

Vorlesungsskript Mathematik II (Teil 3) für Mikrotechniker/Mechatroniker

Verfasserin:
HSD Dr. Sybille Handrock
TU Chemnitz
Fakultät für Mathematik
e-mail: handrock@mathematik.tu-chemnitz.de

Sommersemester 2009

Literatur

- [1] *Burg, K., Haf, H., Wille, F.*: Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. 3, B.G. Teubner, Stuttgart, 2002.
- [2] *Burg, K., Haf, H., Wille, F.*: Partielle Differenzialgleichungen, B.G. Teubner, Stuttgart, 2004.
- [3] *Dallmann, H., Elster, K. H.*: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Bd. 1–2, Uni-TB GmbH, Stuttgart, 1991.
- [4] *Fröhner, M., Windisch, G.*: Elementare Fourier-Reihen, EAGLE 018, Edition am Gutenbergplatz, Leipzig, 2004.
- [5] *Handrock-Meyer, S.*: Differenzialgleichungen für Einsteiger, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 2007.
- [6] Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler (MINÖL-Reihe), Bd. 3,5,8,10 BG Teubner, Leipzig, 1997, 2001, 1997, 1992.
- [7] *Neumayer, B., Kaup, S.*: Mathematik für Ingenieure III, Shaker Verlag, Aachen, 2004.

Inhaltsverzeichnis

1	Vektoranalysis	1
1.1	Vektorfunktionen	1
1.2	Skalar- und Vektorfelder	3
1.3	Produkte des Nabla-Operators mit einem SF bzw. VF	4
1.4	Nabla-Rechnung	7
2	Integralrechnung für reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen	8
2.1	Ebene und räumliche Bereichsintegrale	8
2.2	Kurvenintegrale	10
2.3	Oberflächenintegrale	13
2.4	Die Integralsätze	15
2.4.1	Die Divergenz und der Integralsatz von Gauß	15
2.4.2	Die Rotation und der Integralsatz von Stokes	16
3	Fourier-Reihen	18
3.1	Periodische und periodisch fortsetzbare Funktionen	18
3.2	Reelle Fourier-Reihen	20
3.3	Komplexe Fourier-Reihen	25
3.4	Konvergenzaussagen	28
4	Integraltransformationen	30
4.1	Vorbemerkungen	30
4.2	Formaler Übergang von der FR zum Fourierintegral (FI)	31
4.3	Die FT und ihre Eigenschaften	33
4.4	Formaler Übergang von der FT zur LT	39
4.5	Die LT und ihre Eigenschaften	40
4.6	Anwendung der LT zur Lösung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen	45
5	Partielle Differenzialgleichungen	47
5.1	Beispiele und Grundbegriffe	47
5.2	Klassifikation linearer pDG 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	50
5.3	Das Separationsverfahren	53
5.3.1	Separationslösungen für parabolische pDG	54
5.3.2	Separationslösungen für hyperbolische pDG	55

5.4 Lösung von pDG mit Hilfe der FT 57

1 Vektoranalysis

1.1 Vektorfunktionen

Definition 1.1 Wird jedem Wert einer skalaren Variablen t mit $t \in [t_1, t_2]$ ein **Ortsvektor** $\mathbf{r}(t)$ zugeordnet, dann heißt $\mathbf{r}(t)$ **Vektorfunktion** der skalaren Variablen t . Die Endpunkte von $\mathbf{r}(t)$ liegen in der Ebene auf einer **ebenen Kurve** bzw. im Raum auf einer **Raumkurve**, die wir mit C bezeichnen.

Deutet man die skalare Variable t als die Zeit, so beschreibt $\mathbf{r}(t)$ die **Bahnkurve** eines Massenpunktes. Die skalare Variable kann auch andere Bedeutungen haben, z.B. kann t ein Winkel sein. Wie für konstante **Ortsvektoren** gilt:

in der Ebene $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ bzw. $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$,

im Raum $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ bzw. $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Dabei gilt: $D(\mathbf{r}) = [t_1, t_2]$, $W(\mathbf{r}) = C$, $\mathbf{r}(t_1)$ ($\mathbf{r}(t_2)$) ist der **Ortsvektor** des Anfangspunktes $P_1 = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ (Endpunktes $P_2 = (x(t_2), y(t_2), z(t_2))$) von C .

Die **Koordinatenfunktionen** $(x(t), y(t))$ bzw. $(x(t), y(t), z(t))$ einer **Vektorfunktion** nennt man auch eine **Parameterdarstellung** der **ebenen** bzw. **Raumkurve**. Eine Kurve kann durch mehrere **Parameterdarstellungen** beschrieben werden. **Parameterdarstellungen** sind nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel 1.1 (Parameterdarstellungen von Kurven)

(1) Parameterdarstellungen der Kreislinie $x^2 + y^2 = a^2$ (implizite Darstellung)

1° Der Parameter t sei der Winkel zwischen dem Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ eines Punktes P auf der Kreislinie und der positiven Richtung der x -Achse. Dann gilt:

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

2° Der Parameter τ sei der Anstieg der Geraden durch die Punkte O und P . Dann gilt:

$$\tau = \tan t = \frac{y}{x} \implies y = x\tau \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = a^2 \implies x^2 + x^2\tau^2 = a^2,$$

also

$$x(\tau) = \pm \frac{a}{\sqrt{1 + \tau^2}}, \quad y(\tau) = \pm \frac{a\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} \quad \tau \in] -\infty, +\infty [.$$

(2) Parameterdarstellung der Schraubenlinie als Beispiel einer Raumkurve

Wir betrachten einen geraden Kreiszyylinder mit dem Radius a , dessen Grundfläche in der x, y -Ebene liegt und dessen Rotationsachse durch den Koordinatenursprung geht. Gesucht ist die **Bahnkurve** eines Punktes $P = (x, y, z)$ auf dem Zylindermantel, der sich um die Rotationsachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht und gleichzeitig

parallel zur Rotationsachse eine Aufwärtsbewegung mit konstanter Geschwindigkeit v ausführt. Wir setzen $p := \frac{v}{\omega}$. Ferner sei t der Winkel zwischen der Geraden durch die Punkte O und P' , wobei P' die senkrechte Projektion von P in die xy -Ebene ist, und der positiven Richtung der x -Achse. Die Aufwärtsbewegung erfolge proportional zu t . Dann gilt:

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad z(t) = pt \quad t \in [0, 2\pi].$$

Der Höhenunterschied, den der Punkt P bei einer vollen Umdrehung durchläuft, heißt **Ganghöhe** h . Mithin ergibt sich, wenn T die Zeitdauer für eine volle Umdrehung bezeichnet

$$p = \frac{v}{\omega} = \frac{vT}{2\pi} = \frac{h}{2\pi}.$$

Deshalb heißt p auch die **reduzierte Ganghöhe**.

Definition 1.2 Wird jedem Vektor $\mathbf{g} \in D \subset \mathbb{R}^n$ (D - Bereich) **eindeutig** ein Vektor $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$ zugeordnet, so nennt man diese Abbildung eine m -dimensionale **Vektorfunktion** von n unabhängigen Variablen.

Bezeichnungen: $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{g}) \quad \mathbf{g} \in D(\mathbf{f}) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $f_j(g_1, \dots, g_n) \quad (j = 1, \dots, m)$.

Es sei speziell $n = 2$ und $m = 3$. Mit den Bezeichnungen $\mathbf{f} = \mathbf{r}$, $f_1 = x$, $f_2 = y$, $f_3 = z$, $g_1 = u$, $g_2 = v$ beschreibt die dreidimensionale **Vektorfunktion** von zwei unabhängigen Variablen

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

eine **Fläche** S im Raum. Wir definieren sie auf dem Rechteck

$$R_{u,v} = \{(u, v) \mid u_1 < u < u_2 \wedge v_1 < v < v_2; u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}\},$$

d.h. $D(\mathbf{r}) = R_{u,v}$ und es gilt $W(\mathbf{r}) = S$.

Beispiel 1.2 (Parameterdarstellungen von Flächen)

- (1) **Parameterdarstellung** der Kugeloberfläche einer Kugel mit dem Mittelpunkt in $(0, 0, 0)$ und dem Radius a . Als Fläche 2. Ordnung besitzt sie die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Sei u der Winkel, den die Projektion der Strecke \overline{OP} auf die x, y -Ebene mit der positiven x -Achse einschließt ($0 \leq u < 2\pi$), wobei der Winkel im mathematisch positiven Sinne gemessen wird, während v den Winkel, den die Strecke \overline{OP} mit der z -Achse einschließt ($0 \leq v \leq \pi$), bezeichnet. Dann gilt:

$$x = a \cos u \sin v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \cos v,$$

definiert auf dem Rechteck $R_{u,v} = \{(u, v) \mid 0 \leq u < 2\pi \wedge 0 \leq v \leq \pi\}$.

- (2) **Parameterdarstellung** der Oberfläche des Zylindermantels eines Kreiszylinders mit dem Radius a , dessen Achse durch den Koordinatenursprung geht und parallel zur z -Achse verläuft. Als Fläche 2. Ordnung besitzt sie die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$.

Der Winkel u habe diesselbe Bedeutung wie in Beispiel 1.2 (1). Dann gilt:

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = v,$$

definiert auf dem Rechteck $R_{u,v} = \{(u, v) \mid 0 \leq u < 2\pi \wedge v_1 \leq v \leq v_2\}$.

1.2 Skalar- und Vektorfelder

Definition 1.3 (Skalarfeld, Vektorfeld)

1. Eine in $D \subseteq \mathbb{R}^3$ definierte skalare Funktion

$$U = U(\mathbf{r}) = U(x, y, z), \quad \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

heißt **Skalarfeld (SF)** in D ($n = 3, m = 1$).

2. Eine in $D \subseteq \mathbb{R}^3$ definierte Vektorfunktion

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\mathbf{i} + v_2(x, y, z)\mathbf{j} + v_3(x, y, z)\mathbf{k} = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

heißt **Vektorfeld (VF)** in D ($n = m = 3$).

- Eine **skalare Feldgröße** ist durch **einen Skalar** bestimmt.
Skalarfelder sind z.B. Temperaturfelder.
- Eine **vektorielle Feldgröße** ist durch **drei skalare Feldgrößen** bestimmt.
Vektorfelder sind z.B. Geschwindigkeitsfelder, Beschleunigungsfelder, Kraftfelder.

Wir betrachten nur sich zeitlich nicht ändernde Felder, so genannte **stationäre Felder**. Ändern sich die Felder noch nach der Zeit, so spricht man von **instationären Feldern**. Dann ist $U = U(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Wichtige Typen von Feldern

- 1° **Ebenes SF**: $U = U(x, y)$, U hängt nicht von z ab.
- 2° **Zentralsymmetrisches SF**: $U(\mathbf{r}) = f(r)$ mit $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, U hängt nur vom Abstand des Punktes vom Koordinatenursprung ab.
- 3° **Axialsymmetrisches SF**: $U = U(\sqrt{x^2 + y^2})$, U hängt nur vom Abstand des Punktes von der z -Achse ab.
- 4° **Ebenes VF**: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = v_1(x, y)\mathbf{i} + v_2(x, y)\mathbf{j}$, $v_3(x, y) = 0 \quad \forall (x, y)$.
- 5° **Zentralsymmetrisches VF**: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.
- 6° **Axialsymmetrisches VF**: $\mathbf{v} = f(\sqrt{x^2 + y^2})(x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) = f(r)\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$.

Betrachtet man einen Kreiszyylinder mit der z -Achse als Zylinderachse und dem Radius $\sqrt{x^2 + y^2}$, dann hat \mathbf{v} in jedem Punkt der Zylinderoberfläche den gleichen Betrag und steht senkrecht auf ihr.

Beispiel 1.3 (Skalarfeld, Vektorfeld)

- (1) Das **Potenzial** U einer sich im Koordinatenursprung befindlichen Punktladung Q wird durch ein **räumliches SF**

$$U = U(x, y, z) := \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f(r) \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \quad (1.1)$$

beschrieben, wobei ϵ die Dielektrizitätskonstante bezeichnet.

Eine Veranschaulichung von **räumlichen SF** ist mit Hilfe von **Niveauflächen** möglich. Dies sind Flächen, die der Gleichung $U(x, y, z) = c$, $c \in \mathbb{R}$, genügen. Ein **ebenes SF** läßt sich durch **Niveaulinien** darstellen.

Für das Temperaturfeld (1.1) ist $c > 0$ zu wählen und man erhält als **Niveauflächen** eine Schar von Kugeln in Mittelpunktslage und dem Radius $\frac{Q}{4\pi\epsilon c}$.

- (2) Gegeben sei das **ebene VF**

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = y \mathbf{i} + x \mathbf{j}. \quad (1.2)$$

Man kann ein **VF** veranschaulichen, indem man im Endpunkt jedes **Ortsvektors** \mathbf{r} einen Pfeil, der $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ repräsentiert, mit seinem Anfangspunkt anheftet. Eine weitere Veranschaulichung ist mit Hilfe von **Feldlinien** möglich. Dies sind Kurven, deren **Tangentenrichtung** in jedem Punkt mit der Richtung, die das **VF** in diesem Punkt vorgibt, übereinstimmt (Lösungen von Differenzialgleichungssystemen).

Für das ebene Kraftfeld (1.2) erhält man als **Feldlinien** Hyperbeln.

Voraussetzung: Im Weiteren seien alle betrachteten Funktionen **zweifach stetig differenzierbar** im betrachteten Bereich D .

Definition 1.4 Seien (x, y, z) die kartesischen Koordinaten eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$. Der Differenzialoperator

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

heißt **Nabla-Operator (Vektorieller Differenzialoperator)**.

1.3 Produkte des Nabla-Operators mit einem SF bzw. VF

Definition 1.5 Sei $U(x, y, z)$ ein **SF**. **Gradient** von $U(x, y, z)$ heißt das **VF**

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

SF $U \implies$ VF $\text{grad } U$ $\text{grad } U = \nabla U$

Bemerkung 1.1 Die Endpunkte der **Ortsvektoren** $\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}$, wobei $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ ein hinreichend kleiner vektorieller Zuwachs von \mathbf{r} ist, der i . Allg. nicht die gleiche Richtung wie \mathbf{r} besitzt, mögen in $D(U)$ liegen. Das **totale Differenzial** des **SF** $U(\mathbf{r})$ ist unter Verwendung des Gradientenbegriffs darstellbar in der Form

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \langle \text{grad } U, d\mathbf{r} \rangle = |\text{grad } U| |d\mathbf{r}| \cos \varphi, \quad (1.3)$$

wobei φ der Winkel zwischen $\text{grad } U$ und $d\mathbf{r}$ ist.

Falls $d\mathbf{r}$ in der **Tangentialebene** einer **Niveauläche** liegt, so ist

$$U(\mathbf{r}) = c \quad \text{und} \quad U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = c \quad \text{also} \quad \Delta_{d\mathbf{r}} U = U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.4)$$

Bekanntlich gibt $\Delta_{d\mathbf{r}} U$ die Änderung des **SF** U bei Bewegung von \mathbf{r} nach $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ an. Auf Grund unserer Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ist $\Delta_{d\mathbf{r}} U \approx dU$. Dann ist wegen (1.4) auch $dU = 0$. Mit (1.3) gilt dann $\langle \text{grad } U, d\mathbf{r} \rangle = 0$ und somit $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d.h., für jeden Punkt $P_0 \in D(U)$ ist $\text{grad } U$ ein **Vektor**, der auf der durch P_0 hindurchgehenden **Niveauläche** $U(\mathbf{r}) = c$ senkrecht steht.

Definition 1.6 Sei \mathbf{l}_n der zur Richtung l gehörige **Einheitsvektor** und $U(\mathbf{r})$ ein **SF**. Wir legen durch den Endpunkt P_0 des **Ortsvektors** \mathbf{r}_0 in Richtung von \mathbf{l} eine Gerade l . Alle Punkte dieser Geraden besitzen **Ortsvektoren** der Gestalt $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}_n \quad t \in \mathbb{R}$. Betrachten wir $U(\mathbf{r})$ nur auf dieser Geraden, so erhalten wir eine Funktion $g(t) = U(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{l}_n)$. Die Ableitung $g'(0)$ heißt dann Ableitung von $U(\mathbf{r})$ im Punkt P_0 in Richtung l oder **Richtungsableitung**

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_l U}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{r}_0 + \Delta t \mathbf{l}_n) - U(\mathbf{r}_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(\Delta t) - g(0)}{\Delta t} = g'(0).$$

In einem kartesischen Koordinatensystem, d.h. $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$ und $\mathbf{l}_n = l_x \mathbf{i} + l_y \mathbf{j} + l_z \mathbf{k}$ gilt die Differenzierungsregel:

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l} = \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial x} l_x + \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial y} l_y + \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial z} l_z = \langle \text{grad } U(\mathbf{r}_0), \mathbf{l}_n \rangle = |\text{grad } U(\mathbf{r}_0)| \cos \alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen $\text{grad } U(\mathbf{r}_0)$ und \mathbf{l}_n ist.

Bemerkung 1.2 Die **partiellen Ableitungen** $\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial x}, \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial y}, \frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial z}$ geben die **Änderungsgeschwindigkeiten** der Funktion U in Richtung der Koordinatenachsen an und sind Spezialfälle von **Richtungsableitungen**. Folglich gibt $\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l}$ die **Änderungsgeschwindigkeit** der Funktion U in einer beliebigen Richtung l an. Für einen **Einheitsvektor** \mathbf{n}^0 der Normalen zur **Niveauläche**, der dieselbe Richtung wie $\text{grad } U$ besitzt, gilt:

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial n} = \langle \text{grad } U(\mathbf{r}_0), \mathbf{n}^0 \rangle = |\text{grad } U(\mathbf{r}_0)| = \sqrt{\left(\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial z}\right)^2},$$

d.h. unter allen **Richtungsableitungen** von U in einem festen Punkt P_0 besitzt $\frac{\partial U}{\partial n}$ den größten Wert. Die Richtung des **Gradienten** in P_0 ist die Richtung der größten Änderungsgeschwindigkeit von $U(\mathbf{r})$ in P_0 , also die Richtung, in der die U -Werte am stärksten wachsen.

Definition 1.7 Ein **VF** \mathbf{v} heißt **konservatives Feld** oder **Potenzialfeld (PF)**, wenn ein **SF** U existiert, so dass gilt: $\mathbf{v} = \text{grad } U$. Dies ist gleichbedeutend mit

$$v_1 = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} \wedge v_2 = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} \wedge v_3 = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \iff v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz = dU.$$

Dabei heißt U das **Potenzial** von \mathbf{v} .

Definition 1.8 (Divergenz, Quellenfreiheit)

1. Sei $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ein **VF**. **Divergenz** von $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ heißt das **SF**

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

VF $\mathbf{v} \implies$ SF $\text{div } \mathbf{v}$ $\text{div } \mathbf{v} = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle$
--

2. Ein **VF** \mathbf{v} mit der Eigenschaft $\text{div } \mathbf{v}(x, y, z) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in D$ heißt **quellenfrei**.

3. Ist \mathbf{v} das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung, so bedeutet $\text{div } \mathbf{v}$ in einem Punkt die lokale **Quelldichte** des **VF** \mathbf{v} in diesem Punkt.

