \geq 5$ und $a \geq 1$. Es existiert also kein H-lokaler k-Faktor in G. Somit folgt die Behauptung. $\square$

Eine ähnliche Konstruktion lässt sich für **(A)** zeigen.

Da der Beweis nur Graphen mit $\chi(G[H]) = \frac{|H|}{\alpha(G[H])}$ verwendet, ist noch offen, ob die Bedingungen diesbezüglich nicht vielleicht noch etwas abgeschwächt werden können. Der Beweis von Lemma 8 verwendet aber wirklich $\chi(G[T])$ und dürfte nur sehr schwer auf $\frac{|T|}{\alpha(G[T])}$ umschreibbar sein. Schließlich bleibt dann auch noch das Problem, eine bessere von T unabhängige Schranke als $\chi(G[H])$ für diese Werte zu finden.

Die andere Bedingung $t \geq \frac{k(k-1)}{2}$ ist vermutlich nicht scharf. Allerdings kann man für $k \in \mathbb{N}, k \geq 16$, durch geeignete Wahl der Parameter a, c und x einen Graphen wie in Satz 6 konstruieren, in dem H mindestens $k^2/8$-tough ist, aber kein H-lokaler k-Faktor mit Defekt ≤ 1 existiert.

Sei also $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 16$ und

$$\begin{aligned} a &:= k \\ c &:= \frac{k}{2} \\ x &:= \frac{k^3}{8} \end{aligned}$$

Dann ist $|H| = ac = k^2/2 > k$ und $\tau(H) = x/a = k^2/8 \geq 2k$. Es gibt in G maximal

$$\begin{aligned} a\binom{c}{2} + x &= k\frac{\frac{k}{2}(\frac{k}{2}-1)}{2} + \frac{k^3}{8} \\ &= \frac{k^3}{8} - \frac{k^2}{4} + \frac{k^3}{8} \\ &< \frac{k^3}{4} - 1 \end{aligned}$$

intern disjunkte H-Wege. Ein H-lokaler k-Faktor mit Defekt ≤ 1 besteht aber aus mindestens $\frac{k}{2}|H| - 1 = \frac{k^3}{4} - 1$ intern disjunkten H-Wegen. Also existiert kein solcher Faktor.

Übrigens sieht man an diesem Beispiel auch, dass der quadratische Zusammenhang zwischen k und τ selbst dann notwendig ist, wenn man für beliebiges $\varepsilon > 0$ in Satz 5 zusätzlich $k \leq \varepsilon|H|$ fordert. Es muss dann einfach k groß genug gewählt werden, sodass $\varepsilon|H| = \varepsilon k^2/2 \geq k + 1$ gilt.

Dass hier nur $\tau(H) = \frac{k^2}{8}$ gezeigt wurde, ist aber kein Zufall, sondern eine Konsequenz von Satz 4. Sei $G = (V, E)$ ein wie oben konstruierter Graph mit Parametern a, c, k, x und H die entsprechende Teilmenge von V. Zur Vereinfachung sei k gerade. Sei $f|_H \equiv k$ und $f|_{V \setminus H} \equiv 2$. Dann besagt Satz 4, dass in G ein (V-lokaler) f-Faktor existiert, wenn $\tau(G) \geq k(k+6)/8$ ist. Die Toughness von G ist ebenfalls x/a, da die vollständig verbundenen Knoten $V \setminus H$ auch in einem Trenner $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}(G - Z) \geq 2$ enthalten sein müssen und $G - Z$ dann nur noch aus H-Knoten besteht. Falls also $\tau(G) = \tau(H) \geq k(k+6)/8$ gilt, existiert ein f-Faktor. Dieser muss nicht unbedingt ein H-lokaler k-Faktor sein. (Der Defekt ist gerade, da k gerade ist.) Aber es lässt sich leicht daraus ein H-lokaler k-Faktor konstruieren, wie hier angedeutet werden soll:

Die Grade der Knoten in H entsprechen der Vorgabe und die Grade der Knoten $V \setminus H$ sind zulässig. Kanten in $\mathrm{E}(H)$ sind bereits H-Wege. Verfolgt man die zwei von einem Knoten in $V \setminus H$ ausgehenden Kanten, so gelangt man irgendwann entweder in beide Richtungen wieder zurück zum Ausgangsknoten oder in beide Richtungen zu einem Knoten aus H. Einen im ersten Fall gebildeten Kreis kann man für einen H-lokalen k-Faktor einfach weglassen. Allerdings muss der andere Fall keinem H-Weg entsprechen, denn es kann sein, dass auch hier ein Kreis entsteht, also in beide Richtungen der selbe Knoten $v \in H$ erreicht wird. In diesem unkomplizierten Graphen G lassen sich solche Kreise mit nur einem H-Knoten aber auflösen, indem die Kanten der vollständigen Knoten zu H etwas "vermischt" werden.

