

# Vorlesungsskript Mathematik I für Chemiker

Verfasserin:  
HSD Dr. Sybille Handrock  
TU Chemnitz  
Fakultät für Mathematik  
e-mail: handrock@mathematik.tu-chemnitz.de

Wintersemester 2006/2007

## Literatur

- [1] *Dallmann, H., Elster, K. H.*: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Bd. 1–2, Uni-TB GmbH, Stuttgart, 1991.
- [2] *Harbarth, K., Riedrich, T., Schirotzek, W.*: Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen, Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1996.
- [3] *Papula, L.*: Mathematik für Chemiker, Enke-Verlag, Stuttgart, 1991.
- [4] *Pfarr, E. A., Schirotzek, W.*: Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen, Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1993.
- [5] *Reinsch, E.-A.*: Mathematik für Chemiker, B.G. Teubner, Stuttgart, 2004.
- [6] *Rösch, N.*: Mathematik für Chemiker, Springer, Berlin, 1993.
- [7] *Zachmann, H.G.*: Mathematik für Chemiker, Wiley-VCH, Weinheim, 2003.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>1</b>
1.1	Einführung und Darstellungsformen komplexer Zahlen . . . . .	1
1.2	Rechenoperationen in $\mathbb{C}$ . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Reelle Funktionen einer reellen Variablen</b>	<b>7</b>
2.1	Der Funktionsbegriff . . . . .	7
2.2	Eigenschaften reeller Funktionen . . . . .	9
2.3	Rationale Funktionen . . . . .	12
2.3.1	Ganze rationale Funktionen . . . . .	12
2.3.2	Gebrochen rationale Funktionen . . . . .	13
2.4	Nichtrationale Funktionen . . . . .	16
2.4.1	Wurzelfunktionen . . . . .	16
2.4.2	Transzendente Funktionen . . . . .	17
2.5	Grenzwerte und Stetigkeit reeller Funktionen einer reellen Variablen . . . . .	23
2.5.1	Zahlenfolgen (ZF) . . . . .	23
2.5.2	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	26
2.5.3	Stetigkeit einer Funktion . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen</b>	<b>30</b>
3.1	Definition und Darstellungsmöglichkeiten . . . . .	30
3.2	Grenzwerte und Stetigkeit . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Differenzialrechnung für reelle Funktionen einer reellen Variablen</b>	<b>33</b>
4.1	Der Ableitungsbegriff . . . . .	33
4.2	Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	36
4.3	Anwendungen der Differenzialrechnung . . . . .	37
4.3.1	Approximation von Funktionen . . . . .	37
4.3.2	Das Differenzial . . . . .	38
4.3.3	Anwendung des Differenzials in der Fehlerrechnung . . . . .	38
4.3.4	Die Regeln von de l'Hospital . . . . .	39
4.4	Untersuchung des Verhaltens reeller Funktionen . . . . .	41
4.4.1	Monotonieverhalten . . . . .	41
4.4.2	Extrema . . . . .	41

4.4.3	Krümmungsverhalten . . . . .	43
4.4.4	Wendepunkte (WP) . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Differenzialrechnung für reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen</b>	<b>45</b>
5.1	Partielle Ableitungen . . . . .	45
5.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	46
5.3	Totale Differenzierbarkeit und totales Differenzial . . . . .	47
5.4	Anwendung des totalen Differenzials in der Fehlerrechnung . . . . .	49
5.5	Extrema ohne Nebenbedingungen . . . . .	50
5.6	Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .	54

# 1 Komplexe Zahlen

## 1.1 Einführung und Darstellungsformen komplexer Zahlen

Wir betrachten Zahlenmengen, in welchen zwei Operationen, die **Addition** und die **Multiplikation**, eingeführt sind, und untersuchen Gleichungen auf ihre Lösbarkeit.

1. **Menge der natürlichen Zahlen**  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  bzw.  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Es gilt:  $a, b \in \mathbb{N} \implies a + b \in \mathbb{N}$  und  $a \cdot b \in \mathbb{N}$ .

Die Gleichung  $x + 7 = 3$  ist in  $\mathbb{N}$  nicht lösbar.

2. **Menge der ganzen Zahlen**  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \mathbb{N}_0$ .

Es gilt:  $a, b \in \mathbb{Z} \implies a + b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \cdot b \in \mathbb{Z}$  und  $a - b \in \mathbb{Z}$ .

Die Gleichung  $3x = 7$  ist in  $\mathbb{Z}$  nicht lösbar.

3. **Menge der rationalen Zahlen**  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \text{ggT}(a, b) = 1 \right\}$ . Jede **rationale** Zahl lässt sich als **endlicher** oder **unendlicher periodischer Dezimalbruch** darstellen.

Es gilt:  $a, b \in \mathbb{Q} \implies a + b \in \mathbb{Q}$ ,  $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ ,  $a - b \in \mathbb{Q}$  und  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  ( $b \neq 0$ ).

Die Gleichung  $x^2 = 2$  ist in  $\mathbb{Q}$  nicht lösbar.

4. **Menge der reellen Zahlen (Menge aller Dezimalbrüche)**  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R}_{irr}$ , wobei  $\mathbb{R}_{irr}$  die Menge aller **irrationalen Zahlen (aller nichtperiodischen unendlichen Dezimalbrüche)** bezeichnet. Z.B. sind  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$  **irrationale Zahlen**.

Es gilt:  $a, b \in \mathbb{R} \implies a + b \in \mathbb{R}$ ,  $a \cdot b \in \mathbb{R}$ ,  $a - b \in \mathbb{R}$  und  $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$  ( $b \neq 0$ ).

**(Absoluter) Betrag**  $|a|$  einer **reellen** Zahl  $a$  heißt der Abstand des diese Zahl darstellenden Punktes auf der Zahlengeraden vom Nullpunkt, d.h.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a > 0 \\ 0, & \text{falls } a = 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

In  $\mathbb{R}$  sind zwei verschiedene Zahlen stets vergleichbar, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq b &\implies (a < b) \vee (a > b), \\ a \leq b &\iff a < b \vee a = b, \\ a \geq b &\iff a > b \vee a = b. \end{aligned}$$

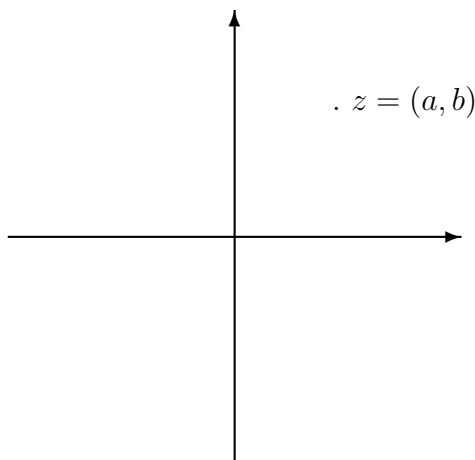
Die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  ist in  $\mathbb{R}$  nicht lösbar.

Für die betrachteten Zahlenmengen gilt:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Die Zahlengerade ist durch Zahlen aus  $\mathbb{R}$  lückenlos ausgefüllt, d.h., falls es eine Zahl gibt, die die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

erfüllt, so kann diese Zahl nicht auf der Zahlengeraden liegen. Wir führen eine neue Zahlenmenge ein, deren Elemente **geordnete Paare reeller Zahlen** sind, nämlich die

5. **Menge der komplexen Zahlen**  $\mathbb{C} = \{z \mid z = (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ . Die Elemente der Menge  $\mathbb{C}$  stellen Punkte in der **Gaußschen Zahlenebene** dar. Ein Koordinatensystem in der **Gaußschen Zahlenebene** ist durch eine reelle und eine imaginäre Achse gegeben.



Zwei wichtige Teilmengen sind

- a)  $\mathbb{C}_r = \{z \mid z = (a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$  - die Menge aller Punkte auf der reellen Achse,  
 b)  $\mathbb{C}_i = \{z \mid z = (0, b) \mid b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$  - die Menge aller Punkte auf der imaginären Achse.

Wir betrachten zwei **komplexe Zahlen**  $z_i = (a_i, b_i)$  ( $i = 1, 2$ ) und führen den Begriff der **Gleichheit** sowie die Operationen **Addition** und **Multiplikation** ein:

**Gleichheit:**  $z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$  (das Symbol  $\wedge$  bedeutet: und),

**Addition:**  $z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  (das Symbol  $\forall$  bedeutet: für alle),

**Multiplikation:**  $z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

Speziell gilt für Elemente der Menge  $\mathbb{C}_r$ :

$$\begin{aligned} (a_1, 0) = (a_2, 0) &\iff a_1 = a_2, \\ (a_1, 0) + (a_2, 0) &= (a_1 + a_2, 0), \\ (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) &= (a_1 a_2, 0), \end{aligned}$$

d.h. **Gleichheit** und die Operationen **Addition** und **Multiplikation** entsprechen der **Gleichheit** und den Operationen **Addition** und **Multiplikation** in  $\mathbb{R}$ . Deshalb kann man  $(a, 0) = a$  und  $\mathbb{C}_r = \mathbb{R}$  setzen. Die Zahl  $(1, 0) = 1$  nennt man **reelle Einheit**, während die Zahl  $(0, 1) =: i$  **imaginäre Einheit** heißt. Es gilt nun

$$\begin{aligned} i \cdot i &= (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1, \\ b \cdot i &= (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b), \end{aligned}$$

d.h., es gilt  $(0, b) = bi$  (das geordnete Paar  $(0, b)$  ist gleich dem Produkt der **reellen Zahl**  $b$  mit der **imaginären Einheit**  $i$ ). Die Menge  $\mathbb{C}_i$  besteht also aus allen **rein imaginären Zahlen**.

Es ist also

$a = (a, 0)$  eine Darstellung einer **reellen Zahl** als geordnetes Paar und  
 $bi = (0, b)$  eine Darstellung einer **rein imaginären Zahl** als geordnetes Paar.

Somit erhält man aus der Darstellung einer **komplexen Zahl** als geordnetes Paar die **kartesische** oder **algebraische Darstellung** einer **komplexen Zahl**:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi = a + ib.$$

Dabei heißt  $a$  der **Realteil** und  $b$  **Imaginärteil** von  $z$ .

Bezeichnungen:  $a = \operatorname{Re} z$       $b = \operatorname{Im} z$ .

**(Absoluter) Betrag**  $|z|$  einer **komplexen Zahl**  $z$  heißt der Abstand des diese Zahl darstellenden Punktes in der **Gaußschen Zahlenebene** vom Koordinatenursprung, d.h.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} =: r.$$

Für  $b = 0$  erhält man  $r = |a|$ , den **Betrag** einer **reellen Zahl**.

Bezeichnet man den Winkel, den die Strecke  $\overline{Oz}$  mit der positiven Richtung der reellen Achse einschließt, mit  $\varphi = \arg z$ , so gilt

$$\begin{aligned} a &= r \cos \varphi, & b &= r \sin \varphi, \\ r &= \sqrt{a^2 + b^2}, & \tan \varphi &= \frac{b}{a}, \quad \text{falls } a \neq 0, \\ \varphi &= \frac{\pi}{2}, \quad \text{falls } a = 0 \text{ und } b > 0, & \varphi &= \frac{3\pi}{2}, \quad \text{falls } a = 0 \text{ und } b < 0. \end{aligned}$$

Für  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  ist durch die Vorzeichen dieser **reellen Zahlen** eindeutig festgelegt, in welchem Quadranten  $z$  liegt.

Man nennt  $(r, \varphi)$  auch die **Polarkoordinaten** eines Punktes  $z$  in der Ebene.

Folglich erhält man aus der **algebraischen Darstellung** einer **komplexen Zahl** mit  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$  die **trigonometrische Darstellung** einer **komplexen Zahl**:

$$z = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Für  $a = b = 0$ , d.h.  $z = (0, 0)$  ist  $r = 0$  und  $\arg z$  unbestimmt. Die Zahl  $z = (0, 0)$  ist die einzige **komplexe Zahl** mit unbestimmtem **Argument**. Für  $z \neq (0, 0)$  besitzt  $\arg z$  unendlich viele Werte. Der Wert von  $\arg z$ , für den  $0 \leq \arg z < 2\pi$  gilt, heißt **Hauptwert** von  $\arg z$ . Alle übrigen Werte gehen aus dem **Hauptwert** durch Addition von  $2k\pi$   $k \in \mathbb{Z}$  hervor.

Mit Hilfe der **Eulerschen Formeln**  $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$  erhält man aus der **trigonometrischen Darstellung** einer **komplexen Zahl**  $z \neq (0, 0)$  die **Exponentialdarstellung** einer **komplexen Zahl**:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \exp(i\varphi) = r e^{i\varphi}.$$

Wir unterscheiden also vier Darstellungsformen **komplexer Zahlen**:

- (1)  $z = (a, b)$  die **Darstellung** als **geordnetes Paar reeller Zahlen**  $a$  und  $b$ ,
- (2)  $z = a + bi = a + ib$  die **algebraische Darstellung**,
- (3)  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  die **trigonometrische Darstellung** für  $z \neq (0, 0)$ ,
- (4)  $z = r \exp(i\varphi) = r e^{i\varphi}$  die **Exponentialdarstellung** für  $z \neq (0, 0)$ .