Definition 1.9 (Rotation, Wirbelfreiheit)

1. Sei $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ein **VF**. **Rotation** von $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ heißt das **VF**

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

VF $\mathbf{v} \implies$ VF $\text{rot } \mathbf{v}$ $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$
--

2. Ein **VF** \mathbf{v} mit der Eigenschaft $\text{rot } \mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{0} \quad \forall (x, y, z) \in D$ heißt **wirbelfrei**.

3. Ist \mathbf{v} das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung, so bedeutet $\text{rot } \mathbf{v}$ in einem Punkt die lokale **Wirbeldichte** des **VF** \mathbf{v} in diesem Punkt.

Beispiel 1.4 (Richtungsableitung, Potenzialfeld)

(1) Sei $U(x, y) = x^2 + y^2$, $D(U) = \mathbb{R}^2$ ein **ebenes SF**, $P_0 = (1, 1)$ und $\mathbf{l} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Dann ist

$$\frac{\partial U(1, 1)}{\partial l} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U(1 + \Delta t l_x, 1 + \Delta t l_y) - U(1, 1)}{\Delta t} = 2\sqrt{2} = \langle \nabla U(1, 1), \mathbf{l}_n \rangle.$$

(2) Für das **Newtonsche Potenzial** eines **zentralsymmetrischen Kraftfeldes** gilt:

$U(\mathbf{r}) = f(r) = \frac{1}{r}$, $D(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\text{grad } U(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$. Für die **Richtungsableitung** in einem Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in Richtung des **Einheitsvektors** $\mathbf{l}_n = l_x \mathbf{i} + l_y \mathbf{j} + l_z \mathbf{k}$ erhält man

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial l} = -\frac{1}{r_0^3}(x_0 l_x + y_0 l_y + z_0 l_z).$$

- (3) Das **SF** $U(\mathbf{r})$ sei ein Temperaturfeld. Die **Niveaulächen** sind Flächen konstanter Temperatur. In jedem Punkt P_0 ist ∇U ein Vektor, der senkrecht auf der durch diesen Punkt hindurchgehenden **Niveauläche** steht und in die Richtung des stärksten Temperaturwachstums zeigt. Je stärker U wächst, desto größer ist $|\nabla U|$.
- (4) Das Schwerfeld der Erde $\mathbf{K} = -g\mathbf{k}$ (g Erdbeschleunigung) ist ein **PF**, denn für das **SF** $U = -gz$ gilt $\mathbf{K} = \nabla U$. Ferner ist $\operatorname{div} \mathbf{K} = 0$ und $\operatorname{rot} \mathbf{K} = \Theta$.

1.4 Nabla-Rechnung

Eigenschaften des Gradienten

- 1° $\nabla(U_1 + U_2) = \nabla U_1 + \nabla U_2$
 2° $\nabla(\lambda U) = \lambda \nabla U \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 3° $\nabla(U_1 U_2) = U_1 \nabla U_2 + U_2 \nabla U_1$
 4° $\nabla f(U) = f'(U) \nabla U$ für die mittelbare Funktion $f(U(x, y, z))$

Eigenschaften der Divergenz

- 1° $\langle \nabla, (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \rangle = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle + \langle \nabla, \mathbf{w} \rangle$
 2° $\langle \nabla, (\lambda \mathbf{v}) \rangle = \lambda \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 3° $\langle \nabla, (U \mathbf{v}) \rangle = U \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \nabla U \rangle$
 Beachte: $\langle \nabla, \mathbf{v} \rangle = \operatorname{div} \mathbf{v}$ ist ein **SF**, aber $\langle \mathbf{v}, \nabla \rangle$ ist ein Operator.
 4° $\langle \nabla, (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{w}, \operatorname{rot} \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{w} \rangle$

Eigenschaften der Rotation

- 1° $\nabla \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{w}$
 2° $\nabla \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\nabla \times \mathbf{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 3° $\nabla \times (U \mathbf{v}) = U (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla U)$

Beispiel 1.5 Die betrachteten **SF** und **VF** seien zentralsymmetrisch.

- (1) $\operatorname{grad} f(r) = \nabla f(r) = f'(r) \nabla r = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$
 (2) $\operatorname{div} [f(r) \mathbf{r}] = \langle \nabla, (f(r) \mathbf{r}) \rangle = f(r) \langle \nabla, \mathbf{r} \rangle + \langle \mathbf{r}, \nabla f(r) \rangle = 3f(r) + f'(r)r$
 (3) $\operatorname{rot} [f(r) \mathbf{r}] = \nabla \times (f(r) \mathbf{r}) = f(r) (\nabla \times \mathbf{r}) - \mathbf{r} \times \nabla f(r) = \nabla f(r) \times \mathbf{r} = \Theta$

Zweifache Anwendung des Nabla-Operators

- 1° $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \langle \nabla, \nabla \times \mathbf{v} \rangle = 0 \implies$ Jedes **Wirbelfeld** $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$ ist **quellenfrei**.
 2° $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \nabla \times \nabla U = \Theta \implies$ Jedes **PF** $\mathbf{v} = \nabla U$ ist **wirbelfrei**.

2 Integralrechnung für reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen

2.1 Ebene und räumliche Bereichsintegrale

Das Integrationsintervall wird durch eine ebene bzw. räumliche Punktmenge ersetzt.

Voraussetzungen: Die betrachteten ebenen (räumlichen) Punkt Mengen B mögen einen Flächeninhalt (ein Volumen) besitzen.

Das **ebene Bereichsintegral** $\iint_B f(x, y) \, db$ (**räumliche Bereichsintegral** $\iiint_B f(x, y, z) \, db$) wird wie im Falle $n = 1$ über einen **Grenzwert** definiert.

Definition 2.1 (Ebene und räumliche Normalbereiche)

1. Seien $y_1(x), y_2(x)$ **stetig** in $[x_1, x_2]$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$. Die Punktmenge

$$B_x = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

heißt **ebener Normalbereich** bezüglich der x -Achse.

2. Seien $x_1(y), x_2(y)$ **stetig** in $[y_1, y_2]$, $x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \quad \forall y \in [y_1, y_2]$. Die Punktmenge

$$B_y = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \wedge y_1 \leq y \leq y_2\}$$

heißt **ebener Normalbereich** bezüglich der y -Achse.

3. Seien $z_1(x, y), z_2(x, y)$ **stetig** in B_x , $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_x$. Die Punktmenge

$$B_{xy} = \{(x, y, z) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \wedge z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

heißt **räumlicher Normalbereich** bezüglich der x, y -Ebene, wobei B_x ein **ebener Normalbereich** bezüglich der x -Achse ist. Analog definiert man 5 weitere Typen **räumlicher Normalbereiche**.

Beispiel 2.1 (Ebene und räumliche Normalbereiche)

- (1) Ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten

$$R = \{(x, y) \mid a_1 \leq x \leq a_2 \wedge b_1 \leq y \leq b_2\}$$

ist ein Spezialfall eines **ebenen Normalbereichs** bezüglich beider Koordinatenachsen.

- (2) Ein Quader mit achsenparallelen Kanten

$$Q = \{(x, y, z) \mid a_1 \leq x \leq a_2 \wedge b_1 \leq y \leq b_2 \wedge c_1 \leq z \leq c_2\}$$

ist ein Spezialfall eines **räumlichen Normalbereichs** bezüglich aller drei Koordinatenebenen.

$$(3) B_x = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$B_y = \{(x, y) \mid \sqrt{y} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$$

$$(4) B_{xy} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq z \leq xy\}$$

Theorem 2.1 (Existenz von Bereichsintegralen) Sei B ein aus endlich vielen Normalbereichen zusammengesetzter ebener (räumlicher) Bereich und f eine in B definierte und stetige Funktion. Dann existiert das ebene (räumliche) Bereichsintegral und es gelten die Berechnungsformeln:

1. Ist B_x ein ebener Normalbereich bezüglich der x -Achse und f stetig in B_x , so ist

$$\iint_{B_x} f(x, y) \, db = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Das (zweifache) Integral auf der rechten Seite berechnet sich wie folgt

- 1° Die Funktion $f(x, y)$ wird unbestimmt nach y integriert (dabei wird x als konstant angesehen).
- 2° Für y werden die Grenzen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ eingesetzt.
- 3° Der Integrand ist nach dem Einsetzen der Integrationsgrenzen bezüglich y nur noch eine Funktion von x und wird unbestimmt nach x integriert.
- 4° Für x werden die Grenzen x_1 und x_2 eingesetzt.

2. Ist B_y ein ebener Normalbereich bezüglich der y -Achse und f stetig in B_y , so ist

$$\iint_{B_y} f(x, y) \, db = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Das (zweifache) Integral auf der rechten Seite wird analog wie oben berechnet.

3. Ist B_{xy} ein räumlicher Normalbereich bezüglich der x, y -Ebene und f stetig in B_{xy} , so ist

$$\iiint_{B_{xy}} f(x, y, z) \, db = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Das (dreifache) Integral auf der rechten Seite berechnet sich sukzessive wie oben.

Beispiel 2.2 (Ebene und räumliche Bereichsintegrale)

$$(1) f(x, y) = xy \quad B_x = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$\iint_{B_x} f(x, y) \, db = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} xy \, dy \right) dx = \frac{1}{12}$$

$$(2) f(x, y, z) = x y z \quad B_{xy} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq z \leq xy\}$$

$$\iiint_{B_{xy}} f(x, y, z) \, db = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \left(\int_0^{xy} x y z \, dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{96}$$

2.2 Kurvenintegrale

Das Integrationsintervall wird durch ein ebenes bzw. räumliches Kurvenstück ersetzt.

Voraussetzungen: Wir betrachten ebene Kurven bzw. Raumkurven C , die eine endliche Länge besitzen mögen. Die Kurve sei durch eine Parameterdarstellung, deren Koordinatenfunktionen auf einem abgeschlossenen Intervall **stetig differenzierbar** sind, gegeben. In diesem Falle nennen wir C eine **glatte Kurve**.

Wir unterscheiden **Kurvenintegrale 1. Art** (Integrale über die Kurve C) und **Kurvenintegrale 2. Art** (Integrale über die Projektionen von C auf die drei Koordinatenachsen). Beide werden wieder über einen Grenzwert definiert und zur Berechnung auf **Riemannsche Integrale** zurückgeführt.

Theorem 2.2 (Existenz von Kurvenintegralen) *Es sei C eine glatte Raumkurve mit einer Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, dem Anfangspunkt P_1 und dem Endpunkt P_2 . Ferner sei $f(x, y, z)$ ($\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z)$) ein in den Punkten der Kurve C definiertes und stetiges SF (VF). Dann existiert das **Kurvenintegral 1. Art** $\int_C f(x, y, z) \, dl$, welches nicht davon abhängt, ob die Kurve von P_1 nach P_2 oder umgekehrt durchlaufen wird. Außerdem existiert das **Kurvenintegral 2. Art***

$$\int_C v_1(x, y, z) \, dx + v_2(x, y, z) \, dy + v_3(x, y, z) \, dz = \int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle,$$

welches jedoch beim Durchlauf der Kurve in entgegengesetzter Richtung, d.h. von P_2 nach P_1 sein Vorzeichen ändert. Es gelten die Rückführungsformeln auf **Riemannsche Integrale**:

$$\int_C f(x, y, z) \, dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt, \quad (2.1)$$

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_{t_1}^{t_2} [v_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + v_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + v_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt. \quad (2.2)$$

Ist C eine **glatte, ebene Kurve** mit einer **Parameterdarstellung** $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in [t_1, t_2]$, so lauten die Rückführungsformeln auf **Riemannsche Integrale**

$$\int_C f(x, y) \, dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt, \quad (2.3)$$

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_{t_1}^{t_2} [v_1(x(t), y(t))x'(t) + v_2(x(t), y(t))y'(t)] dt. \quad (2.4)$$

Ist eine ebene Kurve C in einer expliziten Darstellung $y = \varphi(x)$ gegeben, wobei die Funktion φ in einem Intervall $[x_1, x_2]$ stetig differenzierbar ist, so setzt man $x = t$, $y = \varphi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ und erhält aus (2.3) bzw. (2.4)

$$\int_C f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(t, \varphi(t)) \sqrt{1 + \varphi'(t)^2} dt, \quad (2.5)$$

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_{t_1}^{t_2} [v_1(t, \varphi(t)) + v_2(t, \varphi(t))\varphi'(t)] dt. \quad (2.6)$$

Kurvenintegrale lassen sich also mithilfe Riemanscher Integrale berechnen.

Beispiel 2.3 (Kurvenintegrale 1. und 2. Art)

(1) $f(x, y) = x^2$ $C : y = \varphi(x) = \ln x$, $[x_1, x_2] = [1, 2]$ Aus (2.5) erhält man

$$\int_C f(x, y) dl = \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^2 t \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{1}{3} [5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}].$$

(2) $v_1(x, y) = y^2$, $v_2(x, y) = y$ $C : y = 2x - 1$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (3, 5)$ Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art bez. beider Durchlaufrichtungen. Ergebnis: $\pm \frac{98}{3}$.

(3) Durch das ebene Kraftfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = k \mathbf{r}$, $k \in \mathbb{R}$ wird bei Verschiebung eines Massenpunktes von $P_1 = (x_1, y_1)$ nach $P_2 = (x_2, y_2)$ längs einer beliebigen glatten Kurve C mit einer Parameterdarstellung $\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j}$, dem Anfangspunkt P_1 und dem Endpunkt P_2 eine Arbeit W verrichtet, die sich durch ein Kurvenintegral 2. Art berechnen lässt. Es seien t_1 (t_2) die P_1 (P_2) entsprechenden Parameterwerte.

$$\begin{aligned} W &= \int_C \langle \mathbf{v}(\mathbf{r}), d\mathbf{r} \rangle = k \int_{t_1}^{t_2} [x(t)x'(t) + y(t)y'(t)] dt \\ &= k \int_{t_1}^{t_2} d \left[\frac{[x(t)]^2}{2} + \frac{[y(t)]^2}{2} \right] = \frac{k}{2} ([x(t_2)]^2 + [y(t_2)]^2 - [x(t_1)]^2 - [y(t_1)]^2). \end{aligned}$$

Die Arbeit hängt somit nur von der Lage des Anfangspunktes P_1 und des Endpunktes P_2 der Kurve ab und nicht von der diese Punkte verbindenden Kurve C .

Theorem 2.3 Sei $D \in \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängender Bereich, $C \subset D$ eine glatte Kurve mit dem Anfangspunkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ sowie dem Endpunkt $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ und $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ eine stetige Vektorfunktion in D . Das Kurvenintegral 2. Art, (für eine ebene Kurve oder eine Raumkurve C), $\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle$ ist genau dann vom Weg zwischen P_1 und P_2 unabhängig, wenn $\mathbf{v} = \nabla U$, d.h., wenn \mathbf{v} ein PF ist. Dann gilt:

$$\int_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \int_C \langle \nabla U, d\mathbf{r} \rangle = \int_{P_1}^{P_2} dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Diese Eigenschaft heißt **Wegunabhängigkeit** des **Kurvenintegrals 2.Art**. Für eine geschlossene Kurve erhält man $\oint_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = 0$.

Theorem 2.4 Ein **VF** $\mathbf{v}(x, y, z)$ ist ein **PF** genau dann, wenn in einem **einfach zusammenhängenden Bereich** gilt

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial z} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ist die letzte Bedingung erfüllt, so kann man das **Potenzial** $U(x, y, z)$ nach der Formel

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{x_0}^x v_1(r, y, z) dr + \int_{y_0}^y v_2(x_0, s, z) ds + \int_{z_0}^z v_3(x_0, y_0, t) dt + C \quad (2.7) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial U(r, y, z)}{\partial x} dr + \int_{y_0}^y \frac{\partial U(x_0, s, z)}{\partial y} ds + \int_{z_0}^z \frac{\partial U(x_0, y_0, t)}{\partial z} dt + C \end{aligned}$$

berechnen, wobei $(x_0, y_0, z_0) \in D$ ein fixierter Punkt und C die Integrationskonstante ist.

Die Formel (2.7) ist eine Verallgemeinerung der unbestimmten Integration. Die **Potenzialfunktion** $U(x, y, z)$ entspricht der Stammfunktion.

Beispiel 2.4 Man berechne das **Potenzial** des **VF** $\mathbf{v} = e^y \cos z \mathbf{i} + x e^y \cos z \mathbf{j} - x e^y \sin z \mathbf{k}$. Es ist $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$, d.h. \mathbf{v} ist ein **Potenzialfeld**.

1. Lösungsweg: Wir wählen $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ und erhalten gemäß (2.7)

$$U(x, y, z) = \int_0^x e^y \cos z dr + \int_0^y 0e^s \cos z ds + \int_0^z (-0e^0 \sin t) dt + C = x e^y \cos z + C.$$

Man überprüft leicht, dass $\nabla U = \mathbf{v}$ gilt. Durch Vorgabe eines Wertes für das **Potenzial** im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ bestimmt man C .

2. Lösungsweg: (Methode des schrittweisen Integrierens) Da \mathbf{v} ein **Potenzialfeld** ist, gilt:

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = e^y \cos z \quad \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = x e^y \cos z \quad \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = -x e^y \sin z. \quad (2.8)$$

Integration der ersten Beziehung in (2.8) nach x ergibt

$$U(x, y, z) = x e^y \cos z + C(y, z). \quad (2.9)$$

Partielle Differentiation nach y und Einsetzen in die zweite Beziehung in (2.8) führt auf $U(x, y, z) = x e^y \cos z + C(z)$. Analoges Vorgehen in der letzten Beziehung von (2.8) liefert das Ergebnis.

2.3 Oberflächenintegrale

Das ebene Integrationsgebiet wird durch ein räumliches gekrümmtes Flächenstück ersetzt.

Voraussetzungen: Die betrachtete gekrümmte Fläche S möge einen Flächeninhalt besitzen. Außerdem sei die Fläche **zweiseitig** und besitze keine Mehrfachpunkte. Es gibt auch **einseitige** Flächen, z.B. das (Möbiussche Band. Die Fläche sei durch eine Parameterdarstellung, deren Koordinatenfunktionen auf einem ebenen Normalbereich B **stetig differenzierbar** sind, gegeben. In diesem Falle nennen wir S eine **glatte Fläche**.

Wir unterscheiden **Oberflächenintegrale 1. Art** (Integrale über die Fläche S) und **Oberflächenintegrale 2. Art** (Integrale über die Projektionen von S auf die drei Koordinatenebenen). Beide werden wieder über einen Grenzwert definiert und zur Berechnung auf **ebene Bereichsintegrale** zurückgeführt.