Möglicherweise kann also die Bedingung an t auf $t \geq k(k+6)/8$ abgeschwächt werden. Auch ist es denkbar, dass mit dieser Voraussetzung für $\hat{f} : H \to \mathbb{N}$ mit $2 \leq \hat{f}(v) \leq k \ \forall v \in H$ dann sogar die Existenz eines H-lokalen $\hat{f}$-Faktors mit Defekt ≤ 1 gezeigt werden kann.

Schließlich darf man nicht vergessen, dass es sich trotz der Schärfe der Schranken nur um hinreichende Bedingungen handelt. Es ist leicht, für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und beliebiges $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$, Graphen $G = (V, E)$ und eine t-toughe Menge $H \subseteq V$ anzugeben, so dass G einen H-lokalen k-Faktor enthält. Dafür wählt man zwei disjunkte Mengen H_1 und H_2 mit $|H_1| = |H_2| \geq k+1$ und $|H_1|$ gerade. Der vollständige Graph auf H_1 bzw. H_2 enthält einen H_1- bzw. H_2-lokalen k-Faktor. Fügt man diese Faktoren nun in einen Graphen $G' = (H_1 \cup H_2, E')$ zusammen, so dass $\mathrm{E}_{G'}(H_1, H_2) = \emptyset$ gilt, dann ist $H := H_1 \cup H_2$ nur 0-tough in G'. Durch Hinzufügen von vollständig verbundenen Knoten lässt sich nun die Toughness beliebig einstellen. Insbesondere ist aber auch H in jedem Graphen, der genau aus den Kanten eines H-lokalen k-Faktors besteht, höchstens $\frac{k}{2}$ tough, sofern $G[H]$ nicht vollständig ist. Dies ergibt sich aus Beobachtung 5.2.

4.2.4 Eine Toughness-Variante

Da die Bedingung $\frac{k}{2}\chi(G[H])$ an die Toughness von H in **(B)** wie gezeigt scharf ist, stellt sich nun eine etwas paradoxe Situation ein. Zum einen tragen Kanten innerhalb von H zu einem H-lokalen k-Faktor vorbei, zum anderen erhöhen sie die chromatische Zahl $\chi(G[H])$ und machen es dadurch schwieriger, aus der Toughness einen Faktor zu folgern.

Das Problem ist das Missverhältnis zwischen der Anzahl neuer H-Wege und dem Anstieg der Toughness, wenn man Knoten hinzufügt, die zu ganz H verbunden sind. Dem Trenner fehlt eine Option, H in $|H|$ H-Komponenten zu trennen. Denn dann würde asymptotisch pro zusätzlichem vollständig verbundenem Knoten das k eines möglichen H-lokalen k-Faktors mit Defekt ≤ 1 um $2/|H|$ steigen und die Toughness nur um $1/|H|$. Es ergeben sich dann asymptotisch sogar mehr Wege als die Toughness zusichert. Diese Option kann mit Zusatzkosten verbunden sein, solange diese aber nur von $G[H]$ abhängen, fallen sie asymptotisch nicht ins Gewicht, wenn alle neuen Knoten nicht in H sind.

H in $|H|$ viele Teile zu zerlegen kann aber nur über das Löschen von Kanten in $G[H]$ passieren. Auch ohne die Feinheit der Edge-Toughness zu verwenden, lässt sich folgende nützliche Toughness-Variante definieren:

Definition 15 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$. Falls für alle $X \subseteq V$ und $Y \subseteq \mathrm{E}(G - X)$ mit $\mathrm{c}^H(G - X - Y) \geq 2$*

$$t\mathrm{c}^H(G - X - Y) \leq |X| + |Y|$$

*gilt, so ist H t-*simple-edge-tough *in G.*

Es genügt, sich auf $Y \subseteq \mathrm{E}(H \setminus X)$ zu beschränken, da es keine Nachteile bringt einen Knoten $x \notin H$ statt einer Kante, die x enthält, zu löschen. Analog zur normalen Toughness kann man auch zeigen, dass eine t-simple-edge-toughe Menge H auch für alle $0 \leq t' \leq t$ damit t'-simple-edge-tough sein muss. Das Supremum über alle t, für die H t-simple-edge-tough ist, ist im Fall $|H| \geq 2$ immer endlich, denn $X = \emptyset$ mit $Y = \mathrm{E}(G)$ ist ein Trenner, der mindestens zwei H-Komponenten erzeugt. Also ergibt sich dieses Supremum (die Simple-Edge-Toughness $\bar{\tau}$) immer durch einen Trenner $X \subseteq V, Y \subseteq \mathrm{E}(V \setminus X)$ als $\frac{|X|+|Y|}{\mathrm{c}^H(G-X-Y)}$.

