Mathematik des Investment Banking
Prof. Dr. Luderer

Übung 10: Optionsbewertung nach Black/Scholes - Lösungen

1. a) $i = 21\,\%$ entspricht einer kontinuierlichen Verzinsung mit $i^* = \ln 1,21 = 0,1906$. Somit gilt

$d_1 = \frac{1}{0{,}98\cdot 1}\left[\ln\frac{220}{165} + 0,1906\cdot 1 + 0,98^2\cdot\frac{1}{2}\right] = 0,97804,$

$d_2 = \frac{1}{0{,}98\cdot 1}\left[\ln\frac{220}{165} + 0,1906\cdot 1 - 0,98^2\cdot\frac{1}{2}\right] = -0,00195.$

Aus der Tabelle der Normalverteilung (S. 130) entnehmen wir (unter Verwendung der linearen Interpolation) $\Phi(d_1) = 0,83597$, $\Phi(d_2) = 1 - \Phi(0,00195) = 1 - 0,50078 = 0,49922$, ??????? woraus sich

$$P_c = 220\cdot 0,83597 - 165\cdot e^{-0{,}1906}\cdot 0,49922 = 115,84$$

ergibt (vgl. Aufgabe 5 in Übung 9: dort betrug $P_c = 116,36$).

b) Mit $P_{\text{Aktie}} = 100$, $t = 1$, $\sigma = 0,5$, $i = 0,1$ ergibt sich:

$d_1 = \frac{1}{0{,}5\cdot 1}\left[\ln\frac{100}{S} + 0,1\cdot 1 + 0,5\cdot 0,5^2\right] = 2\cdot\left[\ln\frac{100}{S} + 0,225\right],$

$d_2 = \frac{1}{0{,}5\cdot 1}\left[\ln\frac{100}{S} + 0,1\cdot 1 - 0,5\cdot 0,5^2\right] = 2\cdot\left[\ln\frac{100}{S} - 0,125\right].$

Für die verschiedenen Basispreise erhalten wir folgende Ergebnisse:

S	d_1	d_2	$\Phi(d_1)$	$\Phi(d_2)$	P_c
200	$-0,936$	$-1,436$	$0,175$	$0,076$	$10,62$
100	$0,450$	$-0,050$	$0,674$	$0,480$	$23,96$
80	$0,896$	$0,196$	$0,815$	$0,578$	$39,65$
50	$1,836$	$1,336$	$0,967$	$0,909$	$55,57$
10	$5,055$	$4,355$	$1,000$	$1,000$	$90,95$

Abgesehen davon, dass nicht für jeden Basispreis S tatsächlich Optionen auf dem Markt sind, ergibt sich folgendes Bild:

Je höher der Basispreis, desto kleiner der Wert des Calls, desto geringer aber auch die Chance darauf, dass der Aktienkurs über dem Basispreis liegen wird. Umgekehrt: Je kleiner der Basispreis, desto teurer der Call, da die Chance auf Ausübung der Option sehr groß.

Bei $S = 10$ ist die Chance auf Optionsausübung praktisch $100\,\%$, aber es gibt auch kaum etwas zu verdienen. Angenommen, der heutige Aktienkurs von $P_{\text{Aktie}} = 100$ entwickle sich entsprechend dem risikolosen Zinssatz auf $K_1 = K_0\cdot e^{it} = 110,52$, dann ist für $t = 1$ der innere Wert des Calls 100,52, was abgezinst auf $t = 0$ auf 90,95 führt; dies ist gleich dem Preis des Calls.

2. Hilfsbeziehungen, die im weiteren benötigt werden:

$$d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{t}, \qquad d_1 + d_2 = \frac{2}{\sigma\sqrt{t}}\left[\ln\frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it\right]$$

$$\frac{d_1^2 - d_2^2}{2} = \frac{1}{2}(d_1 - d_2)(d_1 + d_2) = \ln\frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it = \ln\frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + \ln e^{it} = \ln\left(\frac{P_{\text{Aktie}}}{S}\cdot e^{it}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad e^{\frac{d_1^2-d_2^2}{2}} = \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} \cdot e^{it}$$

Zusammenhang zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion der Normalverteilung:

$$\varphi(d) = \Phi'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}}$$

a) $\Delta = \frac{\partial P_c}{\partial P_{\text{Aktie}}} = \Phi(d_1) + P_{\text{Aktie}} \cdot \varphi(d_1) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot \frac{S}{P_{\text{Aktie}}} \cdot \frac{1}{S} - S \cdot e^{-it} \cdot \varphi(d_2) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot \frac{S}{P_{\text{Aktie}}} \cdot \frac{1}{S}$

$= \Phi(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{t} \cdot P_{\text{Aktie}} \cdot \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{d_1^2}{2}} \cdot P_{\text{Aktie}} - S \cdot e^{-it} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \right]$

$= \Phi(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{t} \cdot P_{\text{Aktie}} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{d_1^2}{2}} \left[P_{\text{Aktie}} - S \cdot e^{-it} e^{\frac{d_1^2-d_2^2}{2}} \right] = \Phi(d_1),$

denn die eckige Klammer kann weiter umgeformt werden zu: $P_{\text{Aktie}} - S \cdot e^{-it} \cdot e^{it} \cdot \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} = 0$.

b) Ja, in der Nähe des Basispreises gilt $\Delta \approx 0,5$ (vgl. Tabelle in 1 b). Delta ist genau dann gleich 0,5, wenn $d_1 = 0$ ist. dies ist dann der Fall, wenn $\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it + \frac{\sigma^2 t}{2} = 0$ gilt. Im Fall von Aufgabe 1 b) bedeutet das: $\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} = -0,225 \quad \Longrightarrow \quad \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} = e^{-0,225} = 0,799 \quad \Longrightarrow$ $S = 1,252 P_{\text{Aktie}} = 125,2$.