Theorem 2.5 (Existenz von Oberflächenintegralen) *Es sei S eine glatte zweiseitige Fläche mit einer Parameterdarstellung $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in B$. Ferner sei $f(x, y, z)$ ($\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z)$) ein in den Punkten der Fläche S definiertes und stetiges SF (VF). Dann existiert das Oberflächenintegral 1. Art $\iint_S f(x, y, z) dS$, welches nicht von der Seite der Fläche abhängt. Außerdem existiert das Oberflächenintegral 2. Art*

$$\iint_S v_1(x, y, z) dy dz + v_2(x, y, z) dz dx + v_3(x, y, z) dx dy = \iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle, \quad (2.10)$$

welches jedoch beim Übergang zur anderen Seite der Fläche sein Vorzeichen ändert. Dabei bezeichnet $d\mathbf{w} = dy dz \mathbf{i} + dz dx \mathbf{j} + dx dy \mathbf{k}$ ein vektoriell Oberflächenelement der Fläche S . Es gelten die Rückführungsformeln auf ebene Bereichsintegrale:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_B f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} db \quad (2.11)$$

mit

$$E = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2 \quad G = (x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2 \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$\iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle = \iint_B \begin{vmatrix} v_1(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) & v_2(x(u, v), \dots) & v_3(x(u, v), \dots) \\ x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} db. \quad (2.12)$$

Die Seite einer Fläche wird durch den Normaleneinheitsvektor \mathbf{n}^0 auf der Tangentialebene in den Flächenpunkten charakterisiert. Ist $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$ die **Vektorfunktion**, deren Koordinatenfunktionen die **Parameterdarstellung** der Fläche ergeben, so gilt $\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$. Ist \mathbf{n}^0 bei einer geschlossenen (nichtgeschlossenen) Fläche nach außen (oben) gerichtet, so spricht man von der Außenseite (Oberseite) der Fläche. Ist er bei einer geschlossenen (nichtgeschlossenen) Fläche nach innen (unten) gerichtet, so spricht man von der Innenseite (Unterseite) der Fläche. Der Übergang zur anderen Seite der Fläche wird durch Vertauschen der Reihenfolge von u und v in der **Parameterdarstellung** der Fläche erreicht. Man erhält aus $\mathbf{r}(u, v)$ die Parameterdarstellung $\mathbf{r}(v, u)$ und den entgegengesetzt zu \mathbf{n}^0 gerichteten Normaleneinheitsvektor $-\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u|}$.

Ist eine Fläche S in einer expliziten Darstellung $z = \varphi(x, y)$ gegeben, wobei die Funktion φ in einem ebenen Normalbereich B stetig differenzierbar ist, so setzt man $x = u$, $y = v$, $z = \varphi(u, v)$, $(u, v) \in B$ und erhält aus (2.11) und (2.12)

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_B f(u, v, \varphi(u, v)) \sqrt{1 + [\varphi_u(u, v)]^2 + [\varphi_v(u, v)]^2} db, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle &= \iint_B \begin{vmatrix} v_1(u, v, \varphi(u, v)) & v_2(u, \dots) & v_3(u, \dots) \\ 1 & 0 & \varphi_u(u, v) \\ 0 & 1 & \varphi_v(u, v) \end{vmatrix} db. \\ &= \iint_B [-v_1(u, v, \varphi(u, v))\varphi_u(u, v) - v_2(u, v, \varphi(u, v))\varphi_v(u, v) + v_3(u, v, \varphi(u, v))] db. \end{aligned} \quad (2.14)$$

In (2.12) und (2.14) sind beim Übergang zur anderen Seite der Fläche die beiden letzten Zeilen in der Determinante zu vertauschen. Das **Oberflächenintegral 2. Art** (2.10) heißt **Vektorfluss** des **VF** \mathbf{v} durch die Fläche S in Richtung von \mathbf{v} .

Oberflächenintegrale lassen sich also mithilfe **ebener Bereichsintegrale** berechnen.

Beispiel 2.5 (Oberflächenintegrale 1. und 2. Art)

$$S: z = 1 - x - y, \quad x \in [0, 1/2] \quad y \in [0, 1/2]$$

- (1) Berechnen Sie das **Oberflächenintegral 1. Art** für das **SF** $f(x, y, z) = 1 \forall (x, y, z) \in S$, wobei S der Teil der Ebene $z = 1 - x - y$ ist, der sich über dem Quadrat $Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 1/2\}$ befindet.

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \sqrt{3} \int_0^{1/2} \left(\int_0^{1/2} du \right) dv = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Geometrische Interpretation: Berechnet wurde der Flächeninhalt des Teils der Ebene S , der sich über dem Quadrat Q befindet.

- (2) Berechnen Sie das **Oberflächenintegral 2. Art** für das **VF**

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall (x, y, z) \in S,$$

wobei S die Oberseite des Teils der Ebene $z = 1 - x - y$ ist, der sich über dem Quadrat Q befindet.

$$\iint_S v_1(x, y, z) dy dz + v_2(x, y, z) dz dx + v_3(x, y, z) dx dy = \int_0^{1/2} \left(\int_0^{1/2} 3 du \right) dv = \frac{3}{4}$$

Physikalische Interpretation: Berechnet wurde der **Vektorfluss** des **VF** \mathbf{v} durch den Teil der Ebene S , der sich über dem Quadrat Q befindet, in Richtung von \mathbf{v} .

(3) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche einer Kugel in Mittelpunktlage mit dem Radius a .

Es sei eine Parameterdarstellung der Kugeloberfläche S :

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}, \quad D(\mathbf{r}) = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi\}$$

mit $x(u, v) = a \cos u \sin v$, $y(u, v) = a \sin u \sin v$, $z(u, v) = a \cos v$ gegeben. Es gilt: $E = a^2 \sin^2 v$, $G = a^2$, $F = 0$ und somit $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin v$. Dann ist gemäß (2.11) mit $f(x, y, z) = 1 \forall (x, y, z) \in S$

$$\iint_S dS = \iint_B \sqrt{EG - F^2} db = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sin v dv \right) du = 2\pi a^2 [-\cos v]_0^\pi = 4\pi a^2.$$

2.4 Die Integralsätze

Man kann die **Integralsätze** als Verallgemeinerung des **Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung** auffassen.

2.4.1 Die Divergenz und der Integralsatz von Gauß

Wir betrachten die **Diffusion** eines Stoffes A in einem Lösungsmittel B . Jedem Raumpunkt kann man dann einen **Strömungsvektor** $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$ zuordnen, so dass man ein **VF**, das so genannte **Strömungsfeld** erhält. Die **Konzentration** des Stoffes A zum Zeitpunkt t sei durch $c(x, y, z, t)$ gegeben. Es gilt folgender Zusammenhang zwischen c und \mathbf{v} :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) = - \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.15)$$

Stellt \mathbf{v} ein Strömungsfeld dar, so gibt $-\operatorname{div} \mathbf{v}$ die **Konzentrationsänderung** des Strömungsfeldes nach t an. Stellen des **VF** \mathbf{v} mit **positiver Divergenz** nennt man **Quellen**, solche mit **negativer Divergenz** **Senken**.

Theorem 2.6 (Gaußscher Integralsatz) Sei B ein räumlicher Bereich mit einer **geschlossenen, zweiseitigen, stückweise glatten Randfläche** S , wobei die **Außenseite** der Fläche betrachtet wird, d.h., der **Normaleneinheitsvektor** \mathbf{n}^0 zeigt nach außen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{v} db &= \iiint_B \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) db \\ &= \oiint_S v_1 dy dz + v_2 dz dx + v_3 dx dy = \oiint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Der **Gaußsche Integralsatz** stellt einen Zusammenhang zwischen **Oberflächenintegralen 2. Art** und **räumlichen Bereichsintegralen** her.

Das **Oberflächenintegral 2. Art** in (2.16) heißt bekanntlich **Vektorfluss** des **Vektorfeldes** \mathbf{v} durch die Fläche S in Richtung von \mathbf{v} .

Geometrische Interpretation: Die Flüssigkeitsmenge, die durch die Oberfläche eines räumlichen Gebietes herausströmt, ist gleich der Flüssigkeitsmenge, die die Quellen in dem Gebiet erzeugen (Satz über die Erhaltung der Materie).

Beispiel 2.6 (Gaußscher Integralsatz)

- (1) Bei einem Diffusionsvorgang sei der Strömungsvektor $\mathbf{v} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ gegeben. Welche Stoffmenge M strömt je Zeiteinheit aus einem Quader mit den Kantenlängen l, m, n , der sich im 1. Oktanten befindet? Dabei liege eine Ecke im Koordinatenursprung, wobei die Kanten, die diese Ecke bilden, sich längs der Koordinatenachsen erstrecken.

Nach dem **Gaußschen Integralsatz** ist

$$\begin{aligned} M &= \oiint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, db \\ &= \int_0^l \left(\int_0^m \left(\int_0^n (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \, dz \right) dy \right) dx = l m n (l^2 + m^2 + n^2). \end{aligned}$$

- (2) Bei einem Diffusionsvorgang sei das Strömungsfeld $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ gegeben. Welche Stoffmenge M strömt je Zeiteinheit aus einem Körper B mit dem Volumen $V(B)$?

Nach dem **Gaußschen Integralsatz** ist

$$M = \oiint_S \langle \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, db = \iiint_V (1 + 1 + 1) \, db = 3V(B).$$

Für das **VF** $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ ist $M = 0$.

2.4.2 Die Rotation und der Integralsatz von Stokes

Zusammen mit dem **VF** \mathbf{v} betrachtet man das **Wirbelfeld** $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, welches die Rotationsbewegungen von \mathbf{v} beschreibt. Für $\mathbf{v} = \omega(\mathbf{n}^0 \times \mathbf{r})$ (Rotation aller Punkte des Raumes mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse in Richtung \mathbf{n}^0) gilt mit $\mathbf{n}^0 = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \omega[(n_2z - n_3y)\mathbf{i} + (n_3x - n_1z)\mathbf{j} + (n_1y - n_2x)\mathbf{k}] \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (n_2z - n_3y) & (n_3x - n_1z) & (n_1y - n_2x) \end{vmatrix} \\ &= 2\omega[n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}] = 2\omega\mathbf{n}^0. \end{aligned}$$

Die Feldlinien von $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ heißen **Wirbellinien**. Man nennt $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ auch das **Wirbelfeld** zum **VF** \mathbf{v} . In einer Flüssigkeitsströmung ist die **Rotation** $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ ein Maß für die lokale **Wirbeldichte** des **VF** \mathbf{v} .

Definition 2.2 Es sei \mathbf{v} ein **VF** und S ein Flächenstück mit einer **geschlossenen, stückweise glatten Randkurve** C . Das Integral

$$Z = \oint_C \langle \mathbf{v}, d\mathbf{r} \rangle = \oint_C v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$$

heißt **Zirkulation** des **VF** \mathbf{v} längs der geschlossenen Kurve C .

Die **Zirkulation** Z ist ein Maß dafür wie stark die Kurve C mittels der **Wirbel**, die sich in den Punkten der durch C umschlossenen Fläche befinden, umströmt wird.

Theorem 2.7 (Stokesscher Integralsatz) Sei S ein stückweise glattes zweiseitiges Flächenstück mit einer geschlossenen stückweise glatten Randkurve C . Dabei werde der Umlaufsinn auf der Kurve derart gewählt, dass vom Standpunkt eines Beobachters aus, der auf der Seite der Fläche steht, auf der sich der **Normaleneinheitsvektor** \mathbf{n}^0 befindet, die Kurve gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Dann gilt $Z =$

$$\iint_S \langle \text{rot } \mathbf{v}, d\mathbf{w} \rangle = \iint_S \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Der **Stokessche Integralsatz** stellt einen Zusammenhang zwischen **Kurvenintegralen 2. Art** und **Oberflächenintegralen 2. Art** her.

Geometrische Interpretation: Die **Zirkulation** eines **VF** \mathbf{v} längs einer geschlossenen Kurve C ist gleich dem **Vektorfluss** von $\text{rot } \mathbf{v}$ durch die Fläche, die von der Kurve C begrenzt wird. Für ein **PF** \mathbf{v} ist $Z = 0$, denn $\mathbf{v} = \nabla U$ und $\text{rot}(\nabla U) = \mathbf{0}$.

Als Spezialfall des **Stokessche Integralsatzes** erhält man für $n = 2$ die **Greensche Formel**:

$$\oint_C v_1 dx + v_2 dy = \iint_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_B \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) db.$$

Beispiel 2.7 (Stokesscher Integralsatz)

(1) Eine Kreislinie C sei durch die **Vektorfunktion** $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$ $t \in [0, 2\pi]$ gegeben. Auf C seien die **VF** $\mathbf{v}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ und $\mathbf{v}_2 = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}$ definiert. Berechnen Sie in beiden Fällen die **Zirkulation**.

(2) Sei \mathbf{B} die magnetische Induktion, \mathbf{E} die elektrische Feldstärke. Die erste der **Maxwell-schen Gleichungen** lautet in Integralform

$$\oint_C \langle \mathbf{E}, d\mathbf{r} \rangle = - \iint_S \langle \dot{\mathbf{B}}, d\mathbf{w} \rangle \implies \iint_S \langle \text{rot } \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}, d\mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall S \implies \text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}.$$

Man erhält das **differenzielle Induktionsgesetz** $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$.

3 Fourier-Reihen

3.1 Periodische und periodisch fortsetzbare Funktionen

Die Approximation einer Funktion $f(t)$ durch die **Taylorsche Formel** ist an die Differenzierbarkeit dieser Funktion gebunden. In den Anwendungen ist die Differenzierbarkeit der zu untersuchenden Funktionen nicht immer gegeben. Deshalb interessieren uns Approximationen von Funktionen aus allgemeineren Funktionenklassen.

Definition 3.1 (absolut integrierbare Funktionen)

Eine Funktion $f(t)$ heißt **absolut integrierbar** im Intervall $]a, b[$, wenn

$$\int_a^b |f(t)| dt < \infty \quad \text{für beliebige } a, b \quad \text{mit } -\infty < a < b < +\infty.$$

Zur Klasse der **absolut integrierbaren** Funktionen gehören alle in $[a, b]$ stetigen Funktionen, alle beschränkten Funktionen, die in $]a, b[$ nur endlich viele Sprungstellen besitzen (stückweise stetige Funktionen), aber auch unbeschränkte Funktionen, für die das Integral $\int_a^b |f(t)| dt$ einen endlichen Wert besitzt.

Beispiel 3.1 (absolut integrierbare Funktion)

$$g(t) = t^{-1/2}, \quad t \in]0, 1[\quad \text{mit} \quad \int_0^1 |g(t)| dt = \int_0^1 g(t) dt = 2.$$

In Physik und Technik spielen periodische Vorgänge eine große Rolle (Drehbewegungen, mechanische und elektrische Schwingungen, Wellen). Deshalb betrachten wir in der Klasse der **absolut integrierbaren** Funktionen periodische Funktionen.

Definition 3.2 (periodische Funktionen)

Eine Funktion $f(t)$ heißt T -periodisch, wenn für $T > 0$ gilt

$$f(t + T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Die Zahl T heißt *Periode* der Funktion $f(t)$.

Eigenschaften periodischer Funktionen

1° Mit T sind auch $T_n = nT$, $n = 2, 3, \dots$, Perioden von $f(t)$.

2° Die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ seien T -periodisch. Dann ist auch die Funktion

$$h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

eine T -periodische Funktion.

3° Die Funktion $f(t)$ sei 2π -periodisch und $T > 0$ sei eine gegebene Periode. Dann ist

$$F(t) = f\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

eine T -periodische Funktion.

4° Für eine T -periodische Funktion $f(t)$ gilt

$$\int_c^{c+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

5° Die Funktion $f(t)$ sei T -periodisch und $g(t)$ sei G -periodisch. Dann ist die Funktion $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ H -periodisch, wenn es Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$H = nT \quad H = mG.$$

Gesucht ist in der Regel die kleinste Periodenlänge (oder Schwingungsdauer) $T > 0$ einer periodischen Funktion $f(t)$. Mit der Kreisfrequenz ω gilt $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Für $f(t) = \sin t$ ist $\omega = 1$ und $T = 2\pi$ die kleinste Periode.

Periodische Fortsetzung

Die Funktion $g(t)$ sei **absolut integrierbar** auf einem beschränkten Intervall $]a, b[$. Wir setzen $T = b - a$ und bilden die T -periodische Fortsetzung $f(t)$ der Funktion $g(t)$

$$f(t) = g(t - kT), \quad t \in]a + kT, b + kT[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Existieren in einem Randpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ der Intervalle die beiden endlichen einseitigen Grenzwerte von $f(t)$

$$f(t_0 - 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f(t) \quad f(t_0 + 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t),$$

so definieren wir $f(t_0)$ als arithmetisches Mittel

$$f(t_0) = \frac{1}{2}[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)].$$

Bei dieser periodischen Fortsetzung bleibt die **absolute Integrierbarkeit** erhalten.

Beispiel 3.2 (Periodizität, periodische Fortsetzbarkeit)

- (1) Für konstante Funktionen $f(t) = c$ existiert keine kleinste Periode. Jede konstante Funktion ist T -periodisch für alle $T > 0$.
- (2) Die Funktion $h(t) = \sin t + \sin 2t + \sin 4t$ besitzt als kleinste Periode $T = 2\pi$. In der Tat, $f_1(t) = \sin t$ ist 2π -periodisch, $f_2(t) = \sin 2t$ π -periodisch und $f_3(t) = \sin 4t$ $\pi/2$ -periodisch. Nach Eigenschaft 5° periodischer Funktionen erhält man eine Periode für die Funktion $h(t)$, falls es Zahlen $n, m, k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$H = n 2\pi, \quad H = m \pi, \quad H = k \frac{\pi}{2}$$

gilt. Die kleinsten natürlichen Zahlen, die die Gleichungen erfüllen, sind $n = 1$, $m = 2$, $k = 4$. Somit ist $T = 2\pi$ die kleinste Periode der Funktion $h(t)$.

(3) Es sei $g(t) = \sin t$, $-1 < t < 3$. Mit $T = 4$ lautet die 4-periodische Fortsetzung

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin(t - 4k), \quad t \in]-1 + 4k, 3 + 4k[, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ f(-1 + 4k) &= \frac{1}{2}[\sin(-1) + \sin(3)], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3.2 Reelle Fourier-Reihen

Problem: Unter welchen Voraussetzungen lassen sich periodische Funktionen durch Reihen von periodischen Funktionen darstellen, genauer, wann lässt sich ein periodischer Vorgang durch eine unendliche **Reihe** der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (3.1)$$

die **trigonometrische Reihe** genannt wird, darstellen und wie sind die Zahlen a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), b_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) zu bestimmen?

Eine reine Sinusschwingung mit der Kreisfrequenz $k\omega$ $k = 2, 3, 4, \dots$ nennt man die **k-te Harmonische** oder **Oberschwingung** zur **Grundschiwingung** $\sin \omega t$ mit der Kreisfrequenz ω . Dann kann man das Problem wie folgt formulieren: Wann lässt sich ein periodischer Vorgang durch Überlagerung einer **Grundschiwingung** mit gewissen **Oberschwingungen** darstellen?

In den Anwendungen bricht man oft nach **endlich vielen Gliedern** der **Reihe** ab und erhält eine Approximation der Funktion durch ein **trigonometrisches Polynom**.

Theorem 3.1 Es gelte:

(i) Die **trigonometrische Reihe** $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$ $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$ der T -periodischen Funktion $f(t)$ **konvergiere** im Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ **gleichmässig**.

(ii) $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$.

Dann gilt:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cos k\omega t \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (3.2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \sin k\omega t \, dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.3)$$

Definition 3.3 Sei $g(t)$ **absolut integrierbar** im Intervall $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$. Die mit Hilfe der Beziehungen (3.2) und (3.3) formal gebildete **Reihe** der Form (3.1) heißt **Fourier-Reihe (FR)** der T -periodischen Fortsetzung $f(t)$ der Funktion $g(t)$, die Zahlen a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) und b_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) gemäß (3.2) und (3.3) nennt man **Fourier-Koeffizienten (FK)** der Funktion $f(t)$.

