Übung 7: Risikokennzahlen Lösungen

1. a) $P = \frac{1}{q^6}\left(p \cdot \frac{q^6-1}{q-1} + 100\right)$ Wir erhalten:

i	q	P
5,49 %	1,0549	102,5485
5,50 %	1,0550	102,4978
5,48 %	1,0548	102,5993
6,49 %	1,0649	97,6272

b) $\text{BPV} = -\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{6} \frac{k \cdot Z_k}{q^k} \cdot \frac{1}{10000} = -\frac{1}{1{,}0549}\left[\frac{6}{q} + \frac{2\cdot 6}{q^2} + \frac{3\cdot 6}{q^3} + \frac{4\cdot 6}{q^4} + \frac{5\cdot 6}{q^5} + \frac{6\cdot 106}{q^6}\right] \cdot \frac{1}{10000}$

$= -0,050779$ (bezogen auf 100 GE) Veränderung der Rendite um $+0,01\,\%$ bewirkt Verringerung des Kurses um 0,0508 (auf 102,5485-0,0508=102,4977; vgl. oben). Bei $N = 10$ Mio entspricht das einer (Bar-) Wertminderung um $0,0508 \cdot \frac{10000000}{100} = 5080$ GE.

c) $\frac{102{,}5993-102{,}4978}{2} = \frac{0{,}1015}{2} = 0,05075$

Für kleine Δi stimmen Tangente und Sekante recht gut überein, deshalb ist die hier berechnete Näherung sehr genau und der Wert stimmt gut überein mit dem in a) berechneten.

d) Das Portfolio bestehe aus $N = 2$ Einzeltiteln, d. h. $Z_k = Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)}$. In der Berechnungsvorschrift für den BPV ist jeder Summand in der Summand damit selbst die Summe zweier Summanden:

$$BPV_{Portf.} = \sum Z_k \cdot f_k = \sum (Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)}) \cdot f_k = \sum Z_k^{(1)} \cdot f_k + \sum Z_k^{(2)} \cdot f_k = BPV_1 + BPV_2,$$

wobei gilt $f_k = -\frac{1}{10000q} \cdot \frac{k}{q^k}$.

e) $\text{ModDur} = -\frac{\text{BPV}}{P} \cdot 10000 = \frac{0{,}050779}{102{,}5485} \cdot 10000 = 4,9517$ (Prozent)

(Da die Modified Duration in Prozent angegeben wird, lautet der Umrechnungsfaktor zum PBV 10000.) Also: Die prozentuale Kursveränderung bei Änderung der Rendite um 1 % (das ist viel!) beträgt näherungsweise 4,9517 (%). Daraus ergibt sich ein geänderter Kurs von $102,5485 \cdot (1 - 0,049517) = 97,4706$. Zum Vergleich der exakte Wert (s. o. in Tabelle): $P = 97,6272$. Übrigens: Auch die direkte Berechnung über die Definition führt (natürlich!) auf dasselbe Ergebnis:

$\text{ModDur} = \frac{1}{1+i}\sum \frac{kZ_k}{(1+i)^k} \cdot \frac{1}{P}$ (in %); Hier: $\text{ModDur} = -\frac{1}{qP}\left[\frac{6}{q} + \frac{12}{q^2} + \frac{18}{q^3} + \frac{24}{q^4} + \frac{30}{q^5} + \frac{636}{q^6}\right] = -4,9517$

f) Nein, nicht die Summe, sondern die barwertgewichtete Summe der Modified Durations (MD) der Einzeltitel. Nachweis für $N = 2$ ($w_j = P_j/P$ – Gewichtsfaktoren):

$$MD_P = \sum \frac{k \cdot (Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)})}{P \cdot q^{k+1}} = \sum \frac{k \cdot Z_k^{(1)}}{P_1 \cdot q^{k+1}} \cdot \frac{P_1}{P} + \sum \frac{k \cdot Z_k^{(1)}}{P_2 \cdot q^{k+1}} \cdot \frac{P_2}{P} = MD_1 \cdot w_1 + MD_2 \cdot w_2,$$

g) MD entspricht Zinserhöhung um absolut 1 %, Elastizität um relativ 1 %; MD $= \varepsilon \cdot \Delta i/P$.

2. a) Duration $= \sum_{k=1}^{n} \frac{kZ_k}{P(1+i)^k} = \frac{1}{102{,}5485}\left[\frac{6}{q} + \frac{12}{q^2} + \frac{18}{q^3} + \frac{24}{q^4} + \frac{30}{q^5} + \frac{636}{q^6} +\right] = 5,22356$

oder

Dur = ModDur [in %]$\cdot(1+i) = 4,9517 \cdot 1,0549 = 5,22355$ (Änderung des Vorzeichens)

oder

(geschlosssene Formel für Bond) Dur $= \frac{1+i}{i} - \frac{np+(q-in)R}{p(q^n-1)+iR} = \ldots = 5,22357$

b) Konv $= \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)Z_k}{(1+i)^k}$

$= \frac{1}{102{,}5485} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \left[\frac{12}{q} + \frac{36}{q^2} + \frac{72}{q^3} + \frac{120}{q^4} + \frac{180}{q^5} + \frac{4452}{q^6} +\right] = 31,2869$ (hier gilt $q = 1,0549$)

c) $P = \frac{1}{q^n}\left(p \cdot \frac{q^n-1}{q-1} + 100\right)$

q	P
1,0549	102,54853
1,0559	102,04234
1,0539	103,05793

Konv $\approx 10^6 \cdot \frac{102{,}04234+103{,}05793-2\cdot 102{,}54853}{102{,}54853} = 31,3218$