Nun wird gezeigt, dass die Simple-Edge-Toughness der normalen Toughness von H in einem Hilfsgraphen entspricht, in dem jede Kante einmal unterteilt wurde.

Beobachtung 22 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$, $|H| \geq 2$. Sei G' der Graph, der entsteht, wenn man für jede Kante $e = xy \in E$ einen Knoten v_e einfügt und diesen mit x und y verbindet, aber die Kante xy dafür entfernt. Dann ist die Simple-Edge-Toughness von H in G gleich der Toughness von H in G'. Außerdem gilt $\chi(G'[H]) = 1$.*

Beweis: Da insbesondere in G' jede Kante von $G[H]$ unterteilt wurde, ist H unabhängig in G'. Also ist $\chi(G'[H]) = 1$. Da $|H| \geq 2$ ist, ist $G'[H]$ auch nicht vollständig und damit $\tau_{G'}(H) < +\infty$. Wie oben besprochen ist auch die Simple-Edge-Toughness $\bar{\tau}$ von H in G endlich.

Sei (X, Y) ein die Simple-Edge-Toughness von H in G definierender Trenner. Dann ist $Z := X \cup \{v_e : e \in Y\} \subseteq \mathrm{V}(G')$ ein Knotentrenner in G' mit $\mathrm{c}^H(G' - Z) = \mathrm{c}^H(G - X - Y)$ und $|Z| = |X| + |Y|$. Also ist H höchstens $\bar{\tau}$-tough in G'.

Sei umgekehrt $Z \subseteq \mathrm{V}(G')$ ein die Toughness von H in G' definierender Knotentrenner. Es sei $X := Z \cap V$ und $Y := \{e \in E : v_e \in Z\}$. Sei $Y' := Y \cap \mathrm{E}(G-X)$. Dann ist $|X|+|Y'| \leq |Z|$ und $\mathrm{c}^H(G-X-Y') = \mathrm{c}^H(G'-Z)$, also H höchstens $\tau_{G'}(H)$-simple-edge-tough in G. □

Damit folgt sofort:

Korollar 3 *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H \subseteq V$ sei t-simple-edge-tough in G. Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq |H| - 1$ und $t \geq k$. Dann existiert in G ein H-lokaler k-Faktor mit Defekt höchstens 1.*

Beweis: Wegen $k \geq 1$ ist $|H| \geq 2$. Sei G' der Graph mit unterteilten Kanten aus Beobachtung 22. Dann ist H t-tough in G und $\chi(G'[H]) = 1$. Damit folgt aus Satz 5 **(A)**, dass ein H-lokaler k-Faktor mit Defekt höchstens 1 in G' existiert. Die Unterteilung der Kanten von G lässt sich nun wieder rückgängig machen, da kein H-Weg in G' in einem Knoten $v_e \in \mathrm{V}(G') \setminus V$ enden kann. Dadurch erhält man einen H-lokalen k-Faktor mit Defekt höchstens 1 in G. □

Dies ist die gewünschte Verallgemeinerung von Satz 1, allerdings für eine andere Definition der Toughness. Da für die normale Toughness ein solches Resultat nicht möglich ist, ist die Simple-Edge-Toughness ein wesentlich mächtigeres Konzept, aber auch eine viel stärke Bedingung an den Graphen.

4.3 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit lokaler Toughness und lokalen Faktoren. Elementare Eigenschaften der Toughness werden gezeigt und zu aufwendigeren Ergebnissen kombiniert, die die Veränderung der Toughness beim Löschen von bestimmten Knoten beschränken.

Ein tiefliegendes Resultat von Mader zur Bestimmung der maximalen Größe eines lokalen Faktors wird vorgestellt. Die dazu benötigte Technik der H-kompatiblen Partitionen wird gründlich erläutert. Es werden Resultate hergeleitet, mit denen solche Partitionen auf unterschiedliche Weise bearbeitet werden können. Sowohl aus in gewisser Weise minimalen Partitionen als auch aus Partitionen, die einen maximal verbundenen Knoten enthalten, werden Eigenschaften des Graphen abgeleitet.