Wichtige Spezialfälle von FK

- (1) Für 2π -periodische Funktionen, d.h. $T = 2\pi$ und $\omega = 1$ erhält man aus (3.2) und (3.3) mit $c = -\pi$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.4)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.5)$$

- (2) Mit $c = -\frac{T}{2}$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ergeben sich (3.2) und (3.3) in der Form

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t \, dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.6)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t \, dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.7)$$

Bei der praktischen Berechnung der **FK** beachte man, dass im Intervall $]-\pi, \pi[$ bzw. $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ die Beziehung $f(t) = g(t)$ gilt.

Die Bestimmung der **FK** nennt man auch **harmonische Analyse**. Sie wird in der Technik häufig zur Analyse periodischer Vorgänge verwendet.

Theorem 3.2 (Abklingverhalten der FK) Für absolut integrierbare Funktionen $f(t)$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$

Interpretation der reellen FR in den Anwendungen

- Jede Funktion $a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$ beschreibt eine reelle harmonische Schwingung.
- Die Reihe (3.1) interpretiert man als Überlagerung unendlich vieler reeller harmonischer Schwingungen.
- Die Zahlen $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ sind die reellen Amplituden der reellen harmonischen Schwingung $a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$.
- Die reellen Folgen der **FK** (a_k) , (b_k) nennt man **diskretes Amplitudenspektrum** einer T -periodischen Funktion $f(t)$.

Das **diskrete Amplitudenspektrum** lässt sich als die Graphen der beiden Folgen darstellen.

Beispiel 3.3 (Endliche, unendliche FR-n, FR-n unbeschränkter Funktionen)

(1) $g(t) = \sin^2 t, t \in]0, \pi[, \quad T = \pi, \quad \omega = 2.$

Die π -periodische Fortsetzung lautet: $f(t) = g(t - k\pi) = \sin^2(t - k\pi), t \in]k\pi, (k + 1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$, d.h. $f(t) = \sin^2 t, t \in \mathbb{R}$. Bekanntlich gilt die trigonometrische Formel

$$f(t) = \sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t,$$

deshalb darf man zwischen Funktion und **FR** das Gleichheitszeichen setzen.

(2) $g(t) = \sin^3 t, t \in]-\pi, \pi[, \quad T = 2\pi, \quad \omega = 1.$

Die 2π -periodische Fortsetzung lautet: $f(t) = g(t - k2\pi) = \sin^3(t - k2\pi), t \in](2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$, d.h. $f(t) = \sin^3 t, t \in \mathbb{R}$. Bekanntlich gilt die trigonometrische Formel

$$f(t) = \sin^3 t = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t,$$

deshalb darf man zwischen Funktion und **FR** wieder das Gleichheitszeichen setzen.

(3) Entwickeln Sie die periodische Fortsetzung $f(t)$ der Funktion $g(t) = e^t, t \in]-\pi, \pi[$ in ihre **FR** und skizzieren Sie das **diskrete Amplitudenspektrum**.

Es ist $T = 2\pi$ und $\omega = 1$.

Die 2π -periodische Fortsetzung lautet: $f(t) = g(t - k2\pi) = e^{t - k2\pi}, t \in](2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$. Folglich erhält man aus (3.4) und (3.5):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \sinh \pi, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos kt dt = \frac{2(-1)^k \sinh \pi}{\pi(1 + k^2)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin kt dt = -\frac{2k(-1)^k \sinh \pi}{\pi(1 + k^2)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Die **FR** der Funktion e^t hat die Gestalt

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} \sinh \pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + k^2} (\cos kt - k \sin kt) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \sinh \pi \left(\frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}(\cos t - \sin t) + \frac{1}{5}(\cos 2t - 2 \sin 2t) - \dots \right] \right). \end{aligned}$$

Ein Gleichheitszeichen zwischen Funktion und **FR** darf i. Allg. nicht gesetzt werden (Konvergenzuntersuchungen erforderlich).

(4) Berechnen Sie die **FK** der Funktion $f(t)$, die durch periodische Fortsetzung von $g(t) = t^{-1/2}, t \in]0, 1[$ gebildet wird (vgl. Beispiel 3.1).

Es ist $T = 1$ und $\omega = 2\pi$. Die 1-periodische Fortsetzung lautet: $f(t) = g(t - k) = (t - k)^{-1/2}, t \in]k, 1 + k[, k \in \mathbb{Z}$. Die **absolute Integrierbarkeit** bleibt bei dieser

periodischen Fortsetzung erhalten. Setzt man in (3.2) und (3.3) $T = 1$, $c = 0$ sowie $\omega = 2\pi$, so ergibt sich $a_0 = 4$,

$$a_k = 2 \int_0^1 \frac{\cos(2k\pi t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2k\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{z}} dz = \frac{2}{\sqrt{k}} C(2k\pi), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$b_k = 2 \int_0^1 \frac{\sin(2k\pi t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2k\pi} \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz = \frac{2}{\sqrt{k}} S(2k\pi), \quad k = 1, 2, \dots,$$

wobei $C(t)$ und $S(t)$ die **Fresnel-Integrale**

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\cos z}{\sqrt{z}} dz, \quad S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz$$

bezeichnen. Funktionswerte dieser Funktionen können Tabellen entnommen werden oder man erhält sie durch numerische Auswertung der Integrale.

Entwicklung in eine reine Kosinus- oder eine reine Sinus-Reihe

Lemma 3.1 Jede Linearkombination **gerader (ungerader) Funktionen** ist eine **gerade (ungerade) Funktion**. Das **Produkt** zweier **gerader oder ungerader Funktionen** ist eine **gerade Funktion**. Das **Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion** ist eine **ungerade Funktion**.

Lemma 3.2 Für die Integration **gerader bzw. ungerader Funktionen** $h(t)$ über **symmetrische Intervalle** $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ gilt:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(t) dt = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} h(t) dt, \quad \text{falls } h(t) \text{ gerade,} \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(t) dt = 0, \quad \text{falls } h(t) \text{ ungerade.}$$

□

1. Sei $f(t)$ in $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ **absolut integrierbar** und eine **gerade Funktion**, d.h. es gilt $f(t) = f(-t) \quad \forall t \in]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$. Dann ist $h_1(t) = f(t) \cos k\omega t$ eine **gerade** und $h_2(t) = f(t) \sin k\omega t$ eine **ungerade** Funktion. Die **FK** erhält man gemäß (3.6) und (3.7):

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.8)$$

Die **FR** von $f(t)$ hat nun die Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t. \quad (3.9)$$

2. Sei $f(t)$ in $] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ **absolut integrierbar** und eine **ungerade Funktion**, d.h. es gilt $f(t) = -f(-t) \quad \forall t \in] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$. Dann ist $h_1(t) = f(t) \cos k\omega t$ eine **ungerade** und $h_2(t) = f(t) \sin k\omega t$ eine **gerade** Funktion. Die **FK** erhält man gemäß (3.6) und (3.7):

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t \, dt \quad (k = 1, 2, \dots) \quad a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (3.10)$$

Die **FR** von $f(t)$ hat nun die Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t. \quad (3.11)$$

Entwicklung gerader und ungerader periodischer Fortsetzungen in eine FR

Die Funktion $g(t)$ sei im Intervall $]0, \frac{T}{2}[$ definiert und **absolut integrierbar**. Außerdem mögen die beiden endlichen einseitigen Grenzwerte in den Randpunkten des Intervalls existieren. Dann lässt sich sowohl eine **reine Kosinus-Reihe** der Form (3.9) als auch eine **reine Sinus-Reihe** der Form (3.11) wie folgt angeben:

1. 1° Definieren die gerade Fortsetzung von $g(t)$

$$g_1(t) = \begin{cases} g(t) & t \in]0, \frac{T}{2}[\\ g(-t) & t \in]-\frac{T}{2}, 0[\end{cases}, \quad g_1(0) = \frac{1}{2}[g(0-0) + g(0+0)].$$

- 2° Setzen die Funktion $g_1(t)$ außerhalb des Intervalls $] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ durch $f_1(t) = g_1(t - kT) \quad t \in](2k-1)\frac{T}{2}, (2k+1)\frac{T}{2}[\quad k \in \mathbb{Z}$, mit der Periode T fort.

- 3° Berechnen die **FK** von $g_1(t)$ nach Formel (3.8).

2. 1° Definieren die ungerade Fortsetzung von $g(t)$

$$g_2(t) = \begin{cases} g(t) & t \in]0, \frac{T}{2}[\\ -g(-t) & t \in]-\frac{T}{2}, 0[\end{cases}, \quad g_2(0) = \frac{1}{2}[g(0-0) + g(0+0)].$$

- 2° Setzen die Funktion $g_2(t)$ außerhalb des Intervalls durch $f_2(t)$ wie in 1. 2° fort.

- 3° Berechnen die **FK** von $g_2(t)$ nach Formel (3.10).

Beispiel 3.4 (Reine Kosinus- bzw. reine Sinus-Reihen)

- (1) Gegeben: $g(t) = t, \quad t \in]0, \pi[$. Gesucht: Entwicklung in eine **reine Kosinus-Reihe**.

Es gilt $T = 2\pi$, d.h. $\omega = 1$. Definiert man $g_1(t) = g(t) = t$ für $t \in]0, \pi[$, $g_1(t) = g(-t) = -t$ für $t \in]-\pi, 0[$ und $g_1(0) = 0$, so ergibt sich $g_1(t) = |t|$ für $t \in]-\pi, \pi[$ (**gerade**

Funktion). Die 2π -periodische Fortsetzung $f_1(t)$ außerhalb des Intervalls $] -\pi, \pi[$ liefert mit $f_1(-\pi) = f_1(\pi) = \pi$ die so genannten Dreiecksimpulse. Aus (3.8) folgt

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Die **FR** ist von der Form (3.9)

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots \right). \quad (3.12)$$

(2) Gegeben: $g(t) = t, \quad t \in]0, \pi[$. Gesucht: Entwicklung in eine **reine Sinus-Reihe**.

Es gilt wieder $T = 2\pi$. Definiert man $g_2(t) = g(t) = t$ für $t \in]0, \pi[$ und $g_2(t) = -g(-t) = -(-t) = t$ für $t \in]-\pi, 0[$ sowie $g_2(0) = 0$, so ergibt sich $g_2(t) = t$ für $t \in]-\pi, \pi[$ (**ungerade Funktion**). Die 2π -periodische Fortsetzung $f_2(t)$ außerhalb des Intervalls $] -\pi, \pi[$ liefert mit $f_2(-\pi) = f_2(\pi) = 0$ die so genannte Sägezahnkurve, die beim Fernsehgerät die horizontale Bewegung des Lichtpunktes auf dem Bildschirm beschreibt. Aus (3.10) folgt

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin kt \, dt = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Die **FR** ist von der Form (3.11)

$$2 \left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots \right). \quad (3.13)$$

3.3 Komplexe Fourier-Reihen

Es sei f **absolut integrierbar** in $] -\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$. Wir betrachten die **FR** der Funktion $f(t)$ in der Gestalt (3.1) mit den **FK** in der Form (3.6) und (3.7). Die Darstellung der **FK** in komplexer Form erhält man mit Hilfe der **Eulerschen Formel**

$$e^{ik\omega t} = \cos k\omega t + i \sin k\omega t \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Ersetzt man in (3.14) t durch $-t$, so gilt wegen $\cos(-k\omega t) = \cos k\omega t$ und $\sin(-k\omega t) = -\sin k\omega t$

$$e^{-ik\omega t} = \cos k\omega t - i \sin k\omega t \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Durch Addition (Subtraktion) von (3.14) und (3.15) wird die Exponentialfunktion für ein rein imaginäres Argument $e^{ik\omega t}$ mit der Kosinus- (Sinusfunktion) für ein reelles Argument verknüpft:

$$(3.14) + (3.15) : \cos k\omega t = \frac{1}{2}(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}), \quad (3.14) - (3.15) : \sin k\omega t = \frac{1}{2i}(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}). \quad (3.16)$$

Wegen (3.16) erhält man aus (3.1)

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) + \frac{b_k}{2i} (e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{ik\omega t} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-ik\omega t} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wir setzen

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.18)$$

und erhalten aus (3.17) die komplexe Form der **FR**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}. \quad (3.19)$$

Für die komplexen **FK** ergibt sich aus (3.18) und (3.6) bzw. (3.7)

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \\ c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega t - i \sin k\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ c_{-k} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega t + i \sin k\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{ik\omega t} dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

wofür man einheitlich

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.20)$$

schreiben kann. Aus (3.18) folgt, dass für reellwertige Funktionen $f(t)$ die Zahlen c_k und c_{-k} zueinander konjugiert komplex sind, d.h. $c_k = \overline{c_{-k}}$ und $c_{-k} = \overline{c_k}$.

Interpretation der komplexen FR in den Anwendungen

- Jede Funktion $c_k e^{ik\omega t}$ beschreibt eine komplexe harmonische Schwingung.
- Die **Reihe** (3.19) interpretiert man als Überlagerung unendlich vieler komplexer harmonischer Schwingungen.
- Die komplexen **FK** c_k sind die komplexen Amplituden der komplexen harmonischen Schwingungen $c_k e^{ik\omega t}$. Gemäß (3.18) ist $|c_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$. Folglich sind die reellen Zahlen $|c_k|$ bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ gleich der Amplitude der reellen harmonischen Schwingung $a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$.

- Die i. Allg. komplexe Folge (c_k) der **FK** heißt **diskretes Frequenzspektrum** oder **Spektralfolge**, die reellen Folgen $(|c_k|)$ bzw. $(\arg c_k)$ nennt man **diskretes Amplitudenspektrum** bzw. **diskretes Phasenspektrum** einer T -periodischen Funktion $f(t)$.

Das i. Allg. komplexe **diskrete Frequenzspektrum** lässt sich in der Gaußschen Zahlenebene skizzieren. Die **diskreten Amplituden-** und **Phasenspektren** von $f(t)$ lassen sich in einem Koordinatensystem in der reellen Ebene grafisch darstellen.

Beispiel 3.5 Berechnen Sie für einen Rechtecksimpuls der Periode $T = 2\pi$ ($\omega = 1$)

$$g(t) = \begin{cases} -1, & \text{falls } -\pi < t < 0 \\ +1, & \text{falls } 0 < t < \pi \end{cases}$$

das **diskrete Frequenzspektrum** und stellen Sie dieses sowie das **diskrete Amplitudenspektrum** und das **diskrete Phasenspektrum** grafisch dar. Geben Sie die komplexe und die reelle Form der **FR** an.

Für die komplexen **FK** erhält man im Falle $k \geq 0$

$$c_0 \stackrel{(3.20)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \cdot dt + \int_0^{\pi} 1 \cdot dt \right] = \frac{1}{2\pi} [-\pi + \pi] = 0,$$

$$\begin{aligned} c_k &\stackrel{(3.20)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \cdot e^{-ikt} dt + \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-ikt} dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{i}{k} [1 - e^{ik\pi}] + \frac{i}{k} [e^{-ik\pi} - 1] \right] = \frac{i}{2\pi k} [e^{-ik\pi} - 1 - 1 + e^{ik\pi}] \\ &= \frac{i}{k\pi} [\cos k\pi - 1] = \frac{i}{k\pi} [(-1)^k - 1]. \end{aligned}$$

Also ist für alle $k \geq 0$

$$c_k = \begin{cases} 0 + i0, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\frac{2i}{k\pi}, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases} \quad c_{-k} = \bar{c}_k = \begin{cases} 0 - i0 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{2i}{k\pi}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt nun

$$\begin{aligned} c_k &= \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\frac{2i}{k\pi}, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases} & |c_k| &= \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{2}{|k|\pi}, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases} \\ \arg c_k &= \begin{cases} \text{unb.}, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{falls } k \text{ ungerade, } k > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } k \text{ ungerade, } k < 0 \end{cases} & &= \begin{cases} \text{unb.}, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } k \text{ ungerade, } k > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } k \text{ ungerade, } k < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Die komplexe Form der **FR** lautet nun:

$$\dots + \frac{2i}{5\pi} e^{-i5t} + \frac{2i}{3\pi} e^{-i3t} + \frac{2i}{\pi} e^{-it} - \frac{2i}{\pi} e^{it} - \frac{2i}{3\pi} e^{i3t} - \frac{2i}{5\pi} e^{i5t} - \dots = \frac{2i}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[e^{-i(2l+1)t} - e^{i(2l+1)t}]}{2l+1}.$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$\frac{2i}{(2l+1)\pi} [e^{-i(2l+1)t} - e^{i(2l+1)t}] = \frac{(-2i)2i}{(2l+1)\pi} \frac{e^{i(2l+1)t} - e^{-i(2l+1)t}}{2i} = \frac{4 \sin(2l+1)t}{\pi (2l+1)}$$

erhält man die reelle Form der **FR**:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin(2l+1)t}{2l+1} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right).$$

3.4 Konvergenzaussagen

Die folgenden Aussagen gelten sowohl für die **reelle** als auch die **komplexe FR**. Bisher können wir nur die **FR** einer T -periodischen Funktion $f(t)$ mit den **FK** angeben. Folgende Fragen sind von Interesse:

1. Für welche t **konvergiert** die **FR** **punktweise**?
2. Für welche dieser t konvergiert die **FR** gegen $f(t)$, d.h. wann darf zwischen $f(t)$ und der **FR** das Gleichheitszeichen gesetzt werden?

Theorem 3.3 (Satz von Dirichlet) *Es seien die Dirichletschen Bedingungen erfüllt:*

- (i) Das Intervall $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ lasse sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen die T -periodische Funktion $f(t)$ **stetig** und **monoton** ist.
- (ii) Ist t_0 eine **Unstetigkeitsstelle** von $f(t)$, so existieren die beiden endlichen einseitigen Grenzwerte

$$f(t_0 - 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f(t) \quad f(t_0 + 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t).$$

Dann gilt:

- 1° Die **FR** der Funktion $f(t)$ **konvergiert** für alle $t \in \mathbb{R}$ **punktweise**, d.h., es gilt:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = \begin{cases} f(t), & \text{falls } f \text{ stetig in } t, \\ \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)], & \text{sonst.} \end{cases}$$

- 2° Die **Konvergenz** der **FR** ist **gleichmäßig** in jedem abgeschlossenen Teilintervall, in dem $f(t)$ **stetig** ist. d.h. es gilt in jedem dieser Teilintervalle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = f(t).$$

Theorem 3.4 *Sei f eine stetige und bis auf endlich viele Punkte, in denen die Ableitung Sprungstellen besitzt, stetig differenzierbare Funktion der Periode T . Dann konvergiert ihre **FR** **gleichmäßig** und **absolut** gegen $f(t)$. Für ihre **FK** a_k, b_k folgt sogar die **Konvergenz***

der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ bzw. $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|$.