(bei Rechnung mit 4 Nachkommastellen: 31,2047; numerisch sehr empfindlich)

d) $\Delta P = P(i^* + \Delta i) - P(i^*) = BPV \cdot \Delta i + \frac{P}{2} \cdot \text{Konv} \cdot (\Delta i)^2$

$= -0,050779 \cdot 10 + \frac{102{,}54853}{2} \cdot 31,3218 \cdot 0,001^2 = -0,50779 + 0,001604 = -0,506186$

Also: $P(i = 5,59\%) \approx 102,54853 - 0,506186 = 102,04234$; zum Vergleich: exakter Wert (siehe oben in Tabelle): $P = 102,04234$.

Bemerkung: Durch die Konvexität, die die Krümmung berücksichtigt, wird die Approximation durch die Tangente (nach oben) verbessert.

e) $\Theta = \frac{P}{360} \cdot \ln(1+i) = \frac{102{,}54853}{360} \cdot \ln 1,0549 = 0,015224$

Also: Pro Tag nimmt der Kurswert der Anleihe (bezogen auf Nominalwert 100) um 0,015 Geldeinheiten zu (bei jetziger Rendite und jetzigem Zeitpunkt/Restlaufzeit).

(Für ein Jahr (dies ist sehr langer Zeitraum, weshalb die Approximation relativ ungenau wird) wären dies 5,4806 GE, so dass sich ein neuer Kurswert von 102,5485+5,4806=108,0291 ergibt. Berechnet man zum Vergleich den Kurswert der Anleihe bei Restlaufzeit $n = 5$ und $i = 5,49\%$, der 102,178 beträgt, und zählt den Kupon von 6 dazu, ergibt sich 108,178.)

f) $\Delta i = 0,0002 = 2$ BP, $\Delta T = -\frac{7}{360}$

$\Delta P \approx \text{BPV} \cdot \Delta i + \frac{P}{2} \cdot \text{Konv} \cdot (\Delta i)^2 - \Theta \cdot 360 \cdot \Delta T$

$= -0,050779 \cdot 2 + \frac{102{,}54853}{2} \cdot 31,2869 \cdot (0,0002)^2 - 0,015224 \cdot 360 \cdot \left(-\frac{7}{360}\right)$

$= -0,101558 + 0,000064 + 0,106568 = 0,005074$

Zum Vergleich: Berechnen Kurs für $i = 5,51\%$ und Restlaufzeit 5 Jahre und 553 Tage: $P = q^{7/360}\frac{1}{q^6}\left[p \cdot \frac{q^6-1}{q-1} + 100\right] = 102,55389$; die Differenz zum augenblicklichen Kurs beträgt dann 0,00536.

3. a) Barwert der ewigen Rente: $P = P(i) = \frac{p}{i} = \frac{3}{0{,}06} = 50$; $\qquad P'(i) = \frac{-p}{i^2}$

b) Basis Point Value: BPV $= \frac{-p}{i^2} \cdot \frac{1}{10000} = -0,08333$

Steigt die Rendite um 1 BP an, so verringert sich der Barwert der ewigen Rente um 0,0833 GE.

c) ModDur $= \frac{p}{i^2} \cdot \frac{1}{P}\% = \frac{p}{i^2} \cdot \frac{i}{p}\% = \frac{1}{i}\% = 16,667\%$

Steigt die Rendite absolut um 1 % an, so sinkt (Achtung: bei der Definition von ModDur wurde das Vorzeichen geändert!) der Barwert der ewigen Rente um 16,667 %, d. h. von 50 auf $50(1 - 0,16667) = 41,6667$. Zum Vergleich: $P = \frac{3}{0{,}07} = 42,857$ (Achtung: Bei absoluter Änderung der Rendite um 1 %, was sehr viel ist, ist die Approximation naturgemäß schlecht.)

d) Dur $= \frac{p}{P} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{q^k} = \frac{p}{P} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{q^k} = i \sum\limits_{k=1}^{\infty} kv^k$, wobei $v = 1/q$.

Es gilt die Formel $\sum\limits_{k=1}^{n} kv^k = v\frac{1-(n+1)v^n+nv^{n+1}}{(1-v)^2}$. Letzterer Ausdruck strebt für $n \to \infty$ gegen $\frac{v}{(1-v)^2} = \frac{q}{i^2}$. Damit ergibt sich für die Duration der ewigen Rente: Dur $= \frac{1+i}{i}$ (siehe auch frühere Herleitung), also Dur $= \frac{1{,}06}{0{,}06} = 17,67$ (Jahre). (Je höher die Rendite, desto kleiner die Duration.)

e) $P''(i) = \frac{2p}{i^3} \quad \Longrightarrow \quad$ Konv $= \frac{1}{P}P''(i) = \frac{i}{p} \cdot \frac{2p}{i^3} = \frac{2}{i^2} = 555,55$

Bemerkung: Die Konvexität hängt sehr stark vom aktuellen Renditeniveau ab. (Zum Vergleich: Für $i = 0,12$ ergibt sich Konv=138,89)

f) $\Theta = \ln(1+i)\frac{P}{360} = \frac{p}{360i}\ln(1+i) = \frac{3}{360 \cdot 0{,}06}\ln 1,06 = 0,008093.$