**Beispiel 1.1** Für die komplexe Zahl  $z = (1, \sqrt{3})$  erhält man

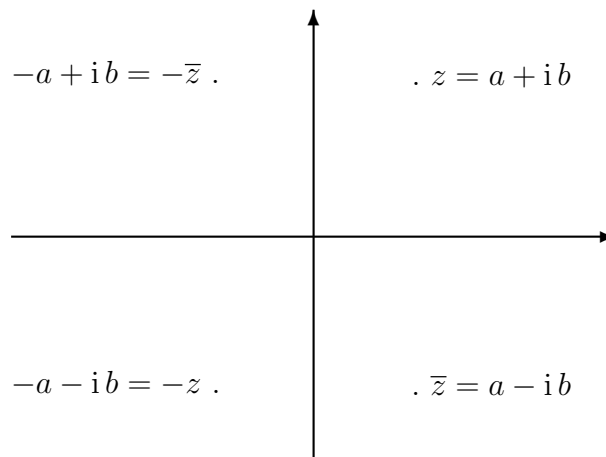
in der **algebraischen Form**  $z = 1 + i\sqrt{3}$   $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = \sqrt{3}$ ,

in der **trigonometrischen Form**  $z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$   $r = 2, \varphi = \frac{\pi}{3}$ ,

in der **Exponentialform**  $z = 2 \exp \left( i \frac{\pi}{3} \right) = 2 e^{i \frac{\pi}{3}}$ .

**Spezielle komplexe Zahlen:** Sei  $z = a + ib$ . Dann heißt

1.  $\bar{z} = a - ib$  **konjugiert komplexe Zahl** von  $z$ ,
2.  $-z = -a - ib$  **entgegengesetzte Zahl** von  $z$ ,
3.  $-\bar{z} = \overline{-z} = -a + ib$  **entgegengesetzte zur konjugiert komplexen** oder **konjugiert komplexe zur entgegengesetzten Zahl** von  $z$ .



Im Unterschied zu  $\mathbb{R}$  sind in  $\mathbb{C}$  zwei verschiedene **komplexe Zahlen** nicht vergleichbar. Ein Vergleich zweier **komplexer Zahlen** ist nur über die **Beträge** möglich.

## 1.2 Rechenoperationen in $\mathbb{C}$

Zur bequemen Ausführung von Rechenoperationen der 1. bis 3. Stufe wurden die Darstellungsmöglichkeiten (2) bis (4) eingeführt.

1. Rechenoperationen der 1. Stufe

**Addition** und **Subtraktion** (Ausführung zweckmäßig in **algebraischer Darstellung** (2))

Zwei komplexe Zahlen werden **addiert (subtrahiert)**, indem man die **Realteile** und die **Imaginärteile** jeweils für sich **addiert (subtrahiert)**:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + i b_1) \pm (a_2 + i b_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2).$$

2. Rechenoperationen der 2. Stufe

**Multiplikation** (Ausführung in den Darstellungen (2) bis (4) möglich)

(2) Zwei komplexe Zahlen in **algebraischer Darstellung** werden multipliziert, indem man die Faktoren gliedweise ausmultipliziert:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i b_1) \cdot (a_2 + i b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

(3) Zwei komplexe Zahlen in **trigonometrischer Darstellung** werden multipliziert, indem man die **Beträge** multipliziert und die **Argumente** addiert:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

(4) Zwei komplexe Zahlen in **Exponentialdarstellung** werden multipliziert, indem man die **Beträge** multipliziert und die **Argumente** addiert:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \exp(i \varphi_1) \cdot r_2 \exp(i \varphi_2) = r_1 r_2 \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

**Division** (Ausführung in den Darstellungen (2) bis (4) möglich)

(2) Zwei komplexe Zahlen in **algebraischer Darstellung** werden dividiert, indem man den Quotienten mit der zum Divisor **konjugiert komplexen Zahl** erweitert (Reellmachen des Nenners) und die erhaltenen Faktoren im Zähler ausmultipliziert:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + i b_1}{a_2 + i b_2} = \frac{(a_1 + i b_1)(a_2 - i b_2)}{(a_2 + i b_2)(a_2 - i b_2)} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

(3) Zwei komplexe Zahlen in **trigonometrischer Darstellung** werden dividiert, indem man die **Beträge** dividiert und die **Argumente** subtrahiert:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \left( \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} + i \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} \right) \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

(4) Zwei komplexe Zahlen in **Exponentialdarstellung** werden dividiert, indem man die **Beträge** dividiert und die **Argumente** subtrahiert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \exp(i \varphi_1)}{r_2 \exp(i \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \exp(i(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$



**Beispiel 1.2**  $z_1 = a_1 + i b_1$   $z_2 = i$  ( also ist  $r_2 = 1$  und  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  )

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot i = -b_1 + i a_1 = r_1(-\sin \varphi_1 + i \cos \varphi_1) = r_1 \exp \left( i \left( \varphi_1 + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{i} = b_1 - i a_1 = r_1(\sin \varphi_1 - i \cos \varphi_1) = r_1 \exp \left( i \left( \varphi_1 - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

### 3. Rechenoperationen der 3. Stufe

**Potenzieren** (Ausführung in den Darstellungen (2) bis (4) möglich)

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir definieren  $z^0 := 1$ ,  $z^n := z^{n-1} \cdot z$ .

(2)  $z^n = (a + i b)^n$  - Das Binom ist auszumultiplizieren.

(3)  $z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$  - Formel von **Moivre**.

(4)  $z^n = r^n \exp(i n \varphi)$ .

**Radizieren** (i. Allg. nur in Darstellung (3) und (4) möglich)

In  $\mathbb{R}$  gilt: Für jedes  $\beta \geq 0$  und jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  existiert **genau eine reelle Zahl**  $\alpha \geq 0$ , so dass  $\alpha^n = \beta$  gilt.

In  $\mathbb{C}$  gilt: Für jedes  $z \neq (0, 0)$  und jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  existieren **stets  $n$  verschiedene komplexe Zahlen**  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ , so dass  $w_k^n = z$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$  gilt.

**Berechnungsformeln für die  $n$  komplexen Wurzeln:**

$$(3) w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$(4) w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp \left( i \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Der Wert für  $k = 0$  heißt **Hauptwert** von  $\sqrt[n]{z}$ , falls  $0 \leq \varphi < 2\pi$  gilt.

**Logarithmieren** (in Darstellung (4) möglich)

$$(4) \ln z = \ln(r \exp(i(\varphi + 2k\pi))) = \ln r e^{i(\varphi + 2k\pi)} = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Der **Logarithmus** einer komplexen Zahl besitzt unendlich viele Werte. Der Wert für  $k = 0$  heißt **Hauptwert** von  $\ln z$ , falls  $0 \leq \varphi < 2\pi$  gilt.

### Beispiel 1.3 (Rechenoperationen der 3. Stufe)

(1) Die binomische Gleichung  $w^n = 1$  besitzt die Wurzeln

$$w_k = \sqrt[n]{1} = \cos \left( \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2k\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

(2) Die Gleichung  $w^n = -1$  besitzt die Wurzeln

$$w_k = \sqrt[n]{-1} = \cos \left( \frac{\pi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\pi + 2k\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

(3)  $\ln(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = i(\pi + 2k\pi)$  **Hauptwert:**  $i\pi$

(4)  $w^2 + 1 = 0$  besitzt die Lösungen  $w_0 = +i$  und  $w_1 = -i$ .

(5)  $z^2 - 2z + 2 = 0$  besitzt die Lösungen  $z_0 = 1 + i$  und  $z_1 = 1 - i$ .

## 2 Reelle Funktionen einer reellen Variablen

### 2.1 Der Funktionsbegriff

#### Definition 2.1 (Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich)

1. Eine Vorschrift  $f$ , die **jedem** Element  $x$  einer Menge  $X$  in **eindeutiger** Weise ein Element  $y$  einer Menge  $Y$  zuordnet (d.h. **jedem**  $x \in X$  wird **genau** ein Element  $y \in Y$  zugeordnet), heißt **Funktion**.
2. Die Menge  $X$  heißt **Definitionsbereich**  $D(f)$  der Funktion  $f$ , während die Menge  $W(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in D(f) : y = f(x)\} \subseteq Y$  **Wertebereich** von  $f$  genannt wird (das Symbol  $\exists$  bedeutet: **es existiert ein**).
3. Gilt  $X \subseteq \mathbb{R}$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}$ , so spricht man von **reellen Funktionen einer reellen Variablen**. Dabei heißt  $x$  **unabhängige Variable** und  $y$  **abhängige Variable**.
4. Sei  $X \subseteq \mathbb{R}$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . Die Menge aller Punkte  $\{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}$  in der Ebene heißt **Graph** der Funktion  $f$ . Diese Punktmenge stellt eine Kurve in der Ebene dar.

Wegen der **Eindeutigkeit** der Zuordnung können wir schreiben:  $y = f(x) \quad x \in D(f)$ .  
Fehlt bei Vorgabe einer Funktion die Angabe über  $D(f)$ , so verstehen wir unter  $D(f)$  die Menge aller  $x \in \mathbb{R}$ , für die  $f$  sinnvoll ist (maximal möglicher Definitionsbereich).

Der **Definitionsbereich** einer Funktion besteht häufig aus allen zwischen zwei reellen Zahlen  $a$  und  $b$  liegenden Zahlen. Eine solche Zahlenmenge wird als **Intervall** bezeichnet.

**Definition 2.2** Es gelte  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Dann heißt

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossenes Intervall in } \mathbb{R}, \\ ]a, b[ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\} && \text{offenes Intervall in } \mathbb{R}, \\ [a, b[ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\} && \text{rechtsoffenes Intervall in } \mathbb{R}, \\ ]a, b] &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\} && \text{links offenes Intervall in } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die beiden letztgenannten Intervalle heißen auch *halboffene Intervalle* in  $\mathbb{R}$ . Die Punkte  $a, b$  heißen *Randpunkte* dieser Intervalle.

Die Fälle  $a = -\infty$  oder  $b = +\infty$  sind zulässig. Man spricht dann von *unbeschränkten Intervallen*. Gilt  $a = -\infty$  und  $b = +\infty$ , so ist  $] -\infty, +\infty [ = \mathbb{R}$ .

Die Punktmenge  $U_\varepsilon(a) = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon [$  heißt  $\varepsilon$ -Umgebung des Punktes  $a$ .

**Beispiel 2.1** Die innere Energie  $U$  eines idealen Gases ist temperaturabhängig, d.h.  $U$  ist eine Funktion der (absoluten) Temperatur  $T$ . Es gilt:

$$U = U(T) = C_V T + \text{const.} \quad T \in D(U).$$

Dabei ist  $C_V$  die Molwärme bei konstantem Volumen, die Temperatur  $T$  die **unabhängige** und die innere Energie  $U$  die **abhängige Variable**.

**Darstellungsmöglichkeiten reeller Funktionen:**

- Verbale Darstellung
- Darstellung durch eine Tabelle von Messwerten (empirische Funktion)
- Grafische Darstellung durch eine Kurve in der Ebene (Graph von  $f$ )
- Analytische Darstellung:
  - 1° Explizite Darstellung:  $y = f(x) \quad x \in D(f)$
  - 2° Implizite Darstellung:  $F(x, y) = 0$ .

**Definition 2.3** Erfüllt die Funktion  $y = f(x) \quad x \in D(f)$  die Gleichung

$$F(x, y) = 0, \quad (2.1)$$

d.h. gilt  $F(x, f(x)) = 0$  für **alle**  $x \in D(f)$ , so heißt  $y = f(x)$  eine durch  $F(x, y) = 0$  **implizit definierte Funktion** von  $x$ .

**Beispiel 2.2** Ein ideales Gas wird durch drei Zustandsvariable  $p$  (Druck),  $V$  (Volumen) und  $T$  (Temperatur) beschrieben, d.h. es gilt die Zustandsgleichung  $pV = RT$  (für 1 Mol, wobei  $R$  die allgemeine Gaskonstante ist, die für jedes Gas einen bestimmten Wert hat).