Beispiel 3.6 (Konvergenz von FR)

- (1) Sei $g(t) = e^t$ für $t \in]-\pi, \pi[$ (vgl. Beispiel 3.3 (3)). Die Voraussetzungen des **Satzes von Dirichlet** sind erfüllt. Bei der 2π -periodischen Fortsetzung $f(t)$ der Funktion e^t entstehen in den Punkten $t_k = (2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen). An diesen Stellen ist

$$\frac{1}{2}(f(t_k - 0) + f(t_k + 0)) = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \cosh \pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt also

$$\frac{2}{\pi} \sinh \pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kt - k \sin kt) \right) = \begin{cases} f(t) & \text{falls } t \neq t_k \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cosh \pi & \text{falls } t = t_k \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- (2) Sei $g_1(t) = |t|$ für $t \in]-\pi, \pi[$ (vgl. Beispiel 3.4 (1)). Die Voraussetzungen des **Satzes von Dirichlet** sind erfüllt. Bei der 2π -periodischen Fortsetzung $f_1(t)$ der Funktion $|t|$ entsteht eine **stetige** Funktion. Es gilt also

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \dots \right) = f_1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

- (3) Sei $g_2(t) = t$ für $t \in]-\pi, \pi[$ (vgl. Beispiel 3.4 (2)). Die Voraussetzungen des **Satzes von Dirichlet** sind erfüllt. Bei der 2π -periodischen Fortsetzung $f_2(t)$ der Funktion t entstehen in den Punkten $t_k = (2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ wieder Sprungstellen. An diesen Stellen ist

$$\frac{1}{2}(f_2(t_k - 0) + f_2(t_k + 0)) = \frac{1}{2}(\pi + (-\pi)) = 0 \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt also

$$2 \left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \dots \right) = \begin{cases} f_2(t) & \text{falls } t \neq (2k-1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{falls } t = (2k-1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Die **Reihen** (3.12) und (3.13) liefern innerhalb des Intervalls $]0, \pi[$ die Funktion $g(t) = t$ in ihren **Stetigkeitspunkten**. Sie stellen jedoch außerhalb des Intervalls $]0, \pi[$ verschiedene Funktionen dar. Die **Kosinus-Reihe** (3.12) stellt die Funktion dar, die sich aus $g(t)$ durch Fortsetzung als **gerade Funktion** in das Intervall $] -\pi, 0[$ und durch periodische Fortsetzung mit der Periode 2π außerhalb $] -\pi, \pi[$ ergibt, also die Dreiecksimpulse. Die **Sinus-Reihe** (3.13) stellt die Funktion dar, die sich aus $f(t)$ durch Fortsetzung als **ungerade Funktion** in das Intervall $] -\pi, 0[$ und durch periodische Fortsetzung mit der Periode 2π außerhalb $] -\pi, \pi[$ ergibt, also die Sägezahnkurve.

Mit Hilfe von **FR** kann man oft die Summe von Zahlenreihen ermitteln. Dazu wählt man jeweils geeignete Funktionen $g(t)$, $t \in]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$, entwickelt ihre T -periodische Fortsetzung in eine **FR** und setzt einen passenden Wert für t ein. Speziell erhält man für $t = 0$ aus (3.21)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

und für $t = \frac{\pi}{2}$ aus (3.22) die **Leibnizsche Reihe**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

4 Integraltransformationen

4.1 Vorbemerkungen

Unter einer **Integraltransformation (IT)** K versteht man eine **eindeutige** Zuordnung der Form

$$K[f(t)] = \int_I k(x, t) f(t) dt =: K(x) = K_f(x), \quad x \in I,$$

wobei I ein i.Allg. nicht beschränktes Intervall ist. Damit dieses Integral existiert, müssen die Funktion f und die **Kernfunktion** $k(x, t)$ geeigneten Voraussetzungen genügen.

Wichtige **IT** sind

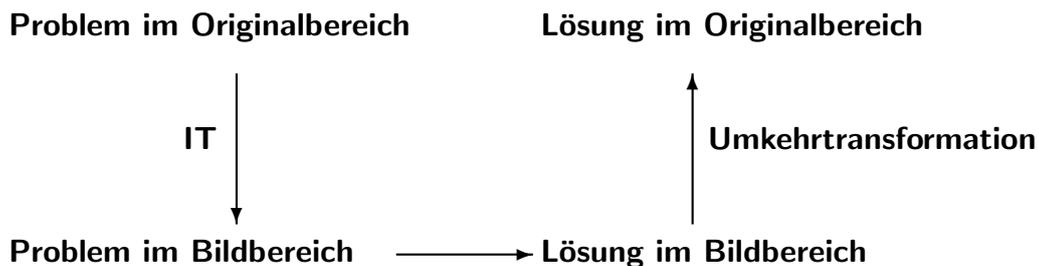
(1) die **Fourier–Transformation (FT)**

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt =: F(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (I =]-\infty, \infty[, \quad k(\omega, t) = e^{-i\omega t},$$

(2) und die **Laplace–Transformation (LT)**

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt =: L(p), \quad p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}, \quad (I =]0, \infty[, \quad k(p, t) = e^{-pt}.$$

Die **IT** werden in der Elektrotechnik, der Informationstheorie und der Nachrichtentechnik angewandt. Außerdem wird die **FT** oft zur Lösung partieller Differentialgleichungen benutzt, während die **LT** für die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen vorteilhaft ist. Man geht dabei folgendermaßen vor:



Mithilfe der **Eulerschen Formeln** (3.14) und (3.15) erhält man, dass der Integrand in (2) eine komplexwertige Funktion, also von der Form $g(\sigma, \omega, t) + ih(\sigma, \omega, t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, mit reellwertigen Funktionen g und h ist. Dies folgt aus der Beziehung

$$e^{-ipt} f(t) = e^{-i\omega t} e^{-\sigma t} f(t) = \cos \omega t e^{-\sigma t} f(t) - i \sin \omega t e^{-\sigma t} f(t) = g(\sigma, \omega, t) + ih(\sigma, \omega, t).$$

Das Integral in (2) ist dann durch zwei reelle Integrale erklärt:

$$\int_I [g(\sigma, \omega, t) + ih(\sigma, \omega, t)] dt := \int_I g(\sigma, \omega, t) dt + i \int_I h(\sigma, \omega, t) dt,$$

die von den reellen Parametern σ und ω abhängen. Für $\sigma = 0$ erhält man den Integranden in (1). Da die Integrationsbereiche unbeschränkt sind, liegen **uneigentliche Parameterintegrale** vor. Diese sind bei fixierten Parametern σ und ω durch die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A g(\omega, t) dt \quad \text{bzw.} \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A g(\sigma, \omega, t) dt$$

erklärt, wobei die Grenzübergänge $A \rightarrow +\infty$ und $B \rightarrow -\infty$ unabhängig voneinander durchzuführen sind. Wir sagen, die entsprechenden Integrale existieren (oder konvergieren), falls diese Grenzwerte existieren.

4.2 Formaler Übergang von der FR zum Fourierintegral (FI)

Die Darstellung einer Funktion $f(t)$ in Form einer **FR** ist nur für periodische bzw. periodisch fortsetzbare Funktionen möglich. Für nicht periodische, auf einem unbeschränkten Intervall gegebene Funktionen verwendet man das **FI**.

Für eine im Intervall $]-\infty, \infty[$ **absolut integrierbare** Funktion $f(t)$ einer beliebigen Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ gelte

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}. \quad (4.1)$$

Die **FK** besitzen dann die Gestalt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) e^{-ik\omega t} dt. \quad (4.2)$$

Wir setzen (4.2) in (4.1) ein und erhalten mit den Bezeichnungen

$$\omega_k := k\omega = \frac{2\pi k}{T} \quad \text{und} \quad \Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}(k+1 - k) = \frac{2\pi}{T} = \omega \quad \omega \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(s) e^{-ik\omega s} ds \right) e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega_k}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(s) e^{i\omega_k(t-s)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(s) e^{i\omega_k(t-s)} ds \right) \Delta\omega_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t, \omega_k) \Delta\omega_k \end{aligned}$$

mit $u(t, \omega_k) = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(s) e^{i\omega_k(t-s)} ds$. Folglich kann $f(t)$ als Riemannsche Integralsumme einer Funktion u bei äquidistanter Zerlegung dargestellt werden. Für $k \rightarrow \infty$ bzw. $\omega = \Delta\omega_k \rightarrow 0$ ergibt sich:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t, \omega_k) \Delta\omega_k \xrightarrow{\Delta\omega_k \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \right) d\omega,$$

falls dieser Grenzübergang zulässig ist. Es ergeben sich formal die Beziehungen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\omega(t-s)} ds \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \right) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.3)$$

Bezeichnet man das innere Integral mit

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds, \quad (4.4)$$

so ergibt sich die **FT** und eine Formel für die inverse **FT**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.5)$$

Der Ausdruck (4.3) heißt **komplexe Form** des **FI**, wobei (4.4) die Form der **FT** hat.

Die Beziehungen (4.4) und (4.5) sind bis jetzt rein formal zu verstehen. Es ist zu klären, unter welchen Bedingungen und in welchem Sinne die Integrale existieren.

Der Beziehung (4.5) entspricht die Darstellung (4.1) der Funktion $f(t)$ durch eine **FR** während die Beziehung (4.4) den **FK** (4.2) im periodischen Fall entspricht. Im Fall **periodischer Vorgänge** haben wir es stets mit einem **diskreten Frequenzspektrum (Spektralfolge)** zu tun, da nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ auftreten. **Kontinuierliche Frequenzspektren (Spektralfunktionen)** mit stetig veränderlicher Frequenz ω treten im Zusammenhang mit **nichtperiodischen Vorgängen** auf und werden durch die **FT** (4.4) dargestellt.

Beispiel 4.1 (Kontinuierliches Frequenzspektrum) *Wir bestimmen die FT $F(\omega)$ für den Rechteckimpuls*

$$f(t) = \begin{cases} d & \text{für } |t| \leq c \\ 0 & \text{für } |t| > c \end{cases} \quad c > 0.$$

Aus (4.4) erhält man für $\omega \neq 0$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds = \int_{-c}^c d \cdot e^{-i\omega s} ds \\ &= \frac{2d}{\omega} \frac{e^{i\omega c} - e^{-i\omega c}}{2i} = 2d \frac{\sin \omega c}{\omega} \end{aligned}$$

und für $\omega = 0$

$$F(0) = \int_{-c}^c d ds = 2cd.$$

Insgesamt ergibt sich als **kontinuierliche Frequenzspektrum**

$$F(\omega) = \begin{cases} 2d \frac{\sin \omega c}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0 \\ 2cd & \text{für } \omega = 0. \end{cases}$$

Wir stellen die Funktion $f(t)$ noch mit Hilfe ihres **Frequenzspektrums** dar, d.h. wir zerlegen f in harmonische Schwingungen. Die Beziehung (4.5) liefert **formal**:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2d \frac{\sin \omega c}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{d}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega c}{\omega} \cos \omega t d\omega + \frac{di}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega c}{\omega} \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{d}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega c}{\omega} \cos \omega t d\omega. \end{aligned}$$

Das Integral

$$\frac{d}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega c}{\omega} \sin \omega t d\omega$$

liefert keinen Beitrag, da der Integrand eine ungerade Funktion ist.

Anhand von Beispiel 4.1 wird deutlich, dass wir mit Hilfe der **FT** auch zeitlich begrenzte Vorgänge erfassen können, indem wir außerhalb des entsprechenden Zeitintervalls $f = 0$ setzen.

Bemerkung 4.1 Sei f eine Funktion, für die die Formeln (4.1), (4.2) bzw. (4.5), (4.4) gelten. Falls das **Frequenzspektrum** von f bekannt ist, so ist damit f **eindeutig** festgelegt und umgekehrt.

4.3 Die FT und ihre Eigenschaften

Theorem 4.1 Sei $f(t)$ **absolut integrierbar über** $]-\infty, \infty[$, d.h. das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

besitzt einen endlichen Wert. Dann existiert die **FT**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.6)$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$. Die Funktion $F(\omega)$ ist beschränkt, sogar stetig und es gilt

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow +\infty \\ \omega \rightarrow -\infty}} F(\omega) = 0.$$

Die Funktion $F(\omega)$ besitzt i. Allg. komplexe Funktionswerte. Der Ausdruck (4.6) stellt ein uneigentliches Parameterintegral bezüglich des Parameters ω dar, welches, falls es als uneigentliches Integral nicht existiert, als Cauchyscher Hauptwert verstanden wird.

Mit Hilfe der **Eulerschen Formeln** ergibt sich

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos \omega s \, ds - i \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \sin \omega s \, ds. \quad (4.7)$$

Setzt man

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos \omega s \, ds, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \sin \omega s \, ds, \quad (4.8)$$

so lässt sich (4.7) in der Form

$$F(\omega) = \pi (a(\omega) - i b(\omega))$$

darstellen. Die Funktionen $a(\omega)$ und $b(\omega)$ heißen **Amplitudendichten** von f . In Analogie zur **komplexen Form der FR** heißt

$$|F(\omega)| = \pi \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \quad \text{Amplitudenspektrum von } f(t) \text{ und die Menge}$$

$$\arg F(\omega) \quad \text{Phasenspektrum von } f(t).$$

Im periodischen Fall entsprechen den **Amplitudendichten** die **FK**, die die Amplituden der Harmonischen mit der Kreisfrequenz $k\omega$ bestimmen.

Beispiel 4.2 Die Heaviside-Funktion

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

besitzt für $\omega \neq 0$ wegen

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-i\omega s} \, ds = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-i\omega s} \, ds = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-i\omega A} - e^{-i\omega 0}}{-i\omega}$$

und für $\omega = 0$ wegen

$$F(0) = \int_0^{\infty} 1 \cdot ds = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A ds$$

keine FT, da in beiden Fällen die Grenzwerte nicht existieren. Folglich ist die **Heaviside-Funktion nicht absolut integrierbar**, was man auch unmittelbar einsehen kann.

Theorem 4.2 Es gelte

- (i) $f(t)$ sei **absolut integrierbar** über $]-\infty, \infty[$,
- (ii) jedes beschränkte Intervall aus $]-\infty, \infty[$ lasse sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen $f(t)$ **stetig und monoton** ist,
- (iii) ist t_0 eine **Unstetigkeitsstelle** von $f(t)$, so existieren die beiden endlichen einseitigen Grenzwerte

$$f(t_0 - 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 - 0} f(t) \quad f(t_0 + 0) = \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} f(t).$$

Dann gilt für beliebige $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \begin{cases} f(t), & \text{falls } f \text{ stetig in } t, \\ \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)], & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei das Integral im Sinne des **Cauchyschen Hauptwertes** verstanden wird.

In jedem **Stetigkeitspunkt** der Funktion $f(t)$ erhält man aus $F(\omega)$ wieder $f(t)$. Mithilfe vom Theorem 4.2 ist es also möglich, zu vorgegebenen Bildfunktionen $F(\omega)$ die zugehörigen Originalfunktionen $f(t)$ zu berechnen (Umkehrformel für die **FT**). Tabellen wichtiger Original- und Bildfunktionen sind z.B. in [6] Bd. 10 oder auf dem Arbeitsblatt fourier.pdf zu finden. Unter der Voraussetzung, dass die Integrationsreihenfolge vertauschbar ist, lässt sich die Umkehrformel in reeller Form darstellen:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (4.9)$$

Die Formel (4.9) kann als kontinuierliches Analogon der **FR** aufgefasst werden. Die Frequenzen ω der harmonischen Schwingungen $a(\omega) \cos \omega t$, $b(\omega) \sin \omega t$ durchlaufen sämtliche Werte von 0 bis ∞ . Ihre Amplituden $a(\omega)$, $b(\omega)$ hängen von den Frequenzen ω ab und lassen sich aus (4.8) bestimmen.

Es seien die Voraussetzungen des Theorems 4.2 erfüllt.

(1) Ist $f(s)$ eine **gerade Funktion**, so ergibt sich aus (4.8) und (4.9)

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(s) \cos \omega s ds, & b(\omega) &= 0 \quad \text{und} \\ f(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(s) \cos \omega s ds \right) \cos \omega t d\omega \quad \text{Kosinus-Form des FI} \end{aligned} \quad (4.10)$$

(2) Ist $f(s)$ eine **ungerade Funktion**, so ergibt sich aus (4.8) und (4.9)

$$\begin{aligned} b(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(s) \sin \omega s ds, & a(\omega) &= 0 \quad \text{und} \\ f(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(s) \sin \omega s ds \right) \sin \omega t d\omega \quad \text{Sinus-Form des FI.} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die Darstellungen (4.10) und (4.11) sind Analoga der Entwicklung von Funktionen in eine **reine Kosinus-Reihe** bzw. eine **reine Sinus-Reihe**.

Fouriersche Kosinus- und Sinus-Transformation

(1) Wir schreiben (4.10) in der Form

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(s) \cos \omega s \, ds \right) \cos \omega t \, d\omega$$

und bezeichnen den Ausdruck in der Klammer mit $F_c(\omega)$. Dann heißt

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(s) \cos \omega s \, ds \quad \text{Fouriersche Kosinus-Transformation und}$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega \quad \text{ihre Rücktransformation.}$$

(2) Wir schreiben (4.11) in der Form

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(s) \sin \omega s \, ds \right) \sin \omega t \, d\omega$$

und bezeichnen den Ausdruck in der Klammer mit $F_s(\omega)$. Dann heißt

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(s) \sin \omega s \, ds \quad \text{Fouriersche Sinus-Transformation und}$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega \quad \text{ihre Rücktransformation.}$$

Zusammenhang mit der FT

Aus (4.6) folgt nach der **Eulerschen Formel**:

(1) Ist $f(s)$ eine **gerade** Funktion, so gilt

$$F(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(s) \cos \omega s \, ds = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(s) \cos \omega s \, ds = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} F_c(\omega). \quad (4.12)$$

(2) Ist $f(s)$ eine **ungerade** Funktion, so gilt

$$F(\omega) = -2i \int_0^{\infty} f(s) \sin \omega s \, ds = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(s) \sin \omega s \, ds = -2i \sqrt{\frac{\pi}{2}} F_s(\omega). \quad (4.13)$$

Im allgemeinen Fall zerlegt man $f(t)$ in die Summe einer **geraden** Funktion $g(t)$ und einer **ungeraden** Funktion $u(t)$

$$g(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \quad u(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)].$$

Daraus folgt dann $f(t) = g(t) + u(t)$, $F(\omega) = G(\omega) + U(\omega) = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}[G_c(\omega) - iU_s(\omega)]$.

Dabei ist $G_c(\omega)$ die **Fouriersche Kosinus-Transformation** von $g(t)$ und $U_s(\omega)$ die **Fouriersche Sinus-Transformation** von $u(t)$.

Die Formeln für $F_c(\omega)$ und $F_s(\omega)$ sind Analoga der Koeffizientenformeln bei Entwicklung einer Funktion $f(t)$ in eine **reine Kosinus-Reihe** bzw. eine **reine Sinus-Reihe**.

Beispiel 4.3 (Fouriersche Sinus- und Kosinus-Transformation)

(1) Berechnen Sie $F_c(\omega)$ und $F(\omega)$ für den Dreiecksimpuls

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{T} + 1 & \text{falls } -T < t < 0 \\ -\frac{t}{T} + 1 & \text{falls } 0 < t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^T \left(-\frac{s}{T} + 1\right) \cos \omega s \, ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \omega T}{T\omega^2} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2 \frac{T\omega}{2}}{T\omega^2}.$$

$$\text{Wegen (4.12) gilt: } F(\omega) = 4 \frac{\sin^2 \frac{T\omega}{2}}{T\omega^2}.$$

(2) Berechnen Sie $F_s(\omega)$ und $F(\omega)$ für den Rechtecksimpuls

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{falls } -\pi < t < 0 \\ +1 & \text{falls } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sin \omega s \, ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \omega \pi}{\omega} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2 \frac{\pi\omega}{2}}{\omega}$$

$$\text{Wegen (4.13) gilt: } F(\omega) = -4i \frac{\sin^2 \frac{\pi\omega}{2}}{\omega}.$$

Eigenschaften der FT

Es sei die Voraussetzung von Theorem 4.1 erfüllt, d.h. die Funktion $f(t)$ sei **absolut integrierbar** über $]-\infty, \infty[$.

