Technische Universität Chemnitz
Prof. Dr. C. Helmberg, A. Lau

Chemnitz, 11.1.2010

Optimierung für Nichtmathematiker

Übung 11

1. Lösen Sie die folgenden Optimierungsaufgaben (überprüfen Sie auf Regularität, berechnen Sie die KKT-Punkte):

   - $$\begin{aligned} \min\ & -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1^2 + x_2^2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

   - $$\begin{aligned} \max\ & x_1^4 + x_2^4 \\ \text{s.t. } & x_1^2 + x_2^2 \le 1 \end{aligned}$$

   - $$\begin{aligned} \min\ & x_1^2 + x_1^2 x_2 + x_2^4 \\ \text{s.t. } & x_1^2 + x_2^2 \le 1 \end{aligned}$$

2. Beschreiben Sie für die gegebenen $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ die Menge der aktiven Indizes $\mathcal{A}(\overline{x})$, den Tangentialkegel $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}(\overline{x})$ und den linearisierten Tangentialkegel $\mathcal{T}_P(\overline{x})$ der zulässigen Menge $\mathcal{X} = \{x\colon g_i(x) \le 0\}$.

   (i) $\mathbb{R}^2\colon g_1(x) = x_1 + 2x_2 - 6, g_2(x) = -x_2 - 3, g_3(x) = x_1 - 4, g_4(x) = -x_1 + 2x_2 - 8, g_5(x) = -x_1 - x_2 - 4, g_6(x) = x_1 - x_2 - 3, \overline{x} = (4,1)^T$

   (ii) $\mathbb{R}^3\colon g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9, g_2(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 - 12, g_3(x) = -x_1 - 2, g_4(x) = -x_2 + 3, \overline{x} = (0,3,0)^T$

3. Bestimmen Sie den Tangentialkegel und den linearisierten Tangentialkegel für den Punkt $(1,0,0)$ des Optimierungsproblems

   $$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.t. } & \tfrac{1}{2} x^T A x \le b_1 \\ & a^T x \le b_2 \\ & x \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

   mit $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Wie sieht die Menge der Optimallösungen aus? Welches Problem besteht bezüglich der Lagrange-Multiplikatoren? Geben Sie eine andere Beschreibung der zulässigen Menge an, für die immer Lagrange-Multiplikatoren existieren.

4. Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \min\ & \tfrac{1}{2}x^T Ax - b^T x \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 1 \geq 0 \\ & -x_1 + 1 \geq 0 \\ & x_2 + 1 \geq 0 \\ & -x_2 + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Optimallösungen, die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren und die aktiven Mengen für die folgenden Fälle. Betrachten Sie außerdem die Sensitivität der Lösung bei einer kleinen Veränderung von $d \in \mathbb{R}^4$.

(i) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$