Das nach langer Vorarbeit erzielte Ergebnis Satz 5 erscheint insgesamt als recht gutes Kriterium, um aus der lokalen Toughness von H die Existenz eines H-lokalen k-Faktors zu folgern. Satz 5 verallgemeinert Satz 1 qualitativ und Korollar 1 quantitativ in diversen Punkten. Die Bedingung $k \leq |H| - 1$ ist scharf. Ebenso wurde gezeigt, dass für $t \geq 2k$ auch die Bedingung $t \geq \frac{k}{2}\chi(G[H])$ scharf ist und $t \geq \frac{k}{2}(k-1)$ weicht höchstens um den Faktor 4 von der bestmöglichen Voraussetzung ab. Teil **(A)** ist als Verbesserung für spezielle Parameter angenehm und ermöglicht zudem die einfache Anwendung der Simple-Edge-Toughness, die in Korollar 3 mündet.

Ansätze zur Verbesserung von Satz 5 sind der Übergang zu Satz 1 (also wenn nur sehr wenige Knoten nicht in H sind), das Einbringen von weiteren Graphenparametern in die Bedingungen und eine Verallgemeinerung zu H-lokalen $\hat{f}$-Faktoren.

Abschließend wird noch auf folgenden wichtigen Satz hingewiesen:

Satz 8 *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph und* $H \subseteq V$ *sei* t*-tough. Sei* $k \in \mathbb{N}$ *und* $k \gg 1$*. Dann möchte ich mich bei allen* k*-fach bedanken, die dieser Arbeit und damit mir ihre Aufmerksamkeit geschenkt haben.*

Literatur

[1] D. Bauer, H. J. Broersma, E. Schmeichel: *More progress on tough graphs – The Y2K report.* In: Y. Alavi, D. Jones, D. R. Rick, J. Liu (Hrsg.): Electronic Notes in Discrete Math. Proceedings of the Ninth Quadrennial International Conference on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications **11** (2002), S. 1-18.

[2] D. Bauer, H. J. Broersma, E. Schmeichel: *Toughness in Graphs – A Survey.* Graphs and Combinatorics **22** (2006), S. 1-35.

[3] D. Bauer, H. J. Broersma, H. J. Veldman: *Not every* 2*-tough graph is hamiltonian.* Discrete Applied Mathematics **99** (2000), S. 317-321.

[4] D. Bauer, S. L. Hakimi, E. Schmeichel: *Recognizing tough graphs is NP-hard.* Discrete Applied Mathematics **28** (1990), S. 191-195.

[5] V. Chvátal: *Tough graphs and hamiltonian circuits.* In: Discrete Mathematics **5** (1973), S. 215-228.

[6] R. Diestel: *Graphentheorie.* 3. Aufl. Springer-Verlag, Heidelberg, 2006.

[7] G. A. Dirac: *4-chromatische Graphen und vollständige 4-Graphen.* Mathematische Nachrichten **22** (1960), S. 51-60.

[8] H. Enomoto, B. Jackson, P. Katerinis, A. Saito: *Toughness and the existence of k-factors.* In: Journal of Graph Theory **9** (1985), S. 87-95.

[9] H. Enomoto: *Toughness and the existence of k-factors II.* In: Graphs and Combinatorics **2** (1986), S. 37-42.

[10] H. Enomoto: *Toughness and the existence of k-factors III.* In: Discrete Mathematics **189** (1998), S. 277-282.

[11] H. Enomoto, M. Hagita: *Toughness and the existence of k-factors IV.* In: Discrete Mathematics **216** (2000), S. 111-120.

[12] J. Harant: *On paths and cycles through specified vertices.* Discrete Mathematics **286** (2004), S. 95-98.

[13] T. Gerlach, F. Göring, J. Harant, M. Tkáč: *On cycles through specified vertices.* In: Discrete Mathematics **306** (2006), S. 831-835.

[14] F. Göring, J. Harant, E. Hexel, Zs. Tuza: *On short cycles through prescribed vertices of a graph.* In: Discrete Mathematics **286** (2004), S. 67-74.

[15] F. Göring, G. Y. Katona: *Local topological toughness.* Eingereicht bei: Graphs and Combinatorics.

[16] P. Katerinis: *Toughness of graphs and the existence of factors*. Discrete Mathematics **80** (1990), S. 81-92.

[17] G. Y. Katona: *Toughness and edge-toughness*. In: Discrete Mathematics **164** (1997), S. 187-196.

[18] G. Y. Katona: *Properties of edge-tough graphs*. In: Graphs and Combinatorics **15** (1999), S. 315-325.