Bezeichnungen: $F[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$, $F[f_k(t)] = F_k(\omega)$

1° **Additionssatz:** $F[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$ $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$

2° **Ähnlichkeitssatz:** $F[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ für $a > 0$

3° **Verschiebungssatz:** $F[f(at+b)] = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{ib\omega}{a}\right) F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ für $a \neq 0 \wedge a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{C}$

4° **Dämpfungssatz:** $F[e^{ibt} f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega - b}{a}\right)$ für $a > 0 \wedge b \in \mathbb{C}$

5° **Multiplikationssatz:** $F[t^n f(t)] = (i)^n F^{(n)}(\omega)$ für $n \in \mathbb{N}$,
falls die **FT** der Funktion $t^n f(t)$ existiert.

6° **Differentiationssatz:** $F[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n F(\omega)$,
falls die **FT** der Funktion $f^{(n)}$ existiert und die Funktionen $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen Null streben.

7° **Integrationsatz:** $F\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega)$, falls $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$ ist.

8° **Faltungssatz:** Falls die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|^2 dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(t)|^2 dt,$$

existieren, so existieren auch die **Faltung**

$$f_1 * f_2 = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

der Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ sowie ihre **FT** $F[f_1(t) * f_2(t)]$. Dabei gilt

$$F[f_1(t) * f_2(t)] = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\right] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega).$$

Geometrische Interpretation der Faltung:

$f_1(t) * f_2(t)$ stellt den vom Verschiebungsparameter t abhängigen Flächeninhalt der vom Graphen der Funktion $f_1(\tau)f_2(t - \tau)$ und der τ -Achse begrenzten Punktmenge dar.

9° **Parsevalsche Gleichung:** Falls die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt,$$

existieren, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Die Regeln 3° und 4° folgen unmittelbar durch Variablentransformation in (4.4), während man die Regeln 6° und 7° durch partielle Integration aus (4.4) erhält.

4.4 Formaler Übergang von der FT zur LT

Die Voraussetzungen für die Existenz der **FT**, d.h. **absolute Integrierbarkeit** über $]-\infty, \infty[$ sind für viele wichtige Funktionen aus den Anwendungen verletzt (z.B. für die **Heaviside-Funktion** sowie für die Funktionen e^{at} , $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, definiert jeweils für alle reellen t). Man zeigt leicht, dass die **FT** für diese Funktionen nicht existiert.

In den Anwendungen treten aber oft Funktionen von diesem Typ auf, häufig verbunden mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$f(t) = 0 \quad \text{für } t < 0.$$

Diese Bedingung ist z.B. bei allen Vorgängen erfüllt, die zu einem bestimmten Zeitpunkt, den wir $t = 0$ setzen, beginnen. Somit werden Einschaltvorgänge erfasst. Wir führen den konvergenzverbessernden Faktor $e^{-\sigma t}$ ($\sigma > 0$) ein und betrachten anstelle von $f(t)$ die Funktion

$$f^*(t) = \begin{cases} e^{-\sigma t} f(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}.$$

Bilden wir nun formal die **FT** von $f^*(t)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} F[f^*(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega t)} f(t) dt. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich mit $p = \sigma + i\omega$

$$F[f^*(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad p \in \mathbb{C}.$$

Wir setzen

$$L[f(t)] = L(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad p \in \mathbb{C}$$

und nennen diesen Ausdruck **LT** der Funktion $f(t)$.

Beispiel 4.4 (LT-n)

(1) Für die **Heaviside-Funktion** erhält man

$$\begin{aligned} L(p) &= \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A h(t) e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-pt} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-pA}}{p} \right] + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-pA} = \lim_{A \rightarrow \infty} [e^{-\sigma A} \cos \omega A - ie^{-\sigma A} \sin \omega A]$ und $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\cos \omega A}{e^{\sigma A}} = 0$ sowie $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega A}{e^{\sigma A}} = 0$ für $\sigma > 0$ und $A > 0$ gilt

$$\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-pA} = 0, \quad \text{für } \operatorname{Re} p = \sigma > 0,$$

also

$$L(p) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-pA}}{p} \right] + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \quad \text{für } \sigma > 0.$$

(2) Für die Funktion $f(t) = e^{at}$ $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ erhält man

$$\begin{aligned} L(p) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(t) e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(p-a)t} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} \right]_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(p-a)A}}{p-a} \right] + \frac{1}{p-a}. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-(p-a)A} = \lim_{A \rightarrow \infty} [e^{-(\sigma-a_1)A} \cos((\omega-a_2)A) - ie^{-(\sigma-a_1)A} \sin((\omega-a_2)A)]$ und $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\cos((\omega-a_2)A)}{e^{(\sigma-a_1)A}} = 0$ sowie $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sin((\omega-a_2)A)}{e^{(\sigma-a_1)A}} = 0$ für $\sigma > a_1$ und $A > 0$ gilt

$$\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-(p-a)A} = 0, \quad \text{für } \operatorname{Re}(p-a) = \sigma - a_1 > 0,$$

also

$$L(p) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(p-a)A}}{p-a} \right] + \frac{1}{p-a} = \frac{1}{p-a} \quad \text{für } \sigma > a_1.$$

Bemerkung 4.2 Die Funktion $L(p) = L(\sigma + i\omega)$ kann bei fixiertem σ als **Spektralfunktion (Spektraldichtefunktion)** der Funktion $e^{-\sigma t} f(t)$ mit der **Frequenz** ω aufgefasst werden.

4.5 Die LT und ihre Eigenschaften

Theorem 4.3 Es gelte

- (i) $f(t) = 0$ für $t < 0$,
- (ii) $f(t)$ sei **stückweise stetig** in jedem endlichen Intervall,
- (iii) es mögen reelle Konstanten $c \geq 0$ und $M > 0$ existieren, so dass gilt

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad \forall t \geq 0.$$

Dann existiert die **LT**

$$L[f(t)] = L(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad p \in \mathbb{C} \quad (4.14)$$

für wenigstens alle p mit $\operatorname{Re} p > c$.

Die Halbebene $\operatorname{Re} p > c$ heißt **Konvergenzhalbebene** der Transformation.

Beispiel 4.5 Die Funktion $f(t) = e^{t^2}$ besitzt keine **LT**, denn für reelle p ist der Integrand e^{-pt+t^2} positiv und besitzt sein Minimum bei $t = \frac{p}{2}$. Es gilt deshalb für jedes feste reelle $p > 0$ und $A \geq 0$

$$\int_0^A e^{-pt+t^2} dt \geq \int_0^A e^{-\frac{p^2}{4}} dt \geq Ae^{-\frac{p^2}{4}}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt für $A \rightarrow \infty$, dass das Integral (4.14) für kein reelles p existiert. Man kann zeigen, dass die **LT** für diese Funktion $f(t)$ auch für kein komplexes p existiert.

Theorem 4.4 Zu einer Bildfunktion $L(p)$ gehört **höchstens** eine für $t > 0$ **stetige Originalfunktion** $f(t)$.

Das Theorem besagt, dass es zu einer Bildfunktion **überhaupt keine stetige Originalfunktion** oder nur **eine einzige stetige Originalfunktion** gibt.

Beispiel 4.6 Die bei $t = T$ unstetige Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{für } T < t \end{cases}$$

besitzt die **LT**

$$L(p) = \int_0^T e^{-pt} dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^T = \frac{1}{p}(1 - e^{-pT}).$$

Diese Bildfunktion hat **keine stetige Originalfunktion**.

Eigenschaften der LT

Es seien die Voraussetzungen von Theorem 4.3 erfüllt.

Bezeichnungen: $L[f(t)] = L(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ für $\operatorname{Re} p > c$ und $L[f_k(t)] = L_k(p)$ für $\operatorname{Re} p > c_k$

1° **Additionssatz:** $L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 L_1(p) + a_2 L_2(p)$ für $\operatorname{Re} p > \max(c_1, c_2)$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$

2° **Ähnlichkeitssatz:** $L[f(at)] = \frac{1}{a} L\left(\frac{p}{a}\right)$ für $a > 0$ und $\operatorname{Re} p > ac$

3° **Verallgemeinerter 1. Verschiebungssatz:** $L[f(at - b)] = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{b}{a}p\right) L\left(\frac{p}{a}\right)$ für $a > 0, b \geq 0$ und $\operatorname{Re} p > ac$. Für $a = 1$ bedeutet $f(t - b)$ eine Verschiebung von $f(t)$ nach rechts.

4° **Verallgemeinerter 2. Verschiebungssatz:**

$$L[f(at + b)] = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{b}{a}p\right) \left(L\left(\frac{p}{a}\right) - \int_0^b \exp\left(-\frac{p}{a}t\right) f(t) dt \right)$$

für $a > 0, b \geq 0$ und $\operatorname{Re} p > ac$. Für $a = 1$ bedeutet $f(t + b)$ eine Verschiebung von $f(t)$ nach links.

5° **Dämpfungssatz:** $L[e^{-at}f(t)] = L(p + a)$ für $a \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re} p > c - \operatorname{Re} a$

6° **Multiplikationssatz:** $L[(-t)^n f(t)] = L^{(n)}(p)$ für $\operatorname{Re} p > c$

7° **Divisionssatz:** $L\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_p^\infty L(q) dq$ für $\operatorname{Re} p > c$, falls die **LT** der Funktion $\frac{1}{t}f(t)$ existiert.

8° **Differentiationssatz:**

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n L(p) - f(+0)p^{n-1} - f'(+0)p^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(+0)$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{Re} p > c$, falls die **LT** der Funktion $f^{(n)}$ existiert. Dabei ist $f^{(k)}(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$ ($k = 0, \dots, n-1$). Ist $f(t)$ für $t \geq 0$ n -mal differenzierbar, so gilt $f^{(k)}(+0) = f^{(k)}(0)$ ($k = 0, \dots, n-1$), d.h. die rechtsseitigen Grenzwerte fallen mit den Funktionswerten zusammen.

Speziell gilt:

$L[f'(t)] = pL(p) - f(+0)$ für $\operatorname{Re} p > c$, falls die **LT** der Funktion $f'(t)$ existiert.

$L[f''(t)] = p^2L(p) - f(+0)p - f'(+0)$ für $\operatorname{Re} p > c$, falls die **LT** der Funktion $f''(t)$ existiert.

9° **Integrationsatz:** $L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} L(p)$, für $\operatorname{Re} p > c$

10° **Faltungssatz:** $L[f_1(t) * f_2(t)] = L_1(p) \cdot L_2(p)$ für $\operatorname{Re} p > \max(c_1, c_2)$. Dabei ist

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Wegen $f_k(t) = 0$ für $t < 0$ ($k = 1, 2$) ist auch $f_1(t) * f_2(t) = 0$ für $t < 0$.

Geometrische Interpretation der Faltung:

$f_1(t) * f_2(t)$ stellt den vom Verschiebungsparameter t abhängigen Flächeninhalt der vom Graphen der Funktion $f_1(\tau)f_2(t - \tau)$, der τ -Achse sowie von den Geraden $\tau = 0$ und $\tau = t$ begrenzten Punktmenge dar.

- 11° **Transformationen periodischer Funktionen:** Ist $f(t) = f(t + T)$ für alle $t \in D(f)$, so gilt, falls $f(t)$ und $f(t + T)$ integrierbar sind

$$L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt \quad \text{für } \operatorname{Re} p > 0.$$

- 12° **Parsevalsche Gleichung:** Falls die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |f(t)| dt, \quad \int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} |f(t)|^2 dt,$$

existieren, so gilt

$$\int_0^{\infty} e^{-2\sigma t} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |L(\sigma + i\omega)|^2 d\omega.$$

Regeln für die Rücktransformation

Nachdem das Problem im Originalbereich der Zeitsignale mittels der **LT** in den Bildbereich transformiert und dort gelöst wurde, ist die Lösung im Bildbereich mittels der Umkehrtransformation in den Originalbereich der Zeitsignale zurückzuführen. Dazu gibt es verschiedene Verfahren.

1. Die Rücktransformation ist unter Verwendung des Faltungssatzes möglich. Für die rechte Seite der Beziehung $L[f(t)] = L(p)$ gelte im Bildbereich eine Darstellung der Form $L(p) = L_1(p) \cdot L_2(p)$ mit $L_1(p) = L[f_1(t)]$ und $L_2(p) = L[f_2(t)]$. Dann gilt nach dem Faltungssatz:

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= L(p) = L_1(p) \cdot L_2(p) = L[f_1(t) * f_2(t)] \\ \implies f(t) &= f_1(t) * f_2(t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die Lösung $f(t)$ im Originalbereich erhält man durch die Berechnung der Faltung.

2. Besitzt der Nenner $N(p)$ der rationalen Bildfunktion $L(p) = \frac{Z(p)}{N(p)}$ nur eine Nullstelle $a \in \mathbb{C}$ der Vielfachheit s ($\operatorname{Grad} N(p) = s$), so ergibt sich im Raum der Bildfunktionen die Partialbruchzerlegung

$$L[f(t)] = L(p) = \left(\frac{A_1}{p - a} + \frac{A_2}{(p - a)^2} + \dots + \frac{A_s}{(p - a)^s} \right) = \sum_{r=1}^s \left(\frac{A_r}{(p - a)^r} \right). \quad (4.16)$$

Für jeden Summanden in (4.16) lässt sich mit Hilfe der Tabelle laplace.pdf und der Eigenschaften der **LT** das zugehörige Zeitsignal berechnen:

$$L_1(p) = \frac{1}{p-a} \stackrel{T_4}{=} L[e^{at}] = L[f_1(t)], \quad L_2(p) = \frac{1}{(p-a)^2} \stackrel{T_5}{=} L[te^{at}] = L[f_2(t)],$$

wobei T_i die jeweilige Nummer in der Tabelle laplace.pdf angibt. Zur Umformung des letzten Summanden in (4.16) betrachten wir zunächst die Beziehung

$$L(p) = \frac{1}{p^s} \stackrel{T_3}{=} L\left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\right] = L[g(t)] \implies g(t) = \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}.$$

Dann gilt nach dem Dämpfungssatz

$$L_s(p) = \frac{1}{(p-a)^s} =: L(p-a) = L[e^{at} g(t)] = L\left[e^{at} \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\right] = L[f_s(t)].$$

Mit diesen Beziehungen und dem Additionssatz erhält man aus (4.16)

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= L(p) = \sum_{r=1}^s A_r L_r(p) = \sum_{r=1}^s A_r L[f_r(t)] \\ &= L\left[\sum_{r=1}^s A_r f_r(t)\right] = L\left[\left(A_1 + A_2 t + \dots + A_s \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\right) e^{at}\right] \\ \implies f(t) &= \left(A_1 + A_2 t + \dots + A_s \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\right) e^{at}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

3. Besitzt der Nenner $N(p)$ der rationalen Bildfunktion $L(p) = \frac{Z(p)}{N(p)}$ nur einfache Nullstellen $p_k \in \mathbb{C}$, dann ist mit $L_k(p) = \frac{1}{p-p_k} = L[e^{p_k t}] = L[f_k(t)]$, ($k = 1, \dots, n$) und dem Additionssatz

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= L(p) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p-p_k} = \sum_{k=1}^n A_k L[e^{p_k t}] = L\left[\sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}\right] \\ \implies f(t) &= \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} = \sum_{k=1}^n \frac{Z(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

denn die Koeffizienten A_k in der Partialbruchzerlegung lassen sich im Falle einfacher Nullstellen mit Hilfe der Grenzwertmethode zu $A_k = \frac{Z(p_k)}{N'(p_k)}$ ($k = 1, \dots, n$) ermitteln.

Beispiel 4.7 $L(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq b$.

1. Lösungsweg: Wir verwenden den **Faltungssatz**.

Mit $L_1(p) = \frac{1}{p-a} = L[e^{at}] = L[f_1(t)]$ und $L_2(p) = \frac{1}{p-b} = L[e^{bt}] = L[f_2(t)]$ erhält man gemäß (4.15)

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.$$

2. Lösungsweg: Das Nennerpolynom $N(p)$ der rationalen Funktion

$$L(p) = \frac{Z(p)}{N(p)} = \frac{1}{(p-a)(p-b)}$$

besitzt nur einfache Nullstellen. Weiter ist $N(p) = p^2 - (a+b)p + ab$ und $N'(p) = 2p - (a+b)$. Dann ist nach (4.18)

$$f(t) = \frac{1}{a-b}e^{at} + \frac{1}{b-a}e^{bt} = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.$$

3. Lösungsweg: Ist die Partialbruchzerlegung bekannt, so kann auch der Additionssatz verwendet werden:

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= L(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b} \right) \\ &= \frac{L[e^{at}] - L[e^{bt}]}{a-b} = L \left[\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \right] \\ \implies f(t) &= \left[\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \right]. \end{aligned}$$

4.6 Anwendung der LT zur Lösung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen

Beispiel 4.8 Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$y''(t) + y(t) = \sin t$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$. Wir setzen $L[y(t)] = Y(p)$. Mit

$L[y''(t) + y(t)] = p^2 Y(p) - y(+0)p - y'(+0) + Y(p) = (p^2 + 1)Y(p) - 1$ und

$$L[\sin t] = L(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

geht das Anfangswertproblem im Originalbereich in die folgende Gleichung im Bildbereich über:

$$(p^2 + 1)Y(p) - 1 = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Als Lösung im Bildbereich erhält man

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \left(1 + \frac{1}{p^2 + 1} \right) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = L(p) + L(p) \cdot L(p).$$

Mittels des Faltungs- und Additionssatzes ergibt sich

$$L(y(t)) = L[\sin t] + L[\sin t * \sin t] = L[\sin t + \sin t * \sin t] \implies$$

$$y(t) = \sin t + \sin t * \sin t = \sin t + \int_0^t \sin \tau \sin(t - \tau) d\tau.$$

Das Faltungsintegral kann man unter Verwendung der trigonometrischen Formel

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

berechnen. Somit ergibt sich als Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(t) = \sin t + \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{4} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t = \frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t.$$

Beispiel 4.9 Wir betrachten eine \mathcal{RLC} - Reihenschaltung mit einer Spannung $U(t) = 0$ für $t < 0$. Das 2. Kirchhoffsche Gesetz (Maschensatz) liefert eine Integrodifferentialgleichung:

$$\mathcal{R}I(t) + \mathcal{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{\mathcal{C}} \int_0^t I(\tau) d\tau = U(t) \quad I(0) = 0.$$

Nach Ausführung der **LT** ergibt sich im Bildbereich, wenn $I(p)$ den Bildstrom und $U(p)$ die Bildspannung bezeichnet:

$$\mathcal{R}I(p) + \mathcal{L}pI(p) - \mathcal{L}I(+0) + \frac{1}{\mathcal{C}p}I(p) = U(p).$$

Als Lösung im Bildbereich erhält man

$$I(p) = \frac{U(p)}{\mathcal{R} + \mathcal{L}p + \frac{1}{\mathcal{C}p}} = \frac{U(p)p}{\mathcal{L}p^2 + \mathcal{R}p + \frac{1}{\mathcal{C}}}.$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $\mathcal{L}p^2 + \mathcal{R}p + \frac{1}{\mathcal{C}} = \mathcal{L}(p^2 + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}p + \frac{1}{\mathcal{C}\mathcal{L}}) = 0$ lauten

$$p_1 = -\frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{L}} + \frac{1}{2\mathcal{L}}\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} \quad p_2 = -\frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{L}} - \frac{1}{2\mathcal{L}}\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}.$$

Dann ist

$$I(p) = \frac{U(p)}{\mathcal{L}} \frac{p}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

und nach einer Partialbruchzerlegung hat die Lösung im Bildbereich die Form

$$I(p) = \frac{U(p)}{\mathcal{L}} \left[\frac{p_1}{(p_1 - p_2)} \frac{1}{(p - p_1)} - \frac{p_2}{(p_1 - p_2)} \frac{1}{(p - p_2)} \right] = \frac{U(p)}{\mathcal{L}(p_1 - p_2)} \left[\frac{p_1}{p - p_1} - \frac{p_2}{p - p_2} \right],$$

mit $p_{1/2} = -\frac{\mathcal{R}}{2\mathcal{L}} \pm \frac{1}{2\mathcal{L}}\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}$, also

$$I(p) = \frac{U(p)}{\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}} \left[\frac{p_1}{p - p_1} - \frac{p_2}{p - p_2} \right].$$

Die Rücktransformation erfolgt mittels des **Faltungssatzes**. Es ist

$$L[U(t)] = U(p), \quad L[p_i e^{p_i t}] = \frac{p_i}{p - p_i} \quad (i = 1, 2) \quad L[I(t)] = I(p) \text{ und}$$

$$U(p) \left[\frac{p_1}{p - p_1} - \frac{p_2}{p - p_2} \right] = L[U(t) * (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})].$$

Somit erhält man

$$L[I(t)] = \frac{L[U(t) * (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})]}{\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}} \text{ und}$$

$$I(t) = \frac{U(t) * [p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}]}{\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}^2 - \frac{4\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}} \int_0^t U(\tau) [p_1 e^{p_1(t-\tau)} - p_2 e^{p_2(t-\tau)}] d\tau.$$

5 Partielle Differenzialgleichungen

5.1 Beispiele und Grundbegriffe

Bei der mathematischen Beschreibung von Erscheinungen und Prozessen in Naturwissenschaft und Technik erhält man oft Gleichungen für unbekannte Funktionen, in denen partielle Ableitungen dieser Funktionen auftreten.