Bemerkung: Sind σ, i und t relativ klein, so ist $d_1 = 0$, wenn $\ln P_{\text{Aktie}}/S \approx 0$, d. h. $P_{\text{Aktie}} \approx S$.

c) $P_{\text{Aktie}} \varphi(d_1) = S e^{-it} \varphi(d_2)$ bedeutet $P_{\text{Aktie}} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} = S e^{-it} \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} e^{-\frac{d_2^2}{2}}$, was wiederum äquivalent zu $\frac{P_{\text{Aktie}}}{S} e^{it} = e^{\frac{d_1^2-d_2^2}{2}}$ ist, eine Beziehung, die oben bereits nachgewiesen wurde.

d) $\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial P_{\text{Aktie}}^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial P_{\text{Aktie}}} = \varphi(d_1) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot \frac{S}{P_{\text{Aktie}}} \cdot \frac{1}{S} = \frac{\varphi(d_1)}{P_{\text{Aktie}} \sigma\sqrt{t}}$

Erhöht sich der Kurs um ΔP_{Aktie}, so ändert sich Δ (näherungsweise) um $\Delta \cdot \Delta P_{\text{Aktie}}$.

Hedge-Strategie: Wie viel Aktien x sind zu halten, wenn 1 Option verkauft wird, damit bei Kursänderung um ΔP_{Aktie} Einnahmen gleich Ausgaben sind?

(1): Wertänderung der Aktien: $x \cdot \Delta P_{\text{Aktie}}$ (2) Wertänderung einer Option (näherungsweise; resultiert aus Taylorentwicklung bis zum quadratischen Glied): $\Delta \cdot \Delta P_{\text{Aktie}} + \frac{1}{2}\Gamma \cdot (\Delta P_{\text{Aktie}})^2$.

Gleichsetzen und kürzen mit ΔP_{Aktie} führt auf:

$$x = \Delta + \frac{1}{2}\Gamma \cdot \Delta P_{\text{Aktie}}. \qquad (*)$$

Eine Möglichkeit: Schätze wahrscheinliche Änderung ΔP_{Aktie} und wähle x gemäß $(*)$. Andere Möglichkeit: Konsturiere geeignetes Portfolio.

$$\begin{aligned}
\Theta = \frac{\partial P_c}{\partial t} &= P_{\text{Aktie}} \cdot \varphi(d_1) \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(i + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{1}{2\sigma t\sqrt{t}} \left(\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it + \sigma^2 \frac{t}{2} \right) \right] + iSe^{-it}\Phi(d_2) \\
&\quad - Se^{-it}\varphi(d_2) \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(i - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{1}{2\sigma t\sqrt{t}} \left(\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it - \frac{\sigma^2 t}{2} \right) \right] \\
&= iSe^{-it}\Phi(d_2) + P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left(i + \frac{\sigma^2}{2} - i + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\sigma t\sqrt{t}} \left(\ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it + \sigma^2 \frac{t}{2} - \ln \frac{P_{\text{Aktie}}}{S} - it + \sigma^2 \frac{t}{2} \right) \right] \\
&= iSe^{-it}\Phi(d_2) + P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) \left[\frac{\sigma}{\sqrt{t}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} \right] = iSe^{-it}\Phi(d_2) + \frac{P_{\text{Aktie}}\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

Hinweis: Hier wurde die Beziehung $P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) = Se^{-it}\varphi(d_2)$ ausgenutzt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_c}{\partial S} &= P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot \frac{S}{P_{\text{Aktie}}} \cdot \frac{-P_{\text{Aktie}}}{S^2} - e^{-it}\Phi(d_2) - Se^{-it}\varphi(d_2) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \cdot \frac{-1}{S} \\
&= -\frac{P_{\text{Aktie}}}{S}\varphi(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} + e^{-it}\varphi(d_2)\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} - e^{-it}\Phi(d_2)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left[-\frac{1}{S}P_{\text{Aktie}}\varphi(d_1) + e^{-it}\varphi(d_2)\right] - e^{-it}\Phi(d_2)$$
$$= -e^{-it}\Phi(d_2) \qquad \text{(die eckige Klammer ist Null; s. o.)}$$

3. a) Die Put-Call-Parität $P_{put} + P_{\text{Aktie}} = P_{call} + S \cdot e^{-it}$ ist eine Äquivalenzbeziehung zur Bestimmung von P_{put}, die aus der Betrachtung zweier äquivalenter Portfolios resultiert.

b) (Laufzeit sei z. B. $t = 1$)
Portfolio 1: Aktie + Putoption;
Portfolio 2: Call + sichere Geldanlage derart, dass Zeitwert für $t = 1$ gleich S
Situation 1: In $t = 1$ gelte $K_1 > S$. Calloption wird ausgeübt, Putoption ist wertlos. Wert von Portfolio 1 = Wert von Portfolio 2 = K_1.
Situation 2: In $t = 1$ gelte $K_1 < S$. Calloption wertlos, Putoption wird ausgeübt. Wert von Portfolio 1 = Wert von Portfolio 2 = S.
Aus dem Gedanken, dass der Wert beider Portfolios auch für $t = 0$ gleich sein soll, resultiert die Put-Call-Parität.

c)

S	$S \cdot e^{-it}$	P_c	P_{put}
200	180,97	10,62	91,59
100	90,48	23,96	14,44
80	72,39	39,65	12,04
50	45,24	55,57	0,81
10	9,05	90,95	0,00