- Bei isothermen Zustandsänderungen (d.h. die Temperatur  $T$  bleibt konstant) ist der Druck  $p$  eine Funktion des Volumens  $V$ :

$$p = p(V) = \frac{RT_0}{V} = \frac{\text{const}}{V} \implies pV = \text{const} \quad \text{Boyle-Mariottesches Gesetz.}$$

- Bei isochoren Zustandsänderungen (d.h. das Volumen  $V$  bleibt konstant) ist der Druck  $p$  eine Funktion der Temperatur  $T$ :

$$p = p(T) = \frac{R}{V_0} T = \text{const} \cdot T \implies \frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{Gay-Lussacsches Druckgesetz.}$$

- Bei isobaren Zustandsänderungen (d.h. der Druck  $p$  bleibt konstant) ist das Volumen  $V$  eine Funktion der Temperatur  $T$ :

$$V = V(T) = \frac{R}{p_0} T = \text{const} \cdot T \implies \frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{Gay-Lussacsches Volumengesetz.}$$

**Beispiel 2.3 (Implizit definierte Funktionen)**

- (1) Durch (2.1) können mehrere **Funktionen implizit** definiert sein, z.B. sind durch

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

zwei **Funktionen implizit** erklärt, die hier auch **explizit** darstellbar sind:

$$\begin{aligned} y &= f_1(x) = +\sqrt{1-x^2} & x \in D(f_1) &= [-1, +1], \\ y &= f_2(x) = -\sqrt{1-x^2} & x \in D(f_2) &= [-1, +1]. \end{aligned}$$

- (2) Durch (2.1) ist nicht notwendig eine **Funktion implizit** definiert, z.B. ist durch

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

keine **Funktion implizit** erklärt.

- (3)  $F(x, y) = y - x - \varepsilon \sin y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1)$  Es ist keine explizite Darstellung der Form  $y = f(x)$  möglich.

## 2.2 Eigenschaften reeller Funktionen

**Definition 2.4** (Beschränktheit, Monotonie, Periodizität)

1.  $f$  heißt auf  $D(f)$  **beschränkt** gdw  $\exists c > 0 : |f(x)| \leq c \quad \forall x \in D(f)$ ,
2.  $f$  heißt auf  $D(f)$  **konstant** gdw  $\exists a > 0 : f(x) = a \quad \forall x \in D(f)$ ,
3.  $f$  heißt auf  $D(f)$  **monoton wachsend** gdw  $f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D(f)$  mit  $x_1 < x_2$ ,
4.  $f$  heißt auf  $D(f)$  **monoton fallend** gdw  $f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D(f)$  mit  $x_1 < x_2$ ,
5.  $f$  heißt auf  $D(f)$  **streng monoton wachsend** gdw  $f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D(f)$  mit  $x_1 < x_2$ ,
6.  $f$  heißt auf  $D(f)$  **streng monoton fallend** gdw  $f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D(f)$  mit  $x_1 < x_2$ ,
7.  $f$  heißt auf  $D(f)$  **periodisch** mit der Periode  $p \neq 0$  gdw
  - 1°  $x \in D(f) \implies x + p \in D(f)$ ,
  - 2°  $f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in D(f)$ ,
8.  $f$  heißt auf  $D(f)$  **gerade** gdw
  - 1°  $x \in D(f) \implies -x \in D(f)$ ,
  - 2°  $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D(f)$ ,
9.  $f$  heißt auf  $D(f)$  **ungerade** gdw
  - 1°  $x \in D(f) \implies -x \in D(f)$ ,
  - 2°  $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D(f)$ ,
10.  $f_1 = f_2$  gdw
  - 1°  $D(f_1) = D(f_2)$ ,
  - 2°  $f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in D(f_1)$ .

**Beispiel 2.4** Sei

$$f_1 : f_1(x) = a \quad x \in D(f_1) = [-1, 1] \qquad f_2 : f_2(x) = a \quad x \in D(f_2) = [0, 5].$$

Dann ist  $f_1 \neq f_2$ .

**Definition 2.5** Sei  $y = f(x) \quad x \in D(f)$  eine **Funktion**, d.h., sie ordnet **jedem** Element  $x \in D(f) = X$  **genau** ein Element  $y \in W(f) \subseteq Y$  zu. Gilt auch die Umkehrung, d.h., gehört zu **jedem** Element  $y \in W(f)$  **genau** ein Element  $x \in X$ , so heißt die **Abbildung**

$$f : D(f) \rightarrow W(f)$$

**eindeutig** und die **Funktion**  $f$  besitzt eine **Umkehrfunktion**, die mit  $f^{-1}$  bezeichnet wird.

## Berechnung der Umkehrfunktion

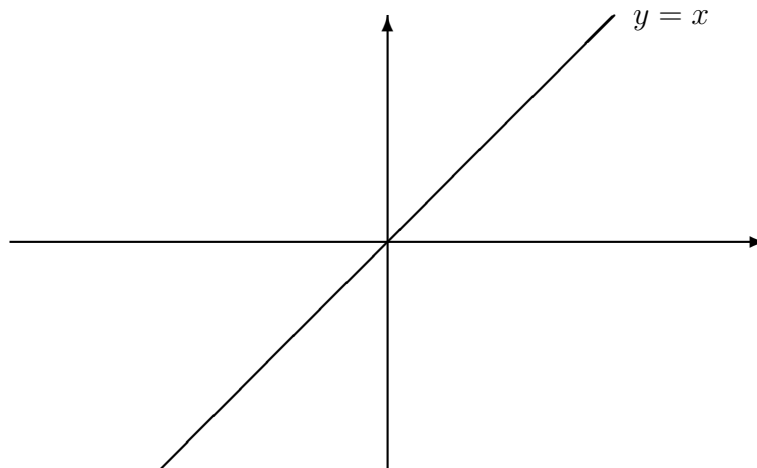
1° Man löst die vorgegebene Funktionsgleichung  $y = f(x)$  nach der **unabhängigen Variablen**  $x$  auf (diese Auflösung muss **eindeutig** möglich sein). Die so erhaltene Funktion  $x = f^{-1}(y)$  ist die **Umkehrfunktion** von  $y = f(x)$ .

2° Durch formales Vertauschen der beiden Variablen in der Gleichung  $x = f^{-1}(y)$  erhält man  $y = f^{-1}(x)$ .

Z.B. gilt für eine **streng monoton wachsende** Funktion  $f$  mit  $D(f) = [a, b]$   $a < b$ :

analyt. D.	Definitionsbereich	Wertebereich
$y = f(x)$	$D(f) = \{x \in \mathbb{R}   a \leq x \leq b\}$	$W(f) = \{y \in \mathbb{R}   f(a) \leq y \leq f(b)\}$
$x = f^{-1}(y)$	$D(f^{-1}) = W(f)$	$W(f^{-1}) = D(f)$
$y = f^{-1}(x)$	$D^*(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R}   f(a) \leq x \leq f(b)\}$	$W^*(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R}   a \leq y \leq b\}$

Die Funktionen  $y = f(x)$  und  $x = f^{-1}(y)$  besitzen denselben Graphen. Der Graph von  $y = f^{-1}(x)$  stellt eine Spiegelung des Graphen von  $x = f^{-1}(y)$  an der Geraden  $y = x$  dar. Dabei geht  $D(f) = W(f^{-1})$  in  $W^*(f^{-1})$  und  $W(f) = D^*(f^{-1})$  über.



### Beispiel 2.5 (Existenz einer Umkehrfunktion)

(1)  $y = f(x) = x^2$   $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $W(f) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y < \infty\} = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$ ,  
 $f$  ist nicht **eindeutig**, es existiert **keine Umkehrfunktion**.

(2)  $y = f_1(x) = x^2$   $D(f_1) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ ,  $W(f_1) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$ ,  
 $f_1$  ist **eindeutig**, es existiert **eine Umkehrfunktion**

$$y = f_1^{-1}(x) = +\sqrt{x} \quad D^*(f_1^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}, \quad W^*(f_1^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\},$$

(3)  $y = f_2(x) = x^2$   $D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ ,  $W(f_2) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$ ,  
 $f_2$  ist **eindeutig**, es existiert **eine Umkehrfunktion**

$$y = f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x} \quad D^*(f_2^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}, \quad W^*(f_2^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} | y \leq 0\}.$$

$$(4) \quad y = f(x) = x^3 \quad D(f) = \mathbb{R}, \quad W(f) = \mathbb{R},$$

$f$  ist **eindeutig**, es existiert eine **Umkehrfunktion**

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{für } x \geq 0 \\ -(-x)^{1/3} & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad D^*(f^{-1}) = \mathbb{R}, \quad W^*(f^{-1}) = \mathbb{R}.$$

In diesem Fall ist die Funktion  $f$  und auch ihre **Umkehrfunktion**  $f^{-1}$  **streng monoton wachsend**.

**Theorem 2.1** Jede **streng monotone** Funktion  $f$  einer reellen Variablen besitzt eine **Umkehrfunktion**  $f^{-1}$ , die ebenfalls **streng monoton** ist. Ist  $f$  **streng monoton wachsend** (**fallend**), so ist auch  $f^{-1}$  **streng monoton wachsend** (**fallend**).

**Definition 2.6** Es seien  $x = g(t) \quad t \in D(g)$  und  $y = f(x) \quad x \in D(f)$  Funktionen, die der Eigenschaft  $W(g) \subseteq D(f)$  genügen. Dann heißt

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) := h(t) \quad t \in D(g) \quad (f \circ g \text{ wird gelesen } f \text{ von } g)$$

**mittelbare (verkettete) Funktion.**

**Beispiel 2.6 (Mittelbare Funktionen)**

$$(1) \quad x = g(t) = \sqrt{3+2t} \quad D(g) = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t \geq -\frac{3}{2} \right\}, \quad W(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},$$

$$y = f(x) = \cos x \quad D(f) = \mathbb{R}_x, \quad W(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}.$$

Es gilt:  $W(g) \subset D(f)$ .

Eine **mittelbare Funktion**  $f(g(t))$  existiert und hat die Gestalt:

$$y = \cos(\sqrt{3+2t}) = f(g(t)) \quad t \in D(g).$$

(2) Die Bedingung  $W(g) \subseteq D(f)$  ist wesentlich:

$$x = g(t) = \sin t \quad D(g) = \mathbb{R}_t, \quad W(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\},$$

$$y = f(x) = \ln x \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \quad W(f) = \mathbb{R}_y.$$

Es gilt:  $W(g) \not\subseteq D(f)$ .

Eine **mittelbare Funktion**  $f(g(t))$  ist nicht erklärt. Abhilfe: Bildung einer Ersatzfunktion

$$x = g_1(t) = \sin t \quad \text{mit } D(g_1) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < t < \pi\} \subset D(g). \quad \text{Für den Wertebereich gilt nun } W(g_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}.$$

Somit ist wegen  $W(g_1) \subset D(f)$  eine **mittelbare Funktion**  $f(g_1(t))$  korrekt erklärt. Sie hat die Gestalt:  $y = f(g_1(t)) = h_1(t) = \ln \sin t \quad t \in D(g_1)$ .

Die im Weiteren behandelten Klassen der **rationalen** und der **nichtrationalen Funktionen** sowie ihre Verkettungen nennt man **elementare Funktionen**. Alle anderen Funktionen heißen **nichtelementare Funktionen**.

**Beispiel 2.7 (Nichtelementare Funktionen)**

$$(1) y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad D(f) = \mathbb{R}$$

$$(2) y = \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ rational} \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational} \end{cases} \quad D(\chi) = [0, 1], \quad W(\chi) = \{0, 1\}$$

Die Funktion  $\chi(x)$  heißt *Dirichlet-Funktion*. Sie ist grafisch nicht darstellbar.

(3) Für die so genannten *Besselfunktionen* ist eine analytische Darstellung durch eine Formel nur in Spezialfällen möglich.

## 2.3 Rationale Funktionen

### 2.3.1 Ganze rationale Funktionen

#### Definition 2.7 (Ganze rationale Funktion, Nullstellen)

1. Eine Funktion der Gestalt

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad D(p_n) = \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

heißt **ganze rationale Funktion** oder **Polynom**.

Die reellen Zahlen  $a_n (\neq 0), a_{n-1}, \dots, a_0$  heißen **Koeffizienten**, die Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  heißt der **Grad** des **Polynoms**.

2. Gilt  $p_n(x_0) = 0$  für eine **reelle** oder **komplexe Zahl**  $x_0$ , so heißt  $x_0$  **Nullstelle (NS)** oder **Wurzel** des **Polynoms**  $p_n(x)$ . Gilt  $x_0 \in \mathbb{R}$ , so ist  $x_0 \in D(p_n)$ .