Beispiel 5.1 Schwingt eine Saite in einer Ebene, so kann durch die Funktion $u(x, t)$ die Auslenkung u jedes Saitenpunktes x zu einem beliebigen Zeitpunkt t angegeben werden. Unter gewissen Voraussetzungen und bei sehr kleinen Amplituden genügt die Funktion u der Gleichung

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad a^2 \text{ konstant.} \quad (5.1)$$

Analog erhält man bei Schwingungen von Membranen konstanter Dichte die Gleichung

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad (5.2)$$

bzw. bei der Ausbreitung des Schalls im homogenen Medium die Gleichung

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t). \quad (5.3)$$

Dabei gibt f den Einfluss äußerer Kräfte wieder. Die Gleichungen (5.1) - (5.3) heißen **Wellen- oder Schwingungsgleichungen**.

Beispiel 5.2 Die Temperatur u in einem Punkt $P = (x, y, z)$ eines Körpers zu einem Zeitpunkt t lässt sich durch eine Funktion $u(x, y, z, t)$ beschreiben, die unter bestimmten physikalischen Bedingungen der **Wärmeleitungsgleichung**

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (5.4)$$

genügt. Diffusionsprozesse werden ebenfalls durch diese Gleichung beschrieben.

Beispiel 5.3 Ist die Temperaturverteilung in einem Körper bezüglich der Zeit konstant ($u_t = 0$), so genügt $u(x, y, z)$ der **Laplace Gleichung**

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (5.5)$$

Andere stationäre (zeitunabhängige) Prozesse lassen sich ebenfalls durch die **Laplace Gleichung** beschreiben.

Definition 5.1 Jede Gleichung der Form

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0, \quad (5.6)$$

die die Werte der unabhängigen Variablen x_1, x_2, \dots, x_n einer Funktion $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und gewisser ihrer Ableitungen miteinander verknüpft, heißt eine **partielle Differenzialgleichung (pDG)**. Die höchste auftretende Ordnung der **partiellen Ableitungen** heißt **Ordnung der pDG**.

Die Gleichungen (5.1) - (5.5) sind **pDG 2. Ordnung**. Im Weiteren beschränken wir uns auf **pDG 2. Ordnung**.

Definition 5.2 (Lineare pDG 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, homogene und inhomogene lineare pDG)

1. Eine **pDG 2. Ordnung** heißt **linear**, wenn sie bezüglich der gesuchten Funktion $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sowie bezüglich der Ableitungen 1. und 2. Ordnung nach u **linear** ist. Sie besitzt die Form

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu + f = 0, \quad (5.7)$$

wobei der erste Summand in der linken Seite **Hauptteil** der **pDG** genannt wird.

2. Sind die Koeffizienten a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$); b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) und c konstant, so nennt man (5.7) **lineare pDG 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**.
3. Ist die Funktion $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$, so heißt (5.7) **homogen**, anderenfalls heißt sie **inhomogen**.

Die **pDG** (5.1) - (5.5) sind sämtlich **lineare pDG mit konstanten Koeffizienten**. Dabei sind (5.1) - (5.3) **inhomogen**, während (5.4) und (5.5) **homogen** sind.

Definition 5.3 Lösung einer **pDG** nennt man jede Funktion $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, die in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Sie besitzt in G alle partiellen Ableitungen, die in der **pDG** auftreten.
2. Setzt man $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und ihre partiellen Ableitungen in die **pDG** ein, so ist die **pDG** für alle Punkte $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$ identisch erfüllt.

Die **allgemeine Lösung** einer **pDG 2. Ordnung** hängt i. Allg. von zwei willkürlichen Funktionen ab, die ihrerseits wieder von einer unabhängigen Variablen abhängen.

Beispiel 5.4 $u_{xy} = 0 \implies (u_x)_y = 0 \implies u_x = C_1(x) \implies u(x, y) = \int_{x_0}^x C_1(t) dt + C_2(y)$
Dabei sind C_1 und C_2 zwei willkürliche Funktionen.

Die **allgemeine Lösung** ist in den Anwendungen wegen der Nichteindeutigkeit kaum von Interesse. Wie bei den gewöhnlichen Differenzialgleichungen kann man die **Eindeutigkeit** der Lösung durch Zusatzbedingungen, die für das konkrete gegebene Problem erfüllt sind, erzwingen. Daraus ergeben sich folgende Probleme:

1. Welche zusätzlichen Bedingungen sind zu stellen, damit es unter allen Lösungen einer **pDG** genau eine gibt, die diese Bedingungen erfüllt?
2. Wie kann diese Lösung effektiv berechnet werden?

3. Die Werte für die Zusatzbedingungen erhält man in der Praxis aus Messungen, welche fehlerbehaftet sind. Daraus ergibt sich die Forderung, dass kleine Änderungen der Messwerte kleine Änderungen der Lösung nach sich ziehen müssen.

Definition 5.4 Existiert eine **eindeutige Lösung** eines Problems **pDG + Zusatzbedingungen**, die im obigen Sinne **stetig** von den Zusatzbedingungen abhängt, so heißt das Problem **korrekt gestellt**.

Bei den Zusatzbedingungen unterscheiden wir **Anfangsbedingungen (Ab)**, die den Wert der Lösung zu einem Anfangszeitpunkt $t = t_0$ angeben und **Randbedingungen (Rb)**, welche den Wert der Lösung

- in den Randpunkten eines Intervalls im eindimensionalen Fall (eine Raumkoordinate x),
- auf dem Rand eines ebenen Gebietes im zweidimensionalen Fall (zwei Raumkoordinaten x, y),
- auf dem Rand eines räumlichen Gebietes im dreidimensionalen Fall (drei Raumkoordinaten x, y, z)

angeben.

Definition 5.5 Ist eine **pDG** mit **Ab** gegeben, so spricht man von einem **Anfangswertproblem (AWP)**, während ein **Randwertproblem (RWP)** vorliegt, wenn die **pDG** mit **Rb** gegeben ist. Liegt eine **pDG** mit **Ab** und **Rb** vor, so nennt man das Problem **Anfangs-Randwertproblem (ARWP)** oder **gemischtes Problem**.

Beispiel 5.5 Von einem erhitzten Draht ist die Temperaturverteilung $u(x, 0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannt. Gesucht ist die zeitliche Änderung der Temperaturverteilung $u(x, t)$ für $t > 0$, d.h. gesucht ist die Lösung der eindimensionalen **Wärmeleitungsgleichung**

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{die die Ab } u(x, 0) = g(x) \quad (5.8)$$

erfüllt. Es liegt ein **AWP** vor.

Beispiel 5.6 Für einen Körper B ist die Temperatur auf der Oberfläche S bekannt. Gesucht ist die stationäre (zeitlich unabhängige) Temperaturverteilung $u(x, y, z)$ im Inneren des Körpers, d.h. die Lösung der dreidimensionalen **Laplace Gleichung**

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad \text{die die Rb } u|_{(x,y,z) \in S} = f(x, y, z) \quad (5.9)$$

erfüllt. Es liegt ein **RWP** vor.

Beispiel 5.7 Eine schwingende Saite sei an den Endpunkten $x = 0$ und $x = l$ eingespannt, es gilt also $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Ferner sei die Anfangsauslenkung $u(x, 0)$ und deren zeitliche Änderung $u_t(x, 0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannt. Gesucht ist die Auslenkung $u(x, t)$ der schwingenden Saite für $t > 0$, d.h. gesucht ist die Lösung der eindimensionalen **Wellengleichung**

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & \text{die die Ab } & u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{ und die Rb} \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

erfüllt. Es liegt ein **ARWP** vor.

5.2 Klassifikation linearer pDG 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten die Gleichung (5.7) mit dem **Hauptteil** $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j}$. Auf Grund der Gültigkeit des **Satzes von Schwarz** ist $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ für $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) und es gilt $a_{ij} u_{x_i x_j} + a_{ji} u_{x_j x_i} = (a_{ij} + a_{ji}) u_{x_i x_j}$. Die Summe $a_{ij} + a_{ji}$ lässt sich immer durch zwei gleiche Summanden darstellen, so dass die Koeffizientenmatrix **A** des **Hauptteils** stets als eine **symmetrische Matrix** vorausgesetzt werden kann.

Ziel: Der **Hauptteil** in der Gleichung (5.7) ist derart umzuformen, dass die **gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung** nicht mehr auftreten, d.h. (5.7) ist in ein neues Koordinatensystem zu überführen, in welchem die Koeffizientenmatrix des **Hauptteils** eine **Diagonalmatrix** ist. Aus der Darstellung der Gleichung (5.7) im neuen Koordinatensystem lässt sich dann die Art der **pDG** ablesen.

Methode: Es wird eine **Hauptachsentransformation** ähnlich wie bei quadratischen Formen durchgeführt, die auf folgendem Theorem basiert:

Theorem 5.1 *Zu jeder reellen symmetrischen Matrix **A** lässt sich eine reelle orthogonale Matrix **P**, (d.h. es gilt $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$), finden mit der Eigenschaft, dass die transformierte Matrix $\mathbf{D} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ **Diagonalgestalt** besitzt. Die Transformationsmatrix **P** enthält in der *j*-ten Spalte genau die Koordinaten des *j*-ten **normierten Eigenvektors \mathbf{z}^j** der Matrix **A**.*

Im Einzelnen sind folgende Schritte erforderlich:

1. Berechnung aller **Eigenwerte** λ und aller **Eigenvektoren** von **A**.
2. Orthogonalisierung der **Eigenvektoren**, die zu einem mehrfachen **Eigenwert** gehören, Normierung aller **Eigenvektoren**.
3. Aufstellen der (orthogonalen) Transformationsmatrix **P**, in deren Spalten die **orthonormierten Eigenvektoren** stehen.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \mathbf{z}^j = \begin{pmatrix} z_{1j} \\ z_{2j} \\ \dots \\ z_{nj} \end{pmatrix}$$

den *j*-ten **Eigenvektor** bezeichnet.

4. Ausführung der **Koordinatentransformation** $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ in der Gleichung (5.7). Dabei bezeichnen $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$ die neuen Koordinaten. Zur Umrechnung der Ableitungen wird die inverse Transformation $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{P}^T\mathbf{x}$ benötigt. In ausführlicher Schreibweise erhält man

$$\begin{aligned} y_1 &= z_{11} x_1 + \dots + z_{n1} x_n \\ &\dots \\ y_n &= z_{1n} x_1 + \dots + z_{nn} x_n. \end{aligned}$$

5. Umrechnung der Formeln für die Ableitungen im Falle $n = 2$

$$\begin{aligned}
 u_{x_1} &= u_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + u_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = z_{11} u_{y_1} + z_{12} u_{y_2} & \text{mit } \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = z_{11} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = z_{12} \\
 u_{x_2} &= u_{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + u_{y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = z_{21} u_{y_1} + z_{22} u_{y_2} & \text{mit } \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = z_{21} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = z_{22} \\
 u_{x_1 x_1} &= u_{y_1 y_1} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right)^2 + u_{y_1} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} + u_{y_2 y_2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right)^2 + u_{y_2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} + 2u_{y_1 y_2} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\
 &= z_{11}^2 u_{y_1 y_1} + z_{12}^2 u_{y_2 y_2} + 2z_{11} z_{12} u_{y_1 y_2} \\
 u_{x_2 x_2} &= u_{y_1 y_1} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right)^2 + u_{y_1} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2} + u_{y_2 y_2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right)^2 + u_{y_2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} + 2u_{y_1 y_2} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\
 &= z_{21}^2 u_{y_1 y_1} + z_{22}^2 u_{y_2 y_2} + 2z_{21} z_{22} u_{y_1 y_2} \\
 u_{x_1 x_2} &= u_{y_1 y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + u_{y_1} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2} + u_{y_2 y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + u_{y_2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 &+ u_{y_1 y_2} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right) \\
 &= z_{11} z_{21} u_{y_1 y_1} + z_{12} z_{22} u_{y_2 y_2} + (z_{11} z_{22} + z_{12} z_{21}) u_{y_1 y_2}.
 \end{aligned}$$

6. Durch Übergang zum neuen Koordinatensystem $w_k = l_k y_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) mit geeigneten l_k wird erreicht, dass alle **Eigenwerte** gleich ± 1 oder 0 sind.

Eine **pDG** der Form (5.7) lässt sich mit Hilfe des obigen Verfahrens stets auf die Form

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_{w_i w_i} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i u_{w_i} + cu + f = 0, \quad (5.11)$$

bringen, wobei ε_i die Werte ± 1 oder 0 annehmen kann. Die Gleichung (5.11) bezeichnet man auch als **Normalform** von (5.11).

Definition 5.6 Eine lineare **pDG** mit konstanten Koeffizienten mit den Eigenwerten λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) der symmetrischen Koeffizientenmatrix **A** des Hauptteils heißt

1. **elliptisch**, falls alle $\lambda_i \neq 0$ sind und dasselbe Vorzeichen besitzen,
2. **hyperbolisch**, falls alle $\lambda_i \neq 0$ sind und außer genau einem dasselbe Vorzeichen besitzen,
3. **parabolisch**, wenn mindestens ein $\lambda_i = 0$ ist.

Speziell ergeben sich für $n = 2$ folgende **Normalformen**:

$$\begin{aligned}
 u_{w_1 w_1} + u_{w_2 w_2} + \tilde{b}_1 u_{w_1} + \tilde{b}_2 u_{w_2} + cu + f &= 0 & \text{elliptischer Typ} \\
 u_{w_1 w_1} - u_{w_2 w_2} + \tilde{b}_1 u_{w_1} + \tilde{b}_2 u_{w_2} + cu + f &= 0 & \text{hyperbolischer Typ} \\
 u_{w_1 w_1} + \tilde{b}_1 u_{w_1} + \tilde{b}_2 u_{w_2} + cu + f &= 0 & \text{parabolischer Typ.}
 \end{aligned}$$

Die **pDG** (5.5) sowie (5.9) sind vom **elliptischen Typ**, die **pDG** (5.1) - (5.3) sowie (5.10) vom **hyperbolischen Typ** und die **pDG** (5.4) sowie (5.8) vom **parabolischen Typ**.

Bemerkung 5.1 Ähnlich wie bei der Umformung quadratischer Formen kann man noch eine Koordinatentransformation durchführen, so dass in den neuen Koordinaten in der Gleichung keine Terme, die Ableitungen erster Ordnung enthalten, mehr auftreten.

Bemerkung 5.2 Die Klassifikation ist auch auf **pDG mit variablen Koeffizienten** anwendbar. Man fixiert die Koeffizienten in einem Punkt \mathbf{x}_0 und bestimmt den Typ der **pDG** im Punkt \mathbf{x}_0 . Der Typ einer **pDG mit variablen Koeffizienten** kann sich von Punkt zu Punkt ändern, während man für **pDG mit konstanten Koeffizienten** den Typ sofort im gesamten betrachteten Gebiet erhält.

Beispiel 5.8 Bestimmen Sie den Typ der **pDG**

$$u_{x_1x_1} + 2u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} - u_{x_1} + u_{x_2} = 0 \quad (5.12)$$

und bringen Sie (5.12) auf die Form (5.11).

1. Berechnung der **Eigenwerte** und **Eigenvektoren**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} (1 - \lambda) & 1 \\ 1 & (1 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Zu den **Eigenwerten** $\lambda_1 = 0$ bzw. $\lambda_2 = 2$ gehören die **Eigenvektoren** \mathbf{c}^1 bzw. \mathbf{c}^2 :

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} c_{11} + c_{21} = 0 \\ c_{11} + c_{21} = 0 \\ -c_{12} + c_{22} = 0 \\ c_{12} - c_{22} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{c}^1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Die **pDG** (5.12) ist vom **parabolischen Typ**.

