Mathematik des Investment Banking
Prof. Dr. Luderer

Übung 9: Kennzahlen konkreter Produkte; Optionsbewertung - Lösungen

1. Forward Rate 6 $\rightarrow$ 9: $i_f = \left(\frac{1+0{,}0335\cdot\frac{3}{4}}{1+0{,}033\cdot\frac{1}{2}} - 1\right)\cdot 4 = 0,03394$ (kann man als „Preis“ ansehen bzw. Preis = 0, wenn Partner mit derselben Größe rechnet)
Betrachten Portfolio aus Geldanlage über 6 Monate und Geldaufnahme über 9 Monate (was dem FRA entspricht) und bestimmen die Risikokennzahlen des FRA aus denen des Portfolios (unter Berücksichtigung des Vorzeichens):

Laufzeit	BPV	Theta
0,5	$-0,005$	$\frac{100}{360}\ln 1,033 = 0,00902$
0,75	$0,007$	$-\frac{100}{360}\ln 1,0335 = -0,00915$
FRA	0,002	$-0,00013$

Diskussion zur Interpretation!

Andere Betrachtungsweise: Wenn $\Delta i = 1$ BP, so erhält man (wenn sich **alle** Zinssätze um 1 BP ändern), einen Ausgleichsbetrag von $A = \frac{N\cdot(i_{lib}-i_f)\cdot t}{1+i_{lib}\cdot t}$, wobei für $t = 0$ per Konstruktion gilt: $i_{lib} = i_f$. Damit gilt $\Delta A = \frac{100\cdot 1BP\cdot 0{,}25}{1+0{,}03394+0{,}0001} = \frac{0{,}0025}{1{,}034} = 0,0024$.

2. Wir betrachten den IRS als Portfolio aus Festzinsseite (+) und Floater (−). Die Parameter der Festzinsseite sind bereits gegeben, die des Floaters wurden in Übung 8 berechnet. Damit ergibt sich:

	Preis	BPV	Duration	Theta
feste Seite	101,2975	$-0,0361$	3,725	0,01275
variable Seite	100	$-0,0048$	0,5	0,00956
IRS	1,2975	$-0,0313$	3,225	0,00319

Diskussion: 1. Warum ist der Preis des IRS nicht Null? Vermutlich, weil der Festzinssatz nicht äquivalent zur Zinsstrukturkurve ist.
2. Die einzelnen Parameter wurden hier nur einfach subtrahiert und nicht – wie eigentlich in einem Portfolio – barwertgewichtet addiert. Warum? Ist das berechtigt?

3. Da die CtD-Anleihe (oder auch jede andere lieferbare Anleihe) in den Futurekontrakt geliefert werden kann, muss Gleichgewicht zwischen dem Terminkurs der anleihe (inkl. Stückzinsen) und dem Rechnungsbetrag bei Lieferung bestehen, so dass gelten muss:

theoretischer Futurekurs = Terminkurs der Anleihe (ctd) : Preisfaktor (ctd)

Damit können die Kennzahlen der CtD- Anleihe (dividiert durch Preisfaktor) als Kennzahlen des Futures verwendet werden.

4. Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem (L – geborgtes Geld, x – verkaufte Calls, y – gekaufte Aktien):

$$\begin{array}{rcrcrcl} L & + & 10x & - & 140y & = & 0 \\ -1,1L & & & + & 110y & = & G \\ -1,1L & - & 50x & + & 210y & = & G \end{array} \quad \text{mit der Koeffizienten-matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -140 \\ -1,1 & 0 & 110 \\ -1,1 & -50 & 210 \end{pmatrix}$$

Schreibt man dieses System als $A\cdot\begin{pmatrix} L \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ G \\ G \end{pmatrix}$ mit G als dem für $t = 1$ erzielten

Gewinn des Portfolios und berechnet die inverse Matrix A^{-1}, so gilt für die Lösung des LGS:

$\begin{pmatrix} L \\ x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ G \\ G \end{pmatrix}$. Aus $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -\frac{4900}{1100} & -1 \\ -0,1 & -\frac{56}{1100} & -0,04 \\ -0,05 & -\frac{39}{1100} & -0,01 \end{pmatrix}$ folgt $\begin{pmatrix} L \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,454545 \\ -0,090909 \\ -0,0454545 \end{pmatrix} G$.

Für $G = 22$ erhält man beispielsweise $L = -120$, $x = -2$, $y = -1$. Interpretation: Lege 120 GE zum risikolosen Zinssatz an (was auf 132 in $t = 1$ führt), kaufe 2 Calls, verkaufe 1 Aktie (Leerverkauf). Andere Interpretation: Ein gekaufter Call bringt beim Preis von $P_c = 10$ einen Gewinn von 10 GE (denn der faire Preis beträgt ja $P_c = 20$). Bei 2 gekauften Calls bringt das nach einem Jahr $2 \cdot (1 + 0,1) \cdot 10 = 22$ GE Gewinn.
Übrigens: Verwendet man den fairen Preis $P_c = 20$, so hat das obige LGS für $G \neq 0$ keine Lösung, sondern führt auf einen Widerspruch (was auch so sein muss, denn sonst könnte man eine Arbitragegewinn erzielen).

5. a) Es gilt: upside change $u = 100$, downside change $d = -50$, woraus sich eine „Wahrscheinlichkeit“ für das Erreichen des jeweils höheren Aktienwertes von $p = \frac{i-d}{u-d} = \frac{10-(-50)}{100-(-50)} = 0,4$ ergibt. Nach 2 Perioden, also $t = 1$ sind drei Zustände möglich (Δ – innerer Wert des Calls): $K_2 = 55$ mit $\Delta = 0$ (Call wertlos); $K_2 = 220$ mit $\Delta = 55$; $K_2 = 880$ mit $\Delta = 715$.
Nach 1 Periode sind zwei Zustände möglich:
(1) $K_1 = 110$ mit $P_1 = (0,4 \cdot 55 + 0,6 \cdot 0) : 1,1 = 20$
(2) $K_1 = 440$ mit $P_1 = (0,4 \cdot 715 + 0,6 \cdot 55) : 1,1 = 290$
Zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet der Aktienkurs $K_0 = 220$, und der zugehörige Preis des Calls beträgt $P_c = 0,4 \cdot 290 + 0,6 \cdot 20) : 1,1 = 116,36$.

b) Hedge-Ratio $\Delta = \frac{P_2^o - P_2^u}{K_2^o - K_2^u} = \frac{715-0}{880-55} = 0,867$ bzw. $\Delta = \frac{P_1^o - P_1^u}{K_1^o - K_1^u} = \frac{290-20}{440-110} = 0,818$
(Basis 1 Jahr bzw. $\frac{1}{2}$ Jahr). Interpretation: Ändert sich der Aktienkurs um 1 GE, so ändert sich der Optionspreis um (näherungsweise) 0,8 GE.

c) $u = e^{\sigma\sqrt{h}} = e^{0,98\sqrt{0,5}} = 1,9996, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{h}} = e^{-0,98\sqrt{0,5}} = 0,50009, \quad u \cdot d = 1$