#### Beispiel 2.8 (Ganze rationale Funktionen)

(1)  $n = 0$ ,  $y = p_0(x) = a_0$  - konstante Funktion

(2)  $n = 1$ ,  $y = p_1(x) = a_1 x + a_0$  - lineare Funktion

(3)  $n = 2$ ,  $y = p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  - quadratische Funktion

(4)  $n = 3$ ,  $y = p_3(x) = a_3 x^3 + \dots + a_0$  - Polynom 3. Grades

(5)  $n = 4$ ,  $y = p_4(x) = a_4 x^4 + \dots + a_0$  - Polynom 4. Grades

Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**. Für  $a_2 > 0$  ist diese nach oben geöffnet, für  $a_2 < 0$  nach unten. Der **Scheitel** der **Parabel** besitzt die Koordinaten

$$(x_s, p_2(x_s)) = \left( -\frac{a_1}{2a_2}, a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} \right).$$

**Theorem 2.2 (Fundamentalsatz der Algebra)** Jedes **Polynom**  $p_n(x)$  mit **komplexen Koeffizienten** lässt sich als Produkt von  $n$  **Linearfaktoren** in der Form

$$p_n(x) = a_n (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (2.3)$$

darstellen, wobei die  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) *i. Allg. komplexe Zahlen* sind, d.h. ein **Polynom**  $n$ -ten Grades kann höchstens  $n$  verschiedene **NS** besitzen.

## Eigenschaften von NS für Polynome mit reellen Koeffizienten

1° Besitzt ein **Polynom mit reellen Koeffizienten** eine **komplexe NS** der Gestalt  $x_1 = a + ib$ , so ist auch  $\bar{x}_1 = a - ib$  **NS** dieses **Polynoms**. Dann ist

$$(x - x_1)(x - \bar{x}_1) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = x^2 + px + q \quad \text{mit} \quad p = -2a, q = a^2 + b^2.$$

2° Jedes **Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten** besitzt mindestens eine **reelle NS**.

**Definition 2.8** Ist das **Polynom**  $p_n(x)$  vom **Grade**  $n$  in der Form

$$p_n(x) = (x - x_0)^k p_{n-k}(x)$$

darstellbar, wobei  $p_{n-k}(x_0) \neq 0$  ist und  $p_{n-k}$  den **Grad**  $n - k$  besitzt, so heißt  $x_0$   **$k$ -fache NS** (**NS der Vielfachheit**  $k$ ) von  $p_n(x)$ .

**Beispiel 2.9** (**NS von Polynomen**)

(1)  $p_3(x) = x^3 + x^2 - x - 1$      $x_0 = 1$  ist **einfache NS**,  $x_1 = -1$  ist **zweifache NS**,  
 $p_3(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2$

(2)  $p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1$      $x_0 = 1$  ist **einfache NS**,  
 $p_3(x) = (x - 1)(x + i)(x - i) = (x - 1)(x^2 + 1)$

**Darstellung von (2.2) durch ausschließlich reelle Terme:**

$$p_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_s)^{k_s} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_rx + q_r)^{l_r} \quad (2.4)$$

Dabei besitzen die Polynome  $x^2 + p_i x + q_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) keine reellen **NS**, d.h.  $p_i^2 - 4q_i < 0$  und es gilt:  $\sum_{i=1}^s k_i + 2 \sum_{j=1}^r l_j = n$ .

**NS von Polynomen** höheren Grades berechnet man mit dem Taschenrechner.

### 2.3.2 Gebrochen rationale Funktionen

**Definition 2.9** (**Gebrochen rationale Funktion, Pol**)

1. Der **Quotient zweier ganzer rationaler Zahlen**, in welchem **Zähler- und Nennerpolynom teilerfremd** sind, (d.h. die **Polynome besitzen keine gemeinsamen NS**), heißt **gebrochen rationale Funktion**.

$$f(x) = \frac{p_m(x)}{p_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0} \quad (2.5)$$

mit  $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid p_n(x) \neq 0\}$  und  $a_i, b_j \in \mathbb{R}$  ( $i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, m$ ).

2. Eine **gebrochen rationale Funktion**  $f(x)$  heißt **echt (unecht gebrochen)**, wenn  $m < n$  ( $m \geq n$ ) ist. Die Zahl  $\max(m, n)$  heißt **Grad** von  $f(x)$ .



3. Besitzt  $p_n(x)$  an der Stelle  $x_0$  eine **reelle NS der Vielfachheit  $k$** , so heißt  $x_0$  ein **Pol  $k$ -ter Ordnung der gebrochen rationalen Funktion  $f(x)$** .

### Beispiel 2.10 (Gebrochen rationale Funktionen)

$$(1) \tilde{f}(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \quad D(\tilde{f}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}.$$

Besitzen Zähler- und Nennerpolynom **gemeinsame NS**, so werden sie durch **teilerfremde Polynome** ersetzt:

$$f(x) = \frac{(x-1)}{(x+2)} \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}.$$

$$(2) f(x) = x^{-n} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = x^{-2m} \quad m \in \mathbb{N} \text{ ist eine } \mathbf{gerade} \text{ Funktion,}$$

$$f(x) = x^{-(2m+1)} \quad m \in \mathbb{N}_0 \text{ ist eine } \mathbf{ungerade} \text{ Funktion.}$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad D(f) = \mathbb{R}.$$

Die Funktion  $f(x)$  ist beschränkt mit  $c = 1$ .

$$(4) t = f(x) = \frac{1}{k_3} \frac{x(2a-x)}{2a^2(a-x)^2} \quad D(f) = \{x \mid x \neq a\} \text{ beschreibt eine Reaktion 3. Ordnung (trimolekular). Dabei bezeichnet } a \text{ die Anfangskonzentration, } x \text{ die Konzentration des entstehenden Stoffes zur Zeit } t \text{ und } k_3 \text{ die Geschwindigkeitskonstante der Reaktion.}$$

### Eigenschaften gebrochen rationaler Funktionen

- 1° Jede **unecht gebrochene rationale Funktion** lässt sich mittels Partialdivision in eine Summe, bestehend aus einem **Polynom** und einem **echt gebrochenen rationalen** Anteil, zerlegen:

$$f(x) = p_{m-n}(x) + \frac{q(x)}{p_n(x)} \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid p_n(x) \neq 0\},$$

wobei  $p_{m-n}(x)$  ( $q(x)$ ) ein **Polynom  $(m-n)$ -ten (höchstens  $(n-1)$ -ten Grades)** ist.

- 2° Jede **echt gebrochene rationale Funktion**  $q(x)[p_n(x)]^{-1}$  deren Nennerpolynom die Darstellung (2.4) besitzt, lässt sich **eindeutig** als Summe von Partialbrüchen darstellen. Dabei entspricht einem Faktor der Gestalt

$$(x - x_i)^{k_i} \quad (i = 1, \dots, s)$$

im Nennerpolynom (2.4) eine Summe der Form

$$\frac{A_{i1}}{(x - x_i)} + \frac{A_{i2}}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x - x_i)^{k_i}}$$

und einem Term der Gestalt

$$(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j} \quad (j = 1, \dots, r)$$

im Nennerpolynom (2.4) ein Anteil der Form

$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{(x^2 + p_j x + q_j)} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \dots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}}$$

in der Partialbruchzerlegung. Man erhält also

$$\begin{aligned} \frac{q(x)}{p_n(x)} = & \frac{1}{a_n} \left[ \frac{A_{11}}{(x - x_1)} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \right. \\ & \frac{A_{21}}{(x - x_2)} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots + \\ & \frac{A_{s1}}{(x - x_s)} + \frac{A_{s2}}{(x - x_s)^2} + \dots + \frac{A_{sk_s}}{(x - x_s)^{k_s}} + \\ & \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \\ & \frac{B_{21}x + C_{21}}{(x^2 + p_2x + q_2)} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{B_{2l_2}x + C_{2l_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}} + \dots + \\ & \left. \frac{B_{r1}x + C_{r1}}{(x^2 + p_r x + q_r)} + \frac{B_{r2}x + C_{r2}}{(x^2 + p_r x + q_r)^2} + \dots + \frac{B_{rl_r}x + C_{rl_r}}{(x^2 + p_r x + q_r)^{l_r}} \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dabei sind  $A_{11}, \dots, B_{11}, \dots, C_{11}, \dots$  **eindeutig** bestimmte reelle Zahlen.

**Beispiel 2.11**  $f(x) = \frac{2x - 1}{(x - 1)(x + 2)^2}$

Das Nennerpolynom besitzt nur **reelle NS** (in  $x_1 = 1$  eine **einfache** und in  $x_2 = -2$  eine **zweifache**). Folglich lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x - 1}{(x - 1)(x + 2)^2} = \frac{A_1}{(x - 1)} + \frac{A_2}{(x + 2)} + \frac{A_3}{(x + 2)^2}.$$

Multiplikation mit  $(x - 1)(x + 2)^2$  liefert eine Gleichung, mit Hilfe derer die Koeffizienten  $A_1, A_2, A_3$  eindeutig bestimmt werden können.

$$2x - 1 = A_1(x + 2)^2 + A_2(x - 1)(x + 2) + A_3(x - 1). \quad (2.7)$$

Für die Koeffizientenbestimmung gibt es verschiedene Methoden.

(1) Methode des Koeffizientenvergleichs

Die Terme in der linken und in der rechten Seite von (2.7) werden nach gleichen Potenzen von  $x$  geordnet. Man erhält aus (2.7) mit

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= A_1x^2 + 4A_1x + 4A_1 + A_2x^2 + A_2x - 2A_2 + A_3x - A_3 \\ 2x - 1 &= (A_1 + A_2)x^2 + (4A_1 + A_2 + A_3)x + (4A_1 - 2A_2 - A_3) \end{aligned}$$

ein **lineares Gleichungssystem** bezüglich der Unbekannten  $A_1, A_2, A_3$ :

$$\begin{array}{lclcl} x^0 & 4A_1 & - & 2A_2 & - & A_3 & = & -1 & & A_1 & = & 1/9 \\ x^1 & 4A_1 & + & A_2 & + & A_3 & = & 2 & & A_2 & = & -1/9 \\ x^2 & A_1 & + & A_2 & & & = & 0 & & A_3 & = & 5/3 \end{array}$$

(2) Einsetzen spezieller Werte in (2.7)

Man wählt die Werte für  $x$  derart, dass der Rechenaufwand gering wird.

$$\begin{array}{rclcl} x = 0 & 4A_1 - 2A_2 - A_3 = -1 & A_1 = 1/9 \\ x = 1 & 9A_1 = 1 & A_2 = -1/9 \\ x = -2 & -3A_3 = -5 & A_3 = 5/3 \end{array}$$

**Definition 2.10** Asymptoten einer gebrochen rationalen Funktion  $f(x)$  heißen

1. die zur  $y$ -Achse parallelen Geraden  $x = x_i$ , wenn  $x_i$  reelle NS des Nennerpolynoms  $p_n(x)$  sind,
2. Kurven, denen sich der Graph von  $f(x)$  bei immer größer werdender Entfernung vom Koordinatenursprung unbegrenzt nähert, speziell
  - die zur  $x$ -Achse parallele Gerade  $y = \frac{b_m}{a_n}$ , falls  $m = n$  gilt,
  - der Graph des **Polynoms**  $p_{m-n}(x)$ , falls  $m > n$  gilt,
  - die  $x$ -Achse, falls  $m < n$  gilt.

**Beispiel 2.12** (Asymptotenbestimmung)

$$(1) f(x) = \frac{b_1x + b_0}{a_1x + a_0} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{a_0}{a_1} \right\}$$

Diese Funktion heißt auch **gebrochen lineare Funktion**.

Ihre **Asymptoten** sind  $x = -\frac{a_0}{a_1}$  und  $y = \frac{b_1}{a_1}$ .

$$(2) f(x) = \frac{9x^3 - 6x^2 - 2x + 2}{3x + 2} = 3x^2 - 4x + 2 - \frac{2}{3x + 2} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

Die Gerade  $x = -\frac{2}{3}$  und das Polynom  $p_2(x) = 3x^2 - 4x + 2$  sind **Asymptoten**.

$$(3) f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad D(f) = \mathbb{R} \quad \text{Die } x\text{-Achse ist Asymptote.}$$

## 2.4 Nichtrationale Funktionen

### 2.4.1 Wurzelfunktionen

Potenzfunktionen der Gestalt  $f(x) = x^r$  sind in folgenden Fällen definiert:

	Basis	Exponent	Funktion
1°	$x \in \mathbb{R}$	$r \in \mathbb{N}_0$	ganze rationale Funktion (Polynom)
2°	$x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0$	$r = -n, n \in \mathbb{N}$	gebrochen rationale Funktion
3°	$x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0$	$r \in \mathbb{Q} \wedge r \geq 0$	nichtrationale Funktion (Wurzelfunktion)
4°	$x \in \mathbb{R} \wedge x > 0$	$r \in \mathbb{Q}$	nichtrationale Funktion (Wurzelfunktion)
5°	$x \in \mathbb{R} \wedge x > 0$	$r \in \mathbb{R}$	transzendente Funktion

### Beispiel 2.13 (Nichtrationale Funktionen)

$$(1) f_1(x) = x^{-1/2} \quad D(f_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$f_1^{-1}(x) = x^{-2} \quad D^*(f_1^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

Die Funktion  $f_1(x)$  ist vom Typ  $4^\circ$ , ihre Umkehrfunktion  $f_1^{-1}(x)$  vom Typ  $2^\circ$ .

$$(2) f_2(x) = x^{3/2} \quad D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$f_2^{-1}(x) = x^{2/3} \quad D^*(f_2^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

Die Funktion  $f_2(x)$  ist vom Typ  $3^\circ$ , ihre Umkehrfunktion  $f_2^{-1}(x)$  ebenfalls.

