Mathematik des Investment Banking
Prof. Dr. Luderer

Übung 8: Kennzahlen konkreter Produkte, Portfoliorendite - Lösungen

1. Ein Floater entspricht einem 6-Monats-Festgeld (bis auf evtl. Bonitätsrisiken des Emittenten), wehalb der Preis jetzt bzw. in $6k$, $k \in \mathbf{N}$, Monaten jeweils $P = 100$ beträgt. Zur Zeit gilt $i = i_{lib} = 3,50\%$.

   Bemerkung: Alle Kennzahlen sind unabhängig von der Restlaufzeit; der einzig relevante Zeitraum ist ein halbes Jahr.

   a) Duration: $\text{Dur} = \sum \frac{kZ_k}{Pq^k} = k\frac{100(1+i\cdot k)}{100\cdot(1+i)^k} \approx k \cdot \frac{100(1+ik)}{100(1+ik)} = k = \frac{\text{Tage}}{\text{Basis}} = \frac{1}{2}$

   (bzw. Zerobond mit $n = \frac{1}{2}$).

   b) $\text{ModDur} = \frac{i}{1+i} \cdot \text{Dur}\ (\%) = \frac{1}{1,035} \cdot \frac{1}{2}(\%) = 0,4831\,\%$

   c) $\text{BPV} = -\frac{\text{ModDur}\cdot P}{10000} = -\frac{0,4831\cdot 100}{10000} = -0,00483$

   d) $\text{Konv} = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \frac{k(k+1)Z_k}{(1+i)^k} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1,035^2} \cdot \frac{0,5\cdot 1,5\cdot(1+0,035\cdot\frac{1}{2})}{1,035^{1/2}} = 0,7002$

   (bzw. $\text{Konv} \approx \frac{0,5\cdot 1,5}{1,035^2} = 0,7001$ bei einfacher Abzinsung)

   Berechnung der Konvexität mittels Näherungsformel (bei unterstellter einfacher Verzinsung): $P = \frac{100\cdot(1+i\cdot\frac{1}{2})}{1+i\cdot\frac{1}{2}}$

   $\Longrightarrow \quad P(3,5) = 100, P(3,6) = 99,950884, P(3,4) = 100,04916$

   $\Longrightarrow \quad \text{Konv} = \frac{P(3,6)+P(3,4)-2\cdot P(3,5)}{P(3,)} \cdot 10^6 = 0,48$

   Berechnung der Konvexität mittels Näherungsformel (bei unterstellter geometrischer Verzinsung): $P = \frac{100\cdot(1+i\cdot\frac{1}{2})}{(1+i)^{1/2}}$

   $\Longrightarrow \quad P(3,5) = 100,01484, P(3,6) = 99,966498, P(3,4) = 100,06314$

   $\Longrightarrow \quad \text{Konv} = \frac{P(3,6)+P(3,4)-2\cdot P(3,5)}{P(3,)} \cdot 10^6 = -0,42$

   Bemerkung: Die Berechnung der Konvexität auf diese Weise ist numerisch sehr empfindlich.

   e) $\Theta = \ln(1+i) \cdot \frac{P}{360} = 0,009556$

2. Mit $q = 1,065$ ergeben sich die folgenden Diskontfaktoren und Barwerte:

Zeit	Cashflow	Diskontfaktor	Barwert
0	-	1,0000	0
1	-	0,9390	0
2	-90,00	0,8817	-79,3493
3	6,00	0,8278	4,9671
4	6,00	0,7773	4,6639
5	106,00	0,7299	77,3674
Summe:			7,6491

   Der Barwert des Forward-Bonds wird also als Differenz des Barwertes der Einnahmen und des Barwertes der Ausgaben berechnet.

   b) Der Zeitraum bis zum Beginn wird mit s, die Laufzeit selbst mit n, der (heute fixierte und nach dem Zeitraum s zahlbare Preis mit P, die Rückzahlung (Tilgung) mit R, der Kupon mit p und der Barwert mit BW bezeichnet. Dann gilt:

$$BW(i) = \frac{1}{(1+i)^s}\left[-P + \frac{p}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} + \frac{R}{q^n}\right] = \frac{1}{(1+i)^s}\left[-P + \sum_{k=1}^{n} \frac{p}{(1+i)^k} + \frac{R}{(1+i)^n}\right]$$

$$BW'(i) = \frac{sP}{(1+i)^{s+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{p}{(1+i)^{k+s}} + \frac{R}{(1+i)^{n+s}}$$

$$= \quad \frac{-s}{1+i} BW + \frac{1}{(1+i)^s} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{-kp}{(1+i)^{k+1}} - \frac{nR}{(1+i)^{n+1}} \right]$$

c) Duration der Einnahmen: $D_E = \frac{1}{BW_E} \cdot \left(\frac{3 \cdot 6}{q^3} + \frac{4 \cdot 6}{q^4} + \frac{5 \cdot 106}{q^5} \right) = \frac{420{,}39378}{86{,}9984} = 4,8322$

Duration der Ausgaben: $D_A = \frac{P \cdot s}{BW_A \cdot q^s} = \frac{P \cdot s}{\frac{P}{q^s} \cdot q^s} = s = 2 \implies \text{Dur} = D_E - D_A = 2,8322$

oder auch: (auf Einnahmenseite) Duration als barwertgewichtete Summe der einzelnen Einnahmen, d. h. $w_j = \frac{BW_j}{BW}$, $w_1 = \frac{4{,}9671}{86{,}9984} = 0,0571$ usw.