[19] A. K. Kelmans, M. V. Lomonosov: *When m vertices in a k-connected graph cannot be walked round along a simple cycle*. Discrete Mathematics **38** (1982), S. 53-62.

[20] M. V. Lomonosov: *Cycles through prescribed elements in a graph*. In: B. Korte et al. (Hrsg.): Paths, flows, and VLSI-layout (Algorithms and Combinatorics, 9). Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[21] W. Mader: *Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege*. In: Archiv der Mathematik **31** (1978), S. 387-402.

[22] W. Mader: *Über ein graphentheoretisches Problem von T. Gallai*. In: Archiv der Mathematik **33** (1979), S. 239-257.

[23] W. T. Tutte: *The factors of graphs*. Canadian Journal of Mathematics **4** (1952), S. 314-328.

[24] L. Volkmann: *Fundamente der Graphentheorie*. Springer-Verlag, Wien, 1996.

Erklärung

Ich erkläre an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz,

Thesen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $H \subseteq V$ und $Z \subseteq V$. Mit $\mathrm{c}^H(G - Z)$ wird die Anzahl der Komponenten von $G - Z$ bezeichnet, die mindestens einen Knoten von H enthalten. Sei $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$. Dann ist H t-tough in G, wenn für jeden sogenannten Trenner $Z \subseteq V$ mit $\mathrm{c}^H(G - Z) \geq 2$ gilt $t\mathrm{c}^H(G - Z) \leq |Z|$. Die Toughness $\tau_G(H)$ sei das Supremum aller t, für die H t-tough in G ist. Sie ist ein Versuch zu quantifizieren, "wie sehr H in G verbunden ist". Sie verfügt über Eigenschaften, wie z. B. Monotonieeigenschaften, die mit diesem Ziel übereinstimmen. Es ergibt sich aber, dass ein Knoten $v \in V$ mit $H \subseteq \mathrm{N}(v) \cup \{v\}$ nur ungenau durch die Toughness erfasst wird.

Defekte H-lokale Faktoren sind Systeme von H-Wegen, die sich nicht kreuzen, und in denen jeder H-Knoten an nicht mehr als einer vorgegebenen Anzahl von H-Wegen beteiligt ist. In einem H-lokalen k-Faktor mit Defekt ≤ 1 sind alle bis auf maximal einen Knoten von H an jeweils genau k der H-Wege beteiligt. Maximal ein Knoten darf stattdessen auch an genau $k - 1$ H-Wegen beteiligt sein. Die wohl wichtigste Aussage zu H-lokalen k-Faktoren mit Defekt ≤ 1 ist ein Satz von Mader. Dieser Satz besagt, dass sich die Existenz eines solchen Faktors durch gewisse Trenner, formalisiert als Partitionen von V, überprüfen lässt. Dabei bestehen erst einmal wenige Ähnlichkeiten zwischen diesen Trennern und jenen Trennern, die die Toughness von H bestimmen.

Dennoch kann man aus so einer Partition einen Trenner für die Toughness von H konstruieren. Dadurch werden die unterschiedlichen Aspekte Toughness und lokale Faktoren verknüpft. Als erfolgreich erweist es sich dabei, statt bloß einem Trenner mehrere unterschiedliche zu konstruieren und die definierende Eigenschaft der Toughness mehrfach anzuwenden. Bei diesem und einem alternativen Ansatz stellt sich dabei die chromatische Zahl $\chi(G[H])$ als wichtig heraus. Es lässt sich der folgende Satz zeigen.

Satz 5 *Sei $G = (V, E)$ und $H \subseteq V$ sei t-tough in G. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $k \leq |H| - 1$. Falls*

$$t \geq k \text{ und } t \geq k \min\{\chi(G[H]), k - 1\} \qquad \textbf{(A)}$$

oder

$$t \geq 2k \text{ und } t \geq \tfrac{k}{2} \min\{\chi(G[H]), k - 1\} \qquad \textbf{(B)}$$

ist, dann besitzt G einen H-lokalen k-Faktor mit Defekt höchstens 1.

Dieses Ergebnis ist bezogen auf $\chi(G[H])$ scharf. Ebenfalls lässt sich die Bedingung $k \leq |H| - 1$ im Allgemeinen nicht weiter abschwächen.

Allerdings ist die Toughness von H kein uneingeschränkt zu empfehlendes Mittel, um die Existenz eines H-lokalen k-Faktors mit Defekt ≤ 1 zu zeigen. Die Toughness von H in G kann trotz der Existenz eines H-lokalen k-Faktors wesentlich kleiner als die hinreichende Schranke oder sogar 0 sein.