Die Funktion  $y = f(x) = x^{3/2}$  heißt **semikubische** oder **Neil'sche Parabel**.

$$(3) f_3(x) = -x^{3/2} \quad D(f_3) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$f_3^{-1}(x) = (-x^{2/3}) \quad D^*(f_3^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

Die Funktion  $f_3(x)$  ist vom Typ  $3^\circ$ , ihre Umkehrfunktion  $f_3^{-1}(x)$  ebenfalls.

$$(4) f_4(x) = x^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \ln x) = e^{\sqrt{2} \ln x} \quad D(f_4) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$f_4^{-1}(x) = x^{1/\sqrt{2}} \quad D^*(f_4^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

Die Funktion  $f_4(x)$  ist vom Typ  $5^\circ$ , ihre Umkehrfunktion  $f_4^{-1}(x)$  ebenfalls.

### 2.4.2 Transzendente Funktionen

#### • Exponential- und Logarithmusfunktionen

**Definition 2.11** Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0 \wedge a \neq 1$ . Dann heißt

$$f(x) = a^x \quad D(f) = \mathbb{R}_x \quad (f^{-1}(x) = \log_a x \quad D^*(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\})$$

**Exponentialfunktion** mit der Basis  $a$  (**Logarithmusfunktion** zur Basis  $a$ ).

Alle Funktionen der Form

$$y = a^x \quad (y = \log_a x) \quad (a \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad a > 0 \wedge a \neq 1)$$

schneiden sich im Punkt  $(0, 1)$   $((1, 0))$  der Ebene. Weiter gilt:

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1 \quad (2.8)$$

Die **Logarithmusfunktionen** sind die **Umkehrfunktionen** zu den **Exponentialfunktionen**.

#### Rechenregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$1^\circ a^x a^y = a^{x+y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$2^\circ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$3^\circ (a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$$4^\circ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \forall \text{ positive } x, y \in \mathbb{R},$$

- 5°  $\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad \forall \text{ positive } x, y \in \mathbb{R},$   
 6°  $\log_a x^p = p \log_a x \quad \forall \text{ positive } x, y \in \mathbb{R} \wedge \forall p \in \mathbb{R},$   
 7°  $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$

Diese Beziehung heißt Kettenregel für Logarithmen und liefert einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Logarithmensystemen. Dabei heißt der Umrechnungsfaktor  $\log_a b$  **Modul** des Logarithmensystems zur Basis  $a$ .

### Wichtige Logarithmensysteme

Basis	Exponentialf.	Logarithmusf.	Bezeichnung des Logarithmus
$a = e$	$y = e^x$	$y = \log_e x = \ln x$	natürlicher Logarithmus
$a = 10$	$y = 10^x$	$y = \log_{10} x = \lg x$	dekadischer Logarithmus
$a = 2$	$y = 2^x$	$y = \log_2 x = \text{ld } x$	dyadischer Logarithmus

Die Zahl  $e$ , die so genannte **Eulersche Zahl**, ist durch folgenden Grenzwert definiert:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2.71828 \dots$$

### Beispiel 2.14 (Exponential- und Logarithmusfunktionen)

- (1) Für welche  $x$  gilt  $\log_x \left( \frac{1}{49} \right) = -4$ ? Lösung:  $x = \sqrt{7}$ .  
 (2) Beim natürlichen radioaktiven Zerfall einer Substanz nimmt die Zahl  $N(t)$  der Atomkerne nach dem Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad t \in [0, +\infty[$$

exponentiell mit der Zeit  $t$  ab. Dabei ist  $N_0$  die Anzahl der bei Zerfallsbeginn (bei  $t = 0$ ) vorhandenen Atomkerne. Die Konstante  $\lambda > 0$  heißt Zerfallskonstante und charakterisiert die Geschwindigkeit, mit der der Zerfallsprozess abläuft. Die Halbwertszeit  $t_H$  berechnet man aus der Forderung  $N(t_H) = N_0/2$ . Man erhält  $t_H = \ln 2/\lambda$ .

- (3) Für die Absorption von monochromatischen Röntgenstrahlen gilt

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x}.$$

Dabei ist  $I_0$  die Anfangsintensität der Strahlung (bei  $x = 0$ ) und  $I(x)$  die nach Durchstrahlung der Schichtdicke  $x$  noch vorhandene Intensität. Die Konstante  $\mu > 0$  heißt Absorptionskoeffizient des Materials, welches durchstrahlt wird. Die Halbwertsdicke  $d$  berechnet man aus der Forderung  $I(d) = I_0/2$ . Man erhält  $d = \ln 2/\mu$ .

- (4) Bei der Rohrzuckerinversion, die ein Beispiel für eine **chemische Reaktion 1. Ordnung** liefert, seien zum Zeitpunkt  $t = 0$   $a$  Rohrzuckermoleküle vorhanden. Die als Umsatzvariable bezeichnete Größe  $x = x(t)$  gibt an, wieviele Moleküle nach Ablauf der Zeit  $t$  durch die Reaktion umgewandelt worden sind. Bei der Rohrzuckerinversion lautet die Umsatzvariable

$$x(t) = a(1 - e^{-kt}),$$

wobei  $k$  die Geschwindigkeitskonstante der Reaktion ist.

- (5) Die Wechselwirkung in einem **diatomaren Molekül** wird oft in guter Näherung durch das sogenannte **Morse-Potenzial** beschrieben:

$$V(r) = D [1 - \exp(-a(r - r_0))]^2.$$

Dabei bezeichnet  $D > 0$  die Dissoziationsenergie,  $r_0 > 0$  den Gleichgewichtsabstand im Molekül,  $r > 0$  den Abstand der beiden Bindungspartner und  $a > 0$  einen Parameter.

- (6) In der Theoretischen Chemie, in der Fehlerechnung, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik ist die Gauß-Funktion (Gaußsche Normalverteilung, Glockenkurve) von besonderer Bedeutung. Sie gibt die statistische Verteilung der Messwerte (bzw. Messfehler) an und hat die Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in ]-\infty, +\infty[.$$

Dabei bezeichnet  $x_0$  den wahren Wert der Messgröße  $X$  (in der Regel nicht bekannt),  $\sigma > 0$  die Standardabweichung und  $\sigma^2$  die Varianz. Standardabweichung bzw. Varianz geben ein Maß für die Streuung der Messwerte  $x$  um den wahren Wert  $x_0$  und damit auch ein Maß für die Breite der Gaußschen Normalverteilung an.

- (7) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen den dekadischen und den natürlichen Logarithmen her.

Lösung: Man setzt in 7°  $a = 10$  und  $b = e$ . Dann ist

$$\log_{10} x = \log_{10} e \cdot \log_e x \quad \text{oder} \quad \lg x = \lg e \cdot \ln x.$$

Der Modul der dekadischen Logarithmen hat den Wert  $\lg e$ .

## • Trigonometrische und Arkusfunktionen

Wir betrachten drei **trigonometrische Funktionen**

- $f_1(x) = \sin x \quad D(f_1) = \mathbb{R}_x,$   
 $W(f_1) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\},$   
Menge der **NS**:  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\},$
- $f_2(x) = \cos x \quad D(f_2) = \mathbb{R}_x,$   
 $W(f_2) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\},$   
Menge der **NS**:  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\},$
- $f_3(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad D(f_3) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\},$   
 $W(f_3) = \mathbb{R}_y,$   
Menge der **NS**:  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\},$   
Menge der **Pole**:  $\{x \in \mathbb{R} \mid x = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$

## Reziproke Funktionen zu den trigonometrischen Funktionen

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ (Sekans)}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x} \text{ (Kosekans)}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} \text{ (Kotangens)}.$$

Für die Funktionen  $f_1, f_2, f_3$  existieren in Intervallen, in denen sie **streng monoton** sind, **Umkehrfunktionen**.

$$1. \quad g_1(x) = \sin x \quad D(g_1) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\},$$

$$W(g_1) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\},$$

$$g_1^{-1}(x) = \arcsin x \quad D^*(g_1^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\},$$

$$W^*(g_1^{-1}) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\},$$

$$2. \quad g_2(x) = \cos x \quad D(g_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \pi\},$$

$$W(g_2) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\},$$

$$g_2^{-1}(x) = \arccos x \quad D^*(g_2^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\},$$

$$W^*(g_2^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq \pi\},$$

$$3. \quad g_3(x) = \tan x \quad D(g_3) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\},$$

$$W(g_3) = \mathbb{R}_y,$$

$$g_3^{-1}(x) = \arctan x \quad D^*(g_3^{-1}) = \mathbb{R}_x,$$

$$W^*(g_3^{-1}) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Betrachtet man ein anderes Monotonie-Intervall für die Funktionen  $f_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), so erhält man einen anderen **Wertebereich** für die **Umkehrfunktionen**. Die oben angegebenen **Wertebereiche** für  $g_i^{-1}(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) heißen **Hauptwertebereiche** dieser Funktionen. Ein Wert aus dem **Hauptwertebereich** heißt **Hauptwert** der entsprechenden **Umkehrfunktionen**  $g_i^{-1}(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). **Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen**, definiert auf Monotonie-Intervallen, heißen **Arkusfunktionen** oder **zyklometrische Funktionen**.

### Eigenschaften trigonometrischer Funktionen

1° Für  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  gilt:  $\sin x < x < \tan x$ .

#### 2° Additionstheoreme

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (2.9)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (2.10)$$

3°  $f_1(x) = \sin x$  ist eine **ungerade** Funktion, d.h. es gilt  $\sin(-x) = -\sin x$ ,

$f_2(x) = \cos x$  ist eine **gerade** Funktion, d.h. es gilt  $\cos(-x) = \cos x$ ,

$f_3(x) = \tan x$  ist eine **ungerade** Funktion, d.h. es gilt

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

4° Die Funktionen  $f_1(x) = \sin x$  und  $f_2(x) = \cos x$  sind  $2\pi$ -periodisch, während die Funktion  $f_3(x) = \tan x$   $\pi$ -periodisch ist.

*Beweis:* Wir setzen in (2.9)  $y = 2\pi$ . Dann ist

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi = \sin x.$$

Analog setzen wir in (2.10)  $y = 2\pi$ . Dann ist

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \cos 2\pi - \sin x \sin 2\pi = \cos x.$$

Außerdem gilt:

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi}{\cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

**Folgerungen** aus (2.9) und (2.10):

- 1° Ersetzen in (2.9)  $y$  durch  $-y$ :  $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ ,
- 2° Ersetzen in (2.10)  $y$  durch  $-y$ :  $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ ,
- 3° Setzen in (2.9)  $x = y$ :  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ ,
- 4° Setzen in (2.10)  $x = y$ :  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ ,
- 5° Setzen in (2.10)  $y = -x$ :  $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ . Diese Beziehung heißt auch trigonometrischer Pythagoras.

Die **trigonometrischen Funktionen** bilden die Grundlage zur Beschreibung von periodischen Vorgängen (Schwingungsprozessen).

**Beispiel 2.15** *In der Physikalischen Chemie werden auch harmonische Schwingungen betrachtet. Eine Schwingung heißt harmonisch, wenn die den Körper in die Ruhelage zurücktreibende Kraft  $F$  proportional der Auslenkung  $y$  ist. Solche Schwingungen sind darstellbar durch*

$$y = f(x) = a \sin(b(x+c)) + d = a \sin(bx + \varphi) + d \quad \text{mit dem Phasenwinkel } \varphi = bc.$$

Die Amplitude  $a$  gibt an, um wieviel die Funktionswerte von  $f$  im Vergleich zur Sinusfunktion vergrößert ( $|a| > 1$ ) bzw. verkleinert ( $|a| < 1$ ) worden sind.

Die Kreisfrequenz  $b$  liefert die Anzahl der Schwingungen in  $2\pi$  Zeiteinheiten.

Die Phasenverschiebung  $\frac{\varphi}{b} = c$  zeigt an, um wieviel der Graph der Funktion  $f(x)$  gegenüber dem Graphen von  $\sin(bx)$  verschoben ist und zwar nach links, wenn  $c$  positiv und nach rechts, wenn  $c$  negativ ist.

Die Verschiebung  $d$  längs der  $y$ -Achse gibt an, um wieviel der Graph der Funktion  $y = a \sin(b(x+c))$  nach oben, falls  $d > 0$ , bzw. nach unten, falls  $d < 0$ , verschoben worden ist.