$$\implies \quad D_E = \sum_{j=1}^{3} w_j D_j = w_1 \cdot 3 + w_2 \cdot 4 + w_3 \cdot 5 = \frac{BW_1 \cdot 3 + BW_2 \cdot 4 + BW_3 \cdot 5}{BW_1 + BW_2 + BW_3} = 4,8322$$

d) Konvexität eines Zerobonds: $K = \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \frac{n(n+1)Z_n}{q^n} = \frac{n(n+1)}{q^2}$

Die Gesamtkonvexität des Forward-Bonds kann als Differenz der Konvexitäten der Einnahmenseite und der Ausgabenseite berechnet werden, wobei die Einnahmen-Konvexität (im Sinne eines Portfolios von Zerobonds) als Summe der barwertgewichteten Einzelkonvexitäten bestimmt werden kann (vgl. Duration):

$K_E = \frac{1}{BW_E \cdot q^2} [3 \cdot 4 \cdot BW_1 + 4 \cdot 5 \cdot BW_2 + 5 \cdot 6 \cdot BW_3] = \frac{2473{,}9052}{98{,}67576} = 25,07105$

$K_2 = \frac{1}{BW_A \cdot q^2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 79,3493 = \frac{2 \cdot 3}{q^2} = 5,29000$

$\text{Konv} = K_1 - K_2 = 25,07105 - 5,29000 = 19,78109$

Zum Vergleich: Wir betrachten das Gesamtportfolio aus Einnahmen und Ausgaben (mit dem Barwert 7,6491) und führen eine Barwertgewichtung durch:

$\text{Konv} = \frac{1}{7{,}6491 \cdot 1{,}065^2} \left[2 \cdot 3 \cdot (-79,3493) + 3 \cdot 4 \cdot 4,9671 + 4 \cdot 5 \cdot 4,6639 + 5 \cdot 6 \cdot 77,3674 \right] = \frac{1}{8{,}6758} \cdot 476,0958 = 230,2738$ (völlig anderes Ergebnis)

e) $\Theta = \frac{P}{360} \ln(1+i) = \frac{7{,}6491}{360} \ln 1,065 = 0,0013384$

3. Es bestehen zwei grundsätzliche Möglichkeiten, den Anlagehorizont von 5 Jahren zu realisieren.

   1. Möglichkeit: Kauf des 5-jährigen Bonds (*Bullet-Portfolio*, weil Tilgung in einer Summe zu einem Zeitpunkt erfolgt)

   2. Möglichkeit: Mischung von Bond 1 und Bond 2 zu gleichen Teilen (*Barbell-Portfolio* [Barbell=Hantelstange], weil die Tilgungen auf zwei von dem Anlagehorizont gleich weit entfernte Zeitpunkte verlagert werden)

	Bullet	Barbell
Nominal	246.169,7	200.000
Rendite	5,40 %	5,40 %
Preis	200.000	200.000
BPV	-92,729	-92,736
ModDur	-4,64 %	-4,64%
Dur	4,89	4,89
Konv	26,20	26,20
Theta	29,218	24,397

Auf Grund der Renditen kann keine Entscheidung getroffen werden, die Risiken mittels BPV, ModDur und Duration sind ebenfalls gleich. Aber die Konvexität ist beim Barbell-Portfolio deutlich größer als beim Bullet-Portfolio, weshalb sich das Brbell-Portfolio durch ein besseres Chancen-Risiko-Profil auszeichnet.

4. b) Mit den Angaben aus der Tabelle erhalten wir bei unterschiedlicher Gewichtung:

Nominalwert: $i_P = \frac{1}{300}(100 \cdot 7,13\% + 100 \cdot 3,88\% + 100 \cdot 3,05\%) = \frac{1406}{300}\% = 7,59\%$

Laufzeit: $i_P = \frac{1}{17}(10 \cdot 7,13\% + 5 \cdot 3,88\% + 2 \cdot 3,05\%) = \frac{96,8}{17}\% = 5,69\%$

Barwert: $i_P = \frac{1}{323}(120 \cdot 7,13\% + 105 \cdot 3,88\% + 98 \cdot 3,05\%) = \frac{1561,9}{323}\% = 4,84\%$

Duration: $i_P = \frac{1}{14,04}(7,96 \cdot 7,13\% + 4,20 \cdot 3,88\% + 1,88 \cdot 3,05\%) = \frac{78,7848}{14,04}\% = 5,61\%$

Im Allgemeinen kommt die durationsgewichtete Rendite der tatsächlichen Portfoliorendite am nächsten (wegen der mittleren Bindungsdauer).

c) Die exakte Rendite $i = 5,65\%$ des Portfolios ergibt sich aus dem Ansatz

$$323 = \frac{1}{q^{10}}\left(10 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} + 100\right) + \frac{1}{q^5}\left(5 \cdot \frac{q^5-1}{q-1} + 100\right) + \frac{1}{q^2}\left(2 \cdot \frac{q^2-1}{q-1} + 100\right)$$

Die rechte Seite lautet 323,06889 für $i = 5,65\%$ und beträgt 322,91529 für $i = 5,66\%$.