2. Die **Eigenvektoren** sind bereits orthogonal. Die **normierten Eigenvektoren** sind

$$\mathbf{z}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Aufstellen der (orthogonalen) Transformationsmatrix \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}.$$

4. Ausführung der Koordinatentransformation $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ in der **pDG** (5.12):

Man erhält aus $\mathbf{y} = \mathbf{P}^T \mathbf{x}$ die Transformationsgleichungen

$$\begin{array}{l} y_1 = z_{11} x_1 + z_{21} x_2 \\ y_2 = z_{12} x_1 + z_{22} x_2 \end{array} \quad \text{also} \quad \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2). \end{array}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{array}{l} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = z_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = z_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = z_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = z_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array} \quad (5.13)$$

5. Berechnung der Formeln für die Ableitungen Mit Hilfe von (5.13) erhält man aus den allgemeinen Ableitungsformeln

$$\begin{aligned}
 u_{x_1} &= z_{11} u_{y_1} + z_{12} u_{y_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_{y_1} + u_{y_2}), \\
 u_{x_2} &= z_{21} u_{y_1} + z_{22} u_{y_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-u_{y_1} + u_{y_2}), \\
 u_{x_1 x_1} &= z_{11}^2 u_{y_1 y_1} + z_{12}^2 u_{y_2 y_2} + 2z_{11} z_{12} u_{y_1 y_2} \\
 &= \frac{1}{2}(u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2} + 2u_{y_1 y_2}), \\
 u_{x_2 x_2} &= z_{21}^2 u_{y_1 y_1} + z_{22}^2 u_{y_2 y_2} + 2z_{21} z_{22} u_{y_1 y_2} \\
 &= \frac{1}{2}(u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2} - 2u_{y_1 y_2}), \\
 u_{x_1 x_2} &= z_{11} z_{21} u_{y_1 y_1} + z_{12} z_{22} u_{y_2 y_2} + (z_{11} z_{22} + z_{12} z_{21}) u_{y_1 y_2} \\
 &= \frac{1}{2}(-u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2}).
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Einsetzen in (5.12) liefert die Gleichung

$$2 u_{y_2 y_2} - \sqrt{2} u_{y_1} = 0. \tag{5.15}$$

6. Die Transformation $w_1 = y_1$ $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$ überführt (5.15) wegen

$$u_{y_1} = u_{w_1} \qquad u_{y_2 y_2} = \frac{1}{2} u_{w_2 w_2}$$

in die Normalform

$$u_{w_2 w_2} - \sqrt{2} u_{w_1} = 0.$$

5.3 Das Separationsverfahren

Die Lösung einer **pDG** wird in Form eines Produktansatzes

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \dots \varphi_n(x_n) \tag{5.16}$$

gesucht, wobei jeder Faktor nur von einer Variablen abhängt. Setzt man (5.16) in die **pDG** ein, so werden die partiellen Ableitungen von u durch gewöhnliche Ableitungen der Funktionen $\varphi_i(x_i)$ ersetzt. Nun versucht man die Gleichung derart umzuformen, dass eine Seite nur von einer einzigen Variablen x_k und die andere Seite nicht von x_k abhängt, d.h. die Variable x_k wird separiert. Diese Gleichung kann nur dann in einem Gebiet identisch erfüllt sein, wenn beide Seiten gleich einer gemeinsamen Konstanten sind, die wir mit λ bezeichnen. Diese Konstante heißt **Separationskonstante** oder **Separationsparameter**. Wäre nämlich die nur von der Variablen x_k abhängende Seite nicht konstant, so würde sie für mindestens zwei verschiedene Werte der Variablen x_k verschiedene Werte besitzen, während die nicht von x_k abhängende Seite bei einer Änderung von x_k unbeeinflusst bleibt. Also sind beide Seiten konstant. Setzt man die von x_k abhängende Seite gleich λ , so erhält man eine **gewöhnliche Differenzialgleichung**

(gDG) für die Funktion $\varphi_k(x_k)$. Ist $n = 2$, so hängt auch die andere Seite nur von einer einzigen Variablen ab und liefert auf dieselbe Weise eine **gDG**. Somit hat man für $n = 2$ die **pDG** durch zwei **gDG** ersetzt. Ist $n > 2$, so setzt man die nicht von x_k abhängende Seite ebenfalls gleich λ und wendet das **Separationsverfahren** auf diese Gleichung an. So gewinnt man sukzessive aus der **pDG** n **gDG** für die Funktionen $\varphi_i(x_i)$, wobei jeder Schritt mit der Einführung eines neuen **Separationsparameters** verbunden ist. Kennt man Lösungen aller dieser **gDG** (sie hängen von den **Separationsparametern** und den Konstanten, die bei der Lösung von **gDG** auftreten, ab), so hat man gemäß dem Ansatz (5.16) spezielle Lösungen der **pDG** gefunden, die noch von frei wählbaren Variablen abhängen.

5.3.1 Separationslösungen für parabolische pDG

Wir betrachten das **ARWP**

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad G = \{(x, t) \mid 0 < x < l \wedge t > 0\} \quad (5.17)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 < x < l \quad (5.18)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad t > 0. \quad (5.19)$$

1. Schritt: Ermittlung spezieller Lösungen mittels eines Produktansatzes

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (5.20)$$

Man erhält $\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$ und die beiden **gDG**

$$T'(t) - \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (5.21)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (5.22)$$

mit den **allgemeinen Lösungen**

$$X(x) = \begin{cases} A_1 x + A_2 & \text{für } \lambda = 0 \\ A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{für } \lambda > 0, \\ A_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + A_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x) & \text{für } \lambda < 0 \end{cases} \quad T(t) = A e^{\lambda a^2 t}.$$

Aus ihnen erhält man die Lösungen (mit $B_1 = A_1 A$, $B_2 = A_2 A$)

$$u(x, t) = \begin{cases} B_1 x + B_2 & \text{für } \lambda = 0 \\ (B_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + B_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}) e^{\lambda a^2 t} & \text{für } \lambda > 0, \\ B_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x) e^{\lambda a^2 t} & \text{für } \lambda < 0. \end{cases}$$

2. Schritt: Anpassung der Lösungen an die **Rb**

Nach Einsetzen der Lösung in die **Rb** (5.19) ergibt sich

$$\text{für } \lambda = 0 \quad u(0, t) = B_2 = 0, \quad u(l, t) = B_1 l + B_2 = 0 \implies B_1 = B_2 = 0,$$

$$\text{für } \lambda > 0 \quad u(0, t) = (B_1 + B_2) e^{\lambda a^2 t} \implies B_2 = -B_1$$

$$u(l, t) = B_1 (e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}) e^{\lambda a^2 t} = 0 \implies B_1 = B_2 = 0,$$

$$\text{für } \lambda < 0 \quad u(0, t) = B_2 e^{\lambda a^2 t} = 0 \implies B_2 = 0$$

$$u(l, t) = B_1 \sin(\sqrt{-\lambda}l) e^{\lambda a^2 t} = 0 \implies B_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0.$$

Für $\lambda \geq 0$ erfüllt wegen $B_1 = B_2 = 0$ nur die triviale Lösung die **Rb**.

Für $\lambda < 0$ gibt es auch nichttriviale Lösungen, denn es gilt

$$\sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0 \iff \sqrt{-\lambda}l = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \implies \lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2}{l^2}.$$

Die Zahlen λ_k heißen **Eigenwerte** des Problems. Zu jedem **Eigenwert** (außer $\lambda_0 = 0$) gibt es eine **Eigenfunktion** der Gestalt

$$u_k(x, t) = C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}\right) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (5.23)$$

die die **pDG** (5.17) und die **Rb** (5.19) erfüllt. Da die zu k und $-k$ die zugehörigen **Eigenfunktionen** sich nur um das Vorzeichen unterscheiden (was wegen der willkürlichen Konstanten C_k) unwesentlich ist), durchläuft in (5.23) der Index k nur die Menge der natürlichen Zahlen.

3. Schritt: Anpassung von (5.23) an die **Ab** (5.18) mittels eines Reihenansatzes

Die Lösung des **ARWP** (5.17) - (5.19) suchen wir mit Hilfe des Ansatzes

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}\right) \quad (5.24)$$

Die willkürlichen Konstanten C_k bestimmen wir derart, dass die **Ab** (5.18) erfüllt sind:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (5.25)$$

Setzt man voraus, dass sich $\varphi(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq l$ in eine **reine Sinus-Reihe** (vgl. Punkt 3.2 im Skript) entwickeln lässt, so gilt (5.25) mit den **FK**

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5.26)$$

Bemerkung 5.3 Die Lösungsdarstellung in Form der unendlichen Reihe (5.24) mit den Koeffizienten (5.26) hat formalen Charakter, da die Reihe (5.24) i. Allg. nicht konvergiert. Wir geben eine hinreichende Bedingung an: Wenn die **Ab** $\varphi(x)$ und ihre Ableitung $\varphi'(x)$ in $0 \leq x \leq l$ stetige Funktionen sind und $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ gilt, so ist (5.24) mit den Koeffizienten (5.26) Lösung des **ARWP** (5.17) - (5.19) im Gebiet G .

5.3.2 Separationslösungen für hyperbolische pDG

Wir betrachten das **ARWP** (vgl. Beispiel 5.7)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad G = \{(x, t) \mid 0 < x < l \wedge t > 0\} \quad (5.27)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 < x < l \quad (5.28)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad t > 0. \quad (5.29)$$

1. *Schritt*: Ermittlung spezieller Lösungen mittels eines Produktansatzes

Mit (5.20) erhält man $\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$ und die beiden **gDG**

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (5.30)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0. \quad (5.31)$$

2. *Schritt*: Anpassung der Lösungen an die **Rb**

Einsetzen von (5.20) in (5.29) liefert

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0 \quad u(l, t) = X(l) T(t) = 0 \implies X(0) = X(l) = 0. \quad (5.32)$$

Die Gleichung (5.31) mit den **Rb** (5.32) liefert ein **Eigenwertproblem**, welches nur für die **Eigenwerte** $\lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2}{l^2}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) nichttriviale Lösungen in Form der **Eigenfunktionen**

$$X_k(x) = C_k \sin\left(\frac{k \pi}{l} x\right) \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad C_k \text{ willkürliche Konstanten} \quad (5.33)$$

besitzt. Für $\lambda = \lambda_k$ erhält man aus der **gDG** (5.30)

$$T_k(t) = A_k \cos\left(\frac{k \pi a}{l} t\right) + B_k \sin\left(\frac{k \pi a}{l} t\right). \quad (5.34)$$

Aus (5.33) und (5.34) erhält man mit $D_k = C_k A_k$ und $E_k = C_k B_k$

$$u_k(x, t) = \left(D_k \cos\left(\frac{k \pi a}{l} t\right) + E_k \sin\left(\frac{k \pi a}{l} t\right) \right) \sin\left(\frac{k \pi}{l} x\right). \quad (5.35)$$

Der Ausdruck (5.35) ist eine formale Lösung von (5.27) und erfüllt (5.29).

3. *Schritt*: Anpassung von (5.35) an die **Ab** (5.28) mittels eines Reihenansatzes

Die Lösung des **ARWP** (5.27) - (5.29) suchen wir mittels des Ansatzes

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_k \cos\left(\frac{k \pi a}{l} t\right) + E_k \sin\left(\frac{k \pi a}{l} t\right) \right) \sin\left(\frac{k \pi}{l} x\right). \quad (5.36)$$

Die willkürlichen Konstanten D_k und E_k bestimmen wir derart, dass die **Ab** (5.28) erfüllt sind:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\left(\frac{k \pi}{l} x\right) = \varphi(x), \quad (5.37)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k \pi a}{l}\right) E_k \sin\left(\frac{k \pi}{l} x\right) = \psi(x). \quad (5.38)$$

Daraus erhält man D_k bzw. $\left(\frac{k \pi a}{l}\right) E_k$ als **FK** der Funktionen $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$ bei Entwicklung in eine **FR** nach den **Eigenfunktionen** $\sin\left(\frac{k \pi}{l} x\right)$. Wir setzen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ als

ungerade Funktionen mit der Periode $2l$ fort und erhalten aus den bekannten Formeln für die **FK**:

$$D_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx, \quad (5.39)$$

$$E_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) dx. \quad (5.40)$$

Einsetzen der berechneten Koeffizienten in (5.36) liefert eine formale Lösung des **ARWP** (5.27) - (5.29).

Bemerkung 5.4 Die Reihe (5.36) mit den Koeffizienten (5.39) und (5.40) konvergiert i. Allg. ebenfalls nicht. Wir geben eine hinreichende Bedingung an: Wenn

1° die **Ab** $\varphi(x)$ und ihre Ableitungen bis zur dritten Ordnung in $0 \leq x \leq l$ stetige Funktionen sind, wobei

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$$

gilt und

2° die **Ab** $\psi(x)$ und ihre Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in $0 \leq x \leq l$ stetige Funktionen sind, wobei

$$\psi(0) = \psi(l) = 0$$

gilt, so ist (5.36) mit den Koeffizienten (5.39) und (5.40) Lösung des **ARWP** (5.27) - (5.29) im Gebiet G .

5.4 Lösung von pDG mit Hilfe der FT

Wir betrachten das **AWP**

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} & G &= \{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty \wedge t > 0\}, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) & & -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

Die **FT** wird nur bezüglich der Variablen x betrachtet. Wir setzen voraus, dass die **FT** für die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ existieren und verwenden folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} F[u(x, t)] &= U(\omega, t) \\ F[u(x, 0)] &= F[\varphi(x)] = \varphi(\omega) = U(\omega, 0), \\ F[u_t(x, 0)] &= F[\psi(x)] = \psi(\omega) = U_t(\omega, 0). \end{aligned}$$

Wir bestimmen eine Lösung mithilfe der **FT**.

1. Schritt: Transformation in den Bildbereich bezüglich der Variablen x

Unter Verwendung des Differentiationsatzes erhält man:

$$U_{tt}(\omega, t) = (i\omega a)^2 U(\omega, t) = -\omega^2 a^2 U(\omega, t) \quad (5.41)$$

$$U(\omega, 0) = \varphi(\omega), \quad (5.42)$$

$$U_t(\omega, 0) = \psi(\omega). \quad (5.43)$$

Man erhält im Bildbereich ein **AWP** für eine gewöhnliche Differenzialgleichung bezüglich t , welche vom Parameter ω abhängt.

2. Schritt: Lösung im Bildbereich

Einsetzen des Lösungsansatzes $U(\omega, t) = e^{\lambda t}$ in die transformierte Gleichung (5.41) liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \omega^2 a^2 = 0 \quad \text{mit den Lösungen} \quad \lambda_{1|2} = \pm i\omega a.$$

Folglich hat die allgemeine Lösung die Gestalt:

$$U(\omega, t) = C_1(\omega) e^{i\omega a t} + C_2(\omega) e^{-i\omega a t},$$

wobei $C_1(\omega)$ und $C_2(\omega)$ aus den **Ab** (5.42) und (5.43) bestimmt werden. Man erhält das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} U(\omega, 0) &= C_1(\omega) + C_2(\omega) = \varphi(\omega) \\ U_t(\omega, 0) &= i\omega a C_1(\omega) + (-i\omega a) C_2(\omega) = \psi(\omega) \end{aligned}$$

bezüglich der Unbekannten $C_1(\omega)$ und $C_2(\omega)$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} C_1(\omega) &= \frac{1}{2} \left[\varphi(\omega) + \frac{1}{i\omega a} \psi(\omega) \right] \\ C_2(\omega) &= \frac{1}{2} \left[\varphi(\omega) - \frac{1}{i\omega a} \psi(\omega) \right] \end{aligned}$$

und als Lösung im Bildbereich

$$\begin{aligned} U(\omega, t) &= \frac{1}{2} \left[\varphi(\omega) + \frac{1}{i\omega a} \psi(\omega) \right] e^{i\omega a t} + \frac{1}{2} \left[\varphi(\omega) - \frac{1}{i\omega a} \psi(\omega) \right] e^{-i\omega a t} \\ &= \frac{1}{2} \left[\varphi(\omega) e^{i\omega a t} + \varphi(\omega) e^{-i\omega a t} \right] + \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{i\omega} \psi(\omega) e^{i\omega a t} - \frac{1}{i\omega} \psi(\omega) e^{-i\omega a t} \right]. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$F[u_1(x, t)] = U_1(\omega, t) = \frac{1}{2} \left[\varphi(\omega) e^{i\omega a t} + \varphi(\omega) e^{-i\omega a t} \right] \quad (5.44)$$

$$F[u_2(x, t)] = U_2(\omega, t) = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{i\omega} \psi(\omega) e^{i\omega a t} - \frac{1}{i\omega} \psi(\omega) e^{-i\omega a t} \right]. \quad (5.45)$$

und

$$F[u(x, t)] = U(\omega, t) = U_1(\omega, t) + U_2(\omega, t) \quad (5.46)$$

3. Schritt: Rücktransformation mit Hilfe des Verschiebungs- und Integrationsatzes

Die Beziehung (5.44) wird nach dem Verschiebungssatz für die **FT** umgeformt. Wir verwenden ihn in der speziellen Form

$$e^{i\omega b} F(\omega) = e^{i\omega b} F[f(x)] = F[f(x + b)].$$

Dann ist wegen $\varphi(\omega) = F[\varphi(x)]$ und für

$$\begin{aligned} b = +at, \quad f = \varphi \quad e^{+i\omega at} \varphi(\omega) &= e^{+i\omega at} F[\varphi(x)] = F[\varphi(x + at)] \\ b = -at, \quad f = \varphi \quad e^{-i\omega at} \varphi(\omega) &= e^{-i\omega at} F[\varphi(x)] = F[\varphi(x - at)]. \end{aligned}$$

Die Gleichung (5.44) hat nun die Gestalt:

$$F[u_1(x, t)] = U_1(\omega, t) = \frac{1}{2}[F[\varphi(x + at)] + F[\varphi(x - at)]]. \quad (5.47)$$

Die Beziehung (5.45) wird nach dem Integrationsatz und dem Verschiebungssatz umgeformt. Wir verwenden folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\omega} F(\omega) &= \frac{1}{i\omega} F[f(x)] = F\left[\int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau\right] \quad \text{und} \\ \frac{1}{i\omega} e^{i\omega b} F(\omega) &= \frac{1}{i\omega} F[f(x + b)] = F\left[\int_{-\infty}^{x+b} f(\tau) d\tau\right]. \end{aligned}$$

Mit $b = \pm at$ und $f = \psi$ erhält man wegen $\psi(\omega) = F[\psi(x)]$ aus (5.45):

$$F[u_2(x, t)] = U_2(\omega, t) = \frac{1}{2a} F\left[\int_{-\infty}^{x+at} \psi(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{2a} F\left[\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau\right]. \quad (5.48)$$

Aus (5.46)–(5.48) ergibt sich nun unter Benutzung des Additionssatzes die Lösung im Originalbereich:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau.$$

Die letzte Beziehung heißt auch **d'Alembertsche Formel**.

4. Schritt: Probe

Die Lösung erfüllt die Ausgangsgleichung und die **Ab**. Es gilt:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{1}{2}[\varphi'(x + at) + \varphi'(x - at)] + \frac{1}{2a}[\psi(x + at) - \psi(x - at)], \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2}[\varphi''(x + at) + \varphi''(x - at)] + \frac{1}{2a}[\psi'(x + at) - \psi'(x - at)], \\ u_t(x, t) &= \frac{1}{2}[\varphi'(x + at)a + \varphi'(x - at)(-a)] + \frac{1}{2a}[\psi(x + at)a - \psi(x - at)(-a)], \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2}[\varphi''(x + at)a^2 + \varphi''(x - at)(-a)^2] + \frac{1}{2a}[\psi'(x + at)a^2 - \psi'(x - at)(-a)^2], \\ u(x, 0) &= \frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(x)] + \frac{1}{2a} \int_x^x \psi(\tau) d\tau = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \frac{a}{2}[\varphi'(x) - \varphi'(x)] + \frac{1}{2}[\psi(x) + \psi(x)] = \psi(x). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass sowohl die Ausgangsgleichung $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ als auch die **Ab** erfüllt sind.