## • Hyperbolische und Areafunktionen

Wir betrachten drei **hyperbolische Funktionen**

1.  $f_1(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $D(f_1) = \mathbb{R}_x$ ,  $W(f_1) = \mathbb{R}_y$ ,
2.  $f_2(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $D(f_2) = \mathbb{R}_x$ ,  $W(f_2) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$ ,
3.  $f_3(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$   $D(f_3) = \mathbb{R}_x$ ,  $W(f_3) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 < y < 1\}$ .



Die Funktionen  $f_1(x)$  und  $f_3(x)$  sind **streng monoton** auf dem maximal möglichen Definitionsbereich und besitzen folglich eine **streng monotone Umkehrfunktion**. Für die Funktion  $f_2(x)$  sind zwei Monotonie-Intervalle zu unterscheiden.

$$1. f_1^{-1}(x) = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad D^*(f_1^{-1}) = \mathbb{R}_x, \\ W^*(f_1^{-1}) = \mathbb{R}_y,$$

2. Für die Funktion  $f_2(x) = \cosh x$  betrachten wir Einschränkungen auf ein Monotonie-Intervall

$$\tilde{g}_2(x) = \cosh x, \quad D(\tilde{g}_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad W(\tilde{g}_2) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}.$$

Dann existiert eine **Umkehrfunktion**

$$\tilde{g}_2^{-1} = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad D^*(\tilde{g}_2^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}, \\ W^*(\tilde{g}_2^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}.$$

Analog erhält man für

$$\tilde{\tilde{g}}_2(x) = \cosh x, \quad D(\tilde{\tilde{g}}_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}, \quad W(\tilde{\tilde{g}}_2) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$$

die **Umkehrfunktion**

$$\tilde{\tilde{g}}_2^{-1} = \operatorname{arcosh} x = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad D^*(\tilde{\tilde{g}}_2^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}, \\ W^*(\tilde{\tilde{g}}_2^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}.$$

$$3. f_3^{-1}(x) = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad D^*(f_3^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}, \\ W^*(f_3^{-1}) = \mathbb{R}_y.$$

**Umkehrfunktionen hyperbolischer Funktionen**, definiert auf Monotonie-Intervallen, heißen **Areafunktionen**.

### Eigenschaften hyperbolischer Funktionen

1° Für  $x > 0$  gilt:  $\tanh x < x < \sinh x$ .

2° **Additionstheoreme**

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad (2.11)$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad (2.12)$$

3°  $f_1(x) = \sinh x$  ist eine **ungerade** Funktion, d.h. es gilt

$$\sinh(-x) = \frac{e^{(-x)} - e^{-(-x)}}{2} = -\sinh x,$$

$f_2(x) = \cosh x$  ist eine **gerade** Funktion, d.h. es gilt

$$\cosh(-x) = \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} = \cosh x,$$

$f_3(x) = \tanh x$  ist eine **ungerade** Funktion, d.h. es gilt

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = -\frac{\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x.$$

**Folgerungen** aus (2.11) und (2.12):

- 1° Ersetzen in (2.11)  $y$  durch  $-y$ :  $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$ ,
- 2° Ersetzen in (2.12)  $y$  durch  $-y$ :  $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$ ,
- 3° Setzen in (2.11)  $x = y$ :  $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$ ,
- 4° Setzen in (2.12)  $x = y$ :  $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ ,
- 5° Setzen in (2.12)  $y = -x$ :  $1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$ .

Die **hyperbolischen Funktionen** bilden die Grundlage zur Beschreibung von monotonen Vorgängen (Erwärmungs- und Abkühlprozessen, Diffusionsprozessen und Wachstumsprozessen).

**Beispiel 2.16** Ein vollkommen biegsames, schweres, an zwei Punkten aufgehängtes Seil nimmt in der Gleichgewichtslage die Form der sogenannte **Kettenlinie**

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

an. Dabei ist  $a > 0$  der Parameter der **Kettenlinie** (je kleiner  $a$ , desto steiler verläuft die **Kettenlinie**). Der analytische Ausdruck einer nach oben oder unten verschobenen **Kettenlinie**

$$y = a \cosh \frac{x}{a} + b$$

wird für Berechnungen bei Hochspannungsleitungen verwendet (z.B. kann die Höhe über dem Erdboden für den tiefsten Punkt des Leitungsdrahtes zwischen zwei Masten berechnet werden).

## 2.5 Grenzwerte und Stetigkeit reeller Funktionen einer reellen Variablen

### 2.5.1 Zahlenfolgen (ZF)

**Definition 2.12** Für  $l \in \mathbb{N}_0$  setzen wir  $\mathbb{N}_l = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq l\}$ . Eine Vorschrift  $f$ , die jedem  $n \in \mathbb{N}_l$  in **eindeutiger** Weise eine **reelle** Zahl zuordnet, heißt **reelle ZF**. Die Zahlen  $a_n := f(n)$   $n \in \mathbb{N}_l$  heißen die **Glieder** der **ZF**. Ferner ist  $D(f) = \mathbb{N}_l$  und  $W(f) \subset \mathbb{R}$ .

$$\text{Bezeichnungen: } (a_n)_{n \in \mathbb{N}_l} \quad (a_n)_l^\infty \quad a_l, a_{l+1}, \dots, a_n, \dots$$

Die einzelnen Glieder einer **ZF** lassen sich also durchnummerieren. Die Zahl  $n$  stellt den Zählindex dar, d.h., sie gibt an, um das wievielte Glied der **ZF** es sich handelt. Von besonderem Interesse sind **ZF**, die in ihrem Aufbau eine Gesetzmäßigkeit aufweisen.

**Wichtige Vorschriften zur Vorgabe einer ZF**

1° Vorschrift in Form eines analytischen Ausdrucks:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (a_n)_0^\infty = ((-1)^n)_0^\infty \quad \text{alternierende Folge}$$

2° Vorschrift in Form einer Rekursionsformel:

Seien  $a_0, d \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann heißt  $a_{k+1} = a_k + d$  eine **arithmetische Folge**, d.h., die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder ist konstant.

Seien  $a_0, q \in \mathbb{R}$  ( $q \neq 0$ ) gegeben. Dann heißt  $a_{k+1} = a_k q$  eine **geometrische Folge**, d.h., der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist konstant.

Eine **reelle ZF** lässt sich in einer Koordinatenebene mit den Achsen  $n$  und  $a_n$  durch die Punktmenge  $\{(n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}_l\}$ , den Graphen der **ZF**  $(a_n)$ , veranschaulichen.

**Definition 2.13** Wir schreiben anstelle von  $\forall n \in \mathbb{N}_l$  kurz  $\forall n$ .

1. Eine **ZF**  $(a_n)$  heißt **konstant** oder **stationär**, gdw ein  $a \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $a_n = a \quad \forall n$ .
2. Eine **ZF**  $(a_n)$  heißt **beschränkt**, gdw ein  $c > 0$  existiert, so dass  $|a_n| \leq c \quad \forall n$ .

Geometrische Veranschaulichung der **Beschränktheit** einer **ZF**: Alle Punkte  $(n, a_n)$  liegen innerhalb oder auf dem Rand eines Streifens der Breite  $2c$ , parallel zur  $n$ -Achse, denn es gilt:

$$|a_n| \leq c \quad \forall n \iff -c \leq a_n \leq c \quad \forall n \iff a_n \in [-c, c].$$

**Definition 2.14** Eine **ZF**  $(a_n)$  heißt **Nullfolge** gdw zu **jedem** (noch so kleinem)  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \geq n_0(\varepsilon)$  die Ungleichung  $|a_n| < \varepsilon$  gilt.

$$\text{Bezeichnung: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

**Beispiel 2.17** Die **ZF**  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_1^\infty$  ist eine **NF**.

**Geometrische Veranschaulichung:** Für **jedes**  $\varepsilon > 0$  liegen stets unendlich viele **aufeinanderfolgende** Glieder dieser **ZF** innerhalb eines Streifen der Breite  $2\varepsilon$  parallel zur  $n$ -Achse.

**Eigenschaften von NF**

1°  $(a_n) \text{ NF} \implies (a_n) \text{ beschränkt}$ .

2°  $((a_n) \text{ NF} \wedge (b_n) \text{ beschränkt}) \implies (a_n \cdot b_n) \text{ NF}$ .

3°  $((b_n) \text{ NF} \wedge |a_n| \leq |b_n| \forall n) \implies (a_n) \text{ NF}$ .

4°  $((a_n) \text{ NF} \wedge (b_n) \text{ NF}) \implies (a_n \pm b_n) \text{ NF} \wedge (a_n \cdot b_n) \text{ NF}$ .

5° Der **Quotient** zweier **NF** ist i. Allg. **keine NF**. Z.B. ist der **Quotient** der **NF**  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_1^\infty$  und  $(b_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_1^\infty$  eine **konstante Folge** mit  $a = 1$ , denn  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_1^\infty = (1)_1^\infty$ .

**Definition 2.15** Eine **ZF**  $(a_n)$  heißt **konvergent** mit dem **eigentlichen (endlichen) Grenzwert (GW)**  $a$  gdw  $(a_n - a)$  eine **NF** ist.

Bezeichnung:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

**Beispiel 2.18** Die **ZF**  $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)_1^\infty$  ist eine **konvergente ZF** mit dem **GW**  $1$ , denn  $a_n - 1 = 1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$  und  $(a_n - 1) = \left(\frac{1}{n}\right)_1^\infty$  ist eine **NF**.

### Eigenschaften konvergenter ZF

1°  $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b) \implies a = b$ . Der **GW** einer **ZF** ist **eindeutig** bestimmt.

2°  $(a_n)$  **konvergent**  $\implies (a_n)$  **beschränkt**.

3°  $((a_n) \wedge (b_n)$  **konvergent**, d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b) \implies (a_n \pm b_n) \wedge (a_n \cdot b_n)$  **konvergent** und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n \pm b_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b \quad \text{sowie} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n \cdot b_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b.$$

4°  $((a_n) \wedge (b_n)$  **konvergent**  $\wedge (b_n)$  **keine NF**)  $\implies \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  **konvergent** und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_n}{b_n} \right] = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

5°  $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \wedge \exists m \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \forall n \geq m) \implies a \leq b$ .

6°  $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \wedge \exists m \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \geq m) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

### Definition 2.16 (Divergente ZF)

1. Jede **ZF**  $(a_n)$ , die **nicht konvergent** ist, heißt **divergent**.
2. Die **ZF**  $(a_n)$  heißt **bestimmt divergent** mit dem **uneigentlichen (unendlichen) Grenzwert (GW)**  $+\infty$  ( $-\infty$ ) gdw zu **jedem** (noch so großem)  $\omega > 0$  ein  $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \geq n_0(\omega)$  die Ungleichung  $a_n > \omega$  ( $a_n < -\omega$ ) gilt.

Bezeichnung:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$        $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty)$

3. Die **ZF** heißt **unbestimmt divergent** gdw  $(a_n)$  **divergent** und **nicht bestimmt divergent** ist, d.h. die **ZF** besitzt **keinen GW**.

### Beispiel 2.19 (Divergente ZF)

- (1) Die **ZF**  $(a_n) = (n)_0^\infty$  ist **nicht beschränkt**. Sie ist **bestimmt divergent** mit dem **uneigentlichen GW**  $+\infty$ , d.h. es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .
- (2) Die **ZF**  $(a_n) = ((-1)^n)_0^\infty$  ist **unbestimmt divergent**.

Unter der Voraussetzung, dass alle benötigten **GW** als **eigentliche GW** existieren, kann die Berechnung von **GW** mit Hilfe der **Eigenschaften** 3° und 4° für **konvergente ZF** auf bereits bekannte **GW** zurückgeführt werden.

### Beispiel 2.20 (Grenzwertberechnung)

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3}$

Wir setzen  $(d_n) = \left( \frac{2n-1}{3n+2} \right)_1^\infty = \left( \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)_n}{\left(3 + \frac{2}{n}\right)_n} \right)_1^\infty$ . Es ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3$ , d.h.  $(b_n)$  ist **keine NF**, also ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \frac{2}{3}$ .

(2)  $(a_n) = (b_n) = ((-1)^n)_0^\infty$

Beide **GW**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  existieren nicht, aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n \cdot b_n] = 1$ . Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n \cdot b_n] \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + b} - n) = \frac{a}{2}$

### 2.5.2 Grenzwerte von Funktionen

**Definition 2.17** Die Funktion  $y = f(x)$  sei wenigstens in  $]a, c[ \cup ]c, b[$  definiert. Wenn für jede Folge  $(x_n)$  mit den Eigenschaften

1°  $x_n \in ]a, c[ \cup ]c, b[ \quad \forall n,$

2°  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

die Folge  $(f(x_n))$  der zugehörigen Funktionswerte gegen **ein und denselben Wert**  $A \in \mathbb{R}$  konvergiert, dann heißt  $A$  der **GW** von  $f(x)$  für  $x \rightarrow c$ .

Bezeichnung:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$

**Definition 2.18** Ersetzt man die Bedingung 1° in Definition 2.17 durch die Bedingung

1°  $x_n \in ]a, c[ \quad \forall n \quad (1_r^\circ \quad x_n \in ]c, b[ \quad \forall n),$

d.h. es werden nur Folgen  $(x_n)$  mit  $x_n < c$  ( $x_n > c$ ) zugelassen, so spricht man von einem **linksseitigen (rechtsseitigen) GW**.

Bezeichnung: **linksseitiger GW**  $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = A_-$ ,  
**rechtsseitiger GW**  $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = A_+$

**Theorem 2.3** Die Funktion  $f(x)$  besitzt an der Stelle  $c$  den **GW**  $A$  gdw an der Stelle  $c$  der **linksseitige GW**  $A_-$  sowie der **rechtsseitige GW**  $A_+$  existieren und  $A_- = A_+$  gilt. Ist die letzte Bedingung erfüllt, so ist

$$A = A_- = A_+.$$

Die Definition 2.17 kann auf folgende Fälle erweitert werden:

a)  $A = -\infty, \quad A = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty,$   
b)  $c = -\infty, \quad c = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A,$   
c)  $c = \pm\infty, \quad A = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$

Analoge Überlegungen kann man für die einseitigen **GW** durchführen.

**Beispiel 2.21**  $f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(x_n^1) = \left( \frac{2}{\pi} \frac{1}{4n-1} \right)_1^\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{4n-1} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^1) = -1,$$

$$(x_n^2) = \left( \frac{2}{\pi} \frac{1}{4n+1} \right)_1^\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{4n+1} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^2) = +1,$$

Es gilt also:  $\lim_{x_n^1 \rightarrow 0+0} f(x_n^1) = -1$  und  $\lim_{x_n^2 \rightarrow 0+0} f(x_n^2) = +1$ . Folglich besitzt die Funktion  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  an der Stelle  $x = 0$  **keinen rechtsseitigen GW** und somit **keinen GW**.

**Beispiel 2.22 (GW von Funktionen)**

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{4x-5} = \frac{3}{4}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{4}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \text{ existiert nicht, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x \text{ existiert nicht.}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

### 2.5.3 Stetigkeit einer Funktion

Von **stetigen Vorgängen** in der Physik oder Chemie sprechen wir, wenn sich der betrachtete Prozess in kleinen Zeitintervallen wenig ändert. Nicht alle Vorgänge in der Natur besitzen diese Eigenschaft. Ein Sprungverhalten von Messgrößen liegt beispielsweise bei Phasenübergängen vor.

#### Beispiel 2.23 (Phasenübergänge, Einschaltvorgänge)

- (1) Einem festen Körper werde Wärme zugeführt. Die Wärmemenge  $w$  ist eine Funktion der Temperatur  $T$ :  $w = g(T)$ . Sei  $T_s$  die Schmelztemperatur des Körpers und  $T_d$  die Verdampfungstemperatur der Flüssigkeit. An der Stelle  $T = T_s$  ist die Wärmemenge der Schmelze größer als die Wärmemenge des festen Körpers. Die Differenz der zugeführten massebezogenen Wärmemengen an der Stelle  $T_s$  (Schmelzpunkt) heißt Schmelzwärme. Beim Übergang vom flüssigen zum gasförmigen Zustand spricht man vom Verdampfungspunkt und von Verdampfungswärme.
- (2) Die Dichte von Wasser bei Abkühlung unter  $0^\circ\text{C}$  ändert sich sprunghaft.
- (3) Der Einschaltvorgang bei Schließen eines Schalters in einem Stromkreis wird durch die so genannte **Heaviside-Funktion**

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

näherungsweise beschrieben. An der Stelle  $x = 0$  liegt Sprungverhalten vor.

#### Definition 2.19 (Stetigkeit)

1. Eine Funktion  $y = f(x)$   $x \in D(f)$  heißt an der Stelle  $c$  **stetig** gdw
  - 1°  $c \in D(f)$ ,
  - 2°  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  als **eigentlicher GW** existiert, d.h.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$   $A \in \mathbb{R}$ ,
  - 3°  $A = f(c)$ .
2. Eine Funktion  $y = f(x)$   $x \in D(f)$  heißt an der Stelle  $c$  **unstetig** gdw eine der Bedingungen 1° – 3° verletzt ist.

#### Definition 2.20 Eine Funktion $y = f(x)$ $x \in D(f)$ heißt an der Stelle $c$ **linksseitig (rechtsseitig) stetig** gdw

- 1°  $c \in D(f)$ ,
- 2°  $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$  ( $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$ ) als **einseitiger eigentlicher GW** existiert, d.h.  
 $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = A_-$   $A_- \in \mathbb{R}$  ( $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = A_+$   $A_+ \in \mathbb{R}$ ),
- 3°  $A_- = f(c)$  ( $A_+ = f(c)$ ).

**Theorem 2.4** Die Funktion  $f(x)$  ist an der Stelle  $c$  **stetig** gdw  $f(x)$  an der Stelle  $c$  **links- und rechtsseitig stetig** ist.

Ist die letzte Bedingung erfüllt, so ist

$$f(c) = A_- = A_+.$$

### Beispiel 2.24 Einseitige Stetigkeit

- (1) Die **Heaviside-Funktion** ist an der Stelle  $c = 0$  **rechtsseitig stetig**, denn  $A_- = 0$  und  $A_+ = 1 = f(0)$ .
- (2) Die Funktion  $f(x) = \operatorname{sgn} x$   $D(f) = \mathbb{R}$  ist an der Stelle  $x = 0$  weder **links-** noch **rechtsseitig stetig**, denn  $A_- \neq f(0)$ ,  $A_+ \neq f(0)$  und  $A_- \neq A_+$ .

### Definition 2.21 Stetigkeit auf einem Intervall, stückweise Stetigkeit

1. Die Funktion  $f$  heißt in  $]a, b[$  **stetig**, wenn sie an jeder Stelle des Intervalls **stetig** ist.
2. Die Funktion  $f$  heißt in  $[a, b]$  **stetig**, wenn sie in  $]a, b[$  **stetig** und außerdem an der Stelle  $a$  **rechtsseitig** und an der Stelle  $b$  **linksseitig stetig** ist.
3. Die Funktion  $f$  heißt in  $]a, b[$  **stückweise stetig**, wenn sie bis auf höchstens **endlich viele Lücken oder Sprungstellen** **stetig** ist.
4. Die Funktion  $f$  heißt in  $[a, b]$  **stückweise stetig**, wenn sie in  $]a, b[$  **stückweise stetig** ist und außerdem an der Stelle  $a$  **rechtsseitig** und an der Stelle  $b$  **linksseitig stetig** ist.

### Eigenschaften stetiger Funktionen

- 1° Die Funktion  $f$  sei **stetig** in  $c \in D(f) \wedge f(c) > 0$ . Dann existiert  $U_\delta(c) = ]c - \delta, c + \delta[$  derart, dass  $f(x) > 0$  für alle  $x \in D(f) \cap U_\delta(c)$ .
- 2°  $(f, g$  **stetig** in  $c \in D(f) \wedge D(f) = D(g)) \implies \lambda f$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ),  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  **stetig** in  $c$ .  
Gilt außerdem  $g(c) \neq 0$ , so ist  $\frac{f}{g}$  **stetig** in  $c$ .
- 3°  $(g$  **stetig** in  $c \in D(g) \wedge f$  **stetig** in  $g(c) \in D(f) \wedge W(g) \subseteq D(f)) \implies f(g(t))$  **stetig** in  $c$ .
- 4° Die Funktion  $f$  sei **stetig** und **streng monoton** in  $D(f) = X$ , wobei  $X$  ein beliebiges Intervall ist. Dann ist die unter diesen Voraussetzungen existierende **Umkehrfunktion**  $f^{-1}$  ebenfalls **stetig** und **streng monoton** in einem Intervall  $Y = D(f^{-1}) = W(f)$ .
- 5° Die Funktion  $f$  sei **monoton** in  $D(f) = X$ , wobei  $X$  ein beliebiges Intervall ist. Außerdem gelte  $W(f) = Y$ , wobei  $Y$  ebenfalls ein Intervall ist (d.h. für **jedes**  $y \in Y$  existiert wenigstens ein  $x \in X$  mit  $y = f(x)$ ). Dann ist  $f$  **stetig** in  $X$ .

Die Eigenschaft 5° wird zum Nachweis der **Stetigkeit** vieler elementarer Funktionen verwendet, z.B. für die Funktionen  $f(x) = x$  oder  $f(x) = e^x$ .



### 3 Reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen

#### 3.1 Definition und Darstellungsmöglichkeiten

**Definition 3.1** Unter einer Funktion von zwei Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar  $(x, y)$  mit  $x \in X$  und  $y \in Y$ , wobei  $X$  und  $Y$  Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind, in **eindeutiger** Weise ein Element  $u$  der Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  zuordnet. Die Mengen

$$\{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\} \quad \{u \in U \mid \exists(x, y) \in D(f) : u = f(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}$$

heißen Definitionsbereich  $D(f)$  und Wertebereich  $W(f)$  der Funktion  $f$  entsprechend.

Wir bezeichnen mit  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  den **Ortsvektor** des Punktes  $P = (x, y)$  in der Ebene und mit  $\mathbb{R}^2$  die Menge aller Punkte der Ebene.

Wegen der **Eindeutigkeit** der Zuordnung ist eine Funktion gegeben durch

$$u = f(x, y) \quad (x, y) \in D(f).$$

Der Definitionsbereich  $D(f)$  einer Funktion  $u = f(x, y)$  kann als eine Punktmenge  $M$  in der Ebene betrachtet werden. Gehören alle Randpunkte von  $M$  zu  $M$ , so heißt  $M$  **abgeschlossen**. Gehört kein Randpunkt von  $M$  zu  $M$ , so heißt  $M$  **offen**. Eine **offene** Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^2$  heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Punkte von  $M$  durch einen ganz in  $M$  verlaufenden Streckenzug mit nur endlich vielen Eckpunkten verbunden werden können. Eine **offene** und **zusammenhängende** Menge  $G$  heißt ein **Gebiet**. Ein **Gebiet**  $G$  in der Ebene heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jede in  $G$  liegende doppelpunktfreie geschlossene Kurve innerhalb von  $G$  stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Andernfalls heißt ein **Gebiet**  $G$  **mehrfach zusammenhängend**. Ist  $G$  ein **Gebiet** und nehmen wir zur Menge  $G$  alle Randpunkte von  $G$  hinzu, so nennt man die so entstehende **abgeschlossene** Menge  $\overline{G}$  einen **Bereich**.

#### Beispiel 3.1 (Rechteckbereich, Umgebung)

- (1)  $\overline{Q} = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$  ist ein **einfach zusammenhängender Rechteckbereich**,
- (2)  $U_\varrho(\mathbf{r}_0) = \{\mathbf{r} \mid |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 < \varrho^2\} = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varrho^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$  ist eine  $\varrho$ -**Umgebung** des Punktes  $P_0 = (x_0, y_0)$  mit  $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ .

#### Beispiel 3.2 (Funktionen zweier Variabler)

- (1) Für ein ideales Gas gilt:  $pV = RT$ . Dabei ist  $p$  der Druck,  $V$  das Volumen,  $T$  die Temperatur und  $R$  die allgemeine Gaskonstante. Der Druck  $p = RT/V$  ist eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen  $T$  und  $V$ . Fixiert man jeweils eine der Variablen, so erhält man Funktionen einer unabhängigen Variablen.
- (2)  $U = IR$  - Ohmsches Gesetz

$$(3) \quad u = \sin x \cdot \exp(\cos y) \quad u = \sin x \cdot \sin y$$

$$(4) \quad u = x + y \text{ - lineare Funktion, } u = x^2 + 2xy + y^2 \text{ - quadratische Funktion}$$

**Definition 3.2** Unter einer Funktion von  $n$  unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten  $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  mit  $x_i \in X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), wobei die  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind, in **eindeutiger** Weise ein Element  $u$  der Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  zuordnet. Die Mengen

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \ (i = 1, \dots, n)\} \quad \{u \in U \mid \exists (x_1, \dots, x_n) \in D(f) : u = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

heißen Definitionsbereich  $D(f)$  und Wertebereich  $W(f)$  der Funktion  $f$  entsprechend.

$$\text{Schreibweise: } u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f).$$

### Darstellungsmöglichkeiten für $n=2$

- Analytische Darstellung

$$1^\circ \text{ Explizite Darstellung: } u = f(x, y) \quad (x, y) \in D(f)$$

$$2^\circ \text{ Implizite Darstellung: } F(x, y, u) = 0$$

- Grafische Darstellung

1° Das Zahlentripel  $(x, y, u)$  mit  $u = f(x, y)$  wird als Punkt im Raum aufgefasst. Die Gesamtheit der Punkte stellt eine über dem Definitionsbereich liegende Fläche dar.

2° Darstellung durch Höhenlinien (Niveaulinien) Wir setzen  $u = f(x, y) = c = \text{const.}$ , wobei  $c$  eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen durchläuft. Die Ebene  $u = c$  ist parallel zur  $xy$ -Ebene und hat von ihr den Abstand  $c$ . Auf jeder dieser Ebenen wird die Kurve  $f(x, y) = c$  gezeichnet, woraus man das Höhenlinienbild erhält.

## 3.2 Grenzwerte und Stetigkeit

Wir bezeichnen mit  $U_\varrho^0(\mathbf{r}_0) = U_\varrho(\mathbf{r}_0) \setminus \{\mathbf{r}_0\}$  eine **punktierte  $\varrho$ -Umgebung** des Punktes  $(x_0, y_0)$ , d.h.  $\mathbf{r}_0$  gehört nicht zur Umgebung.

**Definition 3.3** Die Funktion  $u = f(\mathbf{r}) = f(x, y)$  sei wenigstens in  $U_\varrho^0(\mathbf{r}_0)$  definiert. Wenn für **jede** Folge  $\mathbf{r}_n$  mit den Eigenschaften

$$1^\circ \quad \mathbf{r}_n \in U_\varrho^0(\mathbf{r}_0) \quad \forall n \quad \left( \mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right),$$

$$2^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0, \quad \text{d.h.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0,$$

die Folge  $f(\mathbf{r}_n)$  der zugehörigen Funktionswerte gegen **ein und denselben** Wert  $A$  konvergiert, so heißt  $A$  **Grenzwert (GW)** von  $f(\mathbf{r})$  für  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ . Der Grenzübergang erfolgt für alle Koordinaten gleichzeitig.

Schreibweise:  $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A.$

Für  $n > 1$  gibt es unendlich viele Möglichkeiten der Annäherung an den Punkt  $(x_0, y_0)$ , deshalb werden einseitige **GW** in diesem Falle nicht betrachtet. Die Übertragung von Definition 2.17 auf den Fall uneigentlicher **GW** ist jedoch möglich.

**Definition 3.4**  $u = f(x, y) \quad D(f) = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Für jedes fixierte  $y \in Y$  existiere  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y).$

Für jedes fixierte  $x \in X$  existiere  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \psi(x).$

Die **GW**

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y))$$

heißen, falls sie existieren, **iterierte GWe**, d.h. der Grenzübergang wird in einer bestimmten Reihenfolge ausgeführt.

Die **iterierten GW** sind nicht notwendig gleich. Die Reihenfolge der Grenzwertbildung ist i. Allg. nicht vertauschbar.

**Beispiel 3.3**  $f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \quad D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid y = -x\} \quad x_0 = y_0 = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \varphi(y) = y - 1 & \quad \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = -1 \\ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \psi(x) = x + 1 & \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = +1. \end{aligned}$$

**Definition 3.5 (Stetigkeit, Unstetigkeit)**

1. Eine Funktion  $u = f(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in D(f)$  heißt an der Stelle  $\mathbf{r}_0$  **stetig nach allen Variablen** gdw

1°  $\mathbf{r}_0 \in D(f)$

2°  $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} f(\mathbf{r})$  als **eigentlicher GW** existiert, d.h.  $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = A \quad A \in \mathbb{R},$

3°  $A = f(\mathbf{r}_0).$

2. Eine Funktion  $u = f(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in D(f)$  heißt an der Stelle  $\mathbf{r}_0$  **unstetig** gdw eine der Bedingungen 1° – 3° verletzt ist.

**Beispiel 3.4 (Unstetigkeiten)**

(1) Die Funktion  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^{-1}$  ist **unstetig** längs des Kreises  $x^2 + y^2 = 1.$

(2) Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist **unstetig** in  $(0, 0)$ , da  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  nicht existiert.

## 4 Differenzialrechnung für reelle Funktionen einer reellen Variablen

### 4.1 Der Ableitungsbegriff

Ausgangspunkt war das **Tangentenproblem** (Leibniz 1646-1716). Gegeben sei  $y = f(x)$   $D(f)$ ,  $c \in D(f)$ . Gesucht ist die **Tangente** an den durch  $f$  gegebenen Graphen im Punkt  $(c, f(c))$ .

#### Definition 4.1 Differenzenquotient, Differenzialquotient, Tangente

1. Sei  $y = f(x)$  in  $U_\delta(c)$  definiert, d.h.  $]c - \delta, c + \delta[ \subseteq D(f)$ . Wählen  $\Delta x \in \mathbb{R}$  derart, dass  $0 < |\Delta x| < \delta$  gilt. Der Anstieg der Sekante durch die Punkte  $(c, f(c))$  und  $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$  (mittlerer Anstieg der Kurve im Intervall  $[c, c + \Delta x]$ ) heißt **Differenzenquotient**.

$$\text{Bezeichnung: } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

2. Die Funktion  $f$  heißt **differenzierbar** an der Stelle  $c$  (oder in  $c$ ) gdw gilt:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \quad \text{bzw.}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c) - f'(c)\Delta x}{\Delta x} = 0.$$

Der (**eigentliche**) GW  $f'(c)$  heißt **1. Ableitung** oder **Differenzialquotient** von  $f$  an der Stelle  $c$ . Der **Differenzialquotient** ist also kein Quotient im üblichen Sinne, sondern ein **GW**.

3. Die Funktion  $f$  sei in  $c$  **differenzierbar**. Dann heißt die durch  $y = f(c) + f'(c)(x - c)$  gegebene Gerade **Tangente** an die durch  $f$  gegebene Kurve im Punkt  $(c, f(c))$ . Die Zahl  $f'(c) = \tan \alpha$  heißt **Anstieg der Tangente**, der Winkel  $\alpha = \arctan f'(c)$  heißt **Anstiegswinkel**.

**Beispiel 4.1**  $y = f(x) = x^3$   $D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(c + \Delta x)^3 - c^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3c^2 \Delta x + 3c \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3c^2$$

Wir berechnen die **Tangentengleichung** in zwei verschiedenen Punkten:

$$1^\circ (c, f(c)) = (0, 0), \quad f'(0) = 0 \quad \text{Tangentengleichung in } (0, 0): y = 0,$$

$$2^\circ (c, f(c)) = (1, 1), \quad f'(1) = 3 \quad \text{Tangentengleichung in } (1, 1): y = 3x - 2.$$

Die **Tangente** an die Kurve im Punkt  $(1, 1)$  schneidet die Kurve noch im Punkt  $(-2, -8)$ .

**Beispiel 4.2** Die Ableitung  $f'(c)$  beschreibt die Momentanveränderung oder das Grenzverhalten der Funktion  $f$  in  $c$ .

- (1) Sei  $s = s(t)$  die Bewegung eines Punktes im Zeitintervall  $[t_1, t_2]$ . Wir setzen  $t_2 = t_1 + \Delta t$ ,  $t_2 - t_1 = \Delta t$ . Dann entspricht die **Durchschnittsgeschwindigkeit** im Zeitintervall  $[t_1, t_2]$

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

dem **Differenzenquotienten** und die **Augenblicksgeschwindigkeit** in  $t_1$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t} = \dot{s}(t_1)$$

dem **Differenzialquotienten** von  $s$  an der Stelle  $t_1$ . Die Ableitung einer Funktion  $s = s(t)$  nach der Zeit  $t$  wird oft mit  $\dot{s}(t)$  anstelle von  $s'(t)$  bezeichnet.

- (2) Aus den Stoffen A und B in Lösung entstehe ein Reaktionsprodukt C gemäß  $A + B \rightarrow C$ . Es sei  $x = x(t)$   $t \geq 0$  die Konzentration des Stoffes C zur Zeit  $t$ , wobei  $x(0) = 0$  angenommen wird, d.h. zu Beginn der Reaktion ist der Stoff C noch nicht vorhanden. Dann entspricht die **mittlere Bildungsgeschwindigkeit** im Zeitintervall  $[t_1, t_2]$

$$\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

dem **Differenzenquotienten** und die **Bildungsgeschwindigkeit** in  $t_1$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} = \dot{x}(t_1)$$

dem **Differenzialquotienten** von  $x$  an der Stelle  $t_1$ .

**Definition 4.2** Die Funktion  $f$  heißt **linksseitig (rechtsseitig) differenzierbar** an der Stelle  $c$  gdw

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \quad \left( \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \right)$$

als **einseitiger eigentlicher GW** existiert. Dieser GW heißt **linksseitige (rechtsseitige) Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $c$ .

Bezeichnung:  $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'_l(c) \quad \left( \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'_r(c) \right)$ .

**Theorem 4.1** Die Funktion  $f$  besitzt eine **Ableitung**  $f'(c)$  in  $c$  gdw  $f$  in  $c$  die **einseitigen Ableitungen**  $f'_l(c)$  sowie  $f'_r(c)$  besitzt und wenn  $f'_l(c) = f'_r(c)$  gilt.

**Beispiel 4.3** Die Funktion  $f(x) = |x|$   $D(f) = \mathbb{R}$  ist in  $c = 0$  **nicht differenzierbar**, denn

$$\begin{aligned} f'_l(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \\ f'_r(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{+\Delta x}{\Delta x} = +1, \end{aligned}$$

also  $f'_l(0) \neq f'_r(0)$ . Nach Theorem 4.1 existiert  $f'(0)$  nicht. Folglich ist  $f$  in  $c = 0$  **nicht differenzierbar** und in diesem Punkt existiert **keine Tangente** an die Kurve. Es existieren jedoch die beiden **einseitigen Tangenten**  $y = x$  und  $y = -x$ .

### Definition 4.3 (Uneigentliche Ableitungen)

1. Der **uneigentliche GW**

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \pm\infty$$

heißt **uneigentliche Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $c$ .

2. Der **uneigentliche GW**

$$f'_l(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \pm\infty$$

$$\left( f'_r(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \pm\infty \right)$$

heißt **linksseitige (rechtsseitige) uneigentliche Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $c$ .

3. Ist  $f'_l(c) = f'_r(c) = -\infty$  ( $f'_l(c) = f'_r(c) = +\infty$ ), dann besitzt  $f$  an der Stelle  $c$  eine **uneigentliche Ableitung**  $f'(c) = -\infty$  ( $f'(c) = +\infty$ ). In diesem Falle spricht man aber nicht von **Differenzierbarkeit** der Funktion  $f$  an der Stelle  $c$ .

**Beispiel 4.4** Die Funktion  $y = f(x) = \begin{cases} x^{1/3} & \text{für } x \geq 0 \\ -(-x)^{1/3} & \text{für } x < 0 \end{cases}$  besitzt an der Stelle  $c = 0$  eine **uneigentliche Ableitung**, denn

$$f'_l(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-(-\Delta x)^{1/3}}{-(-\Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{(-\Delta x)^{2/3}} = +\infty$$

$$f'_r(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = +\infty.$$

Die **Tangente** an die durch  $f$  gegebene Kurve im Punkt  $(0, 0)$  ist die Gerade  $x = 0$ .

### Definition 4.4 (Differenzierbarkeit im Intervall, stetige Differenzierbarkeit)

1. Die Funktion  $f$  heißt in  $]a, b[$  **differenzierbar**, wenn sie an jeder Stelle des Intervalls **differenzierbar** ist.
2. Die Funktion  $f$  heißt in  $[a, b]$  **differenzierbar**, wenn sie in  $]a, b[$  **differenzierbar** und außerdem an der Stelle  $a$  **rechtsseitig** und an der Stelle  $b$  **linksseitig differenzierbar** ist.
3. Existiert  $f'(x)$  in  $X$ , wobei  $X$  ein beliebiges Intervall ist und ist  $f'(x)$  **stetig** in  $X$ , so heißt  $f(x)$  in  $X$  **stetig differenzierbar**.

**Theorem 4.2** Ist  $f$  **differenzierbar** in  $c$ , so ist  $f$  auch **stetig** in  $c$ .

Die Umkehrung von Theorem 4.2 gilt i. Allg. nicht (vgl. Beispiel 4.3).

**Differentiationsregeln** und die **Ableitungen elementarer Funktionen** sind in jeder Formelsammlung bzw. auf dem Arbeitsblatt zur Vorlesung aufgelistet.

## 4.2 Ableitungen höherer Ordnung

Ist  $f'(x)$  in  $X$  differenzierbar, so kann man die **2. Ableitung** oder die **Ableitung 2. Ordnung** bilden:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Analog erhält man die  **$n$ -te Ableitung** oder die **Ableitung  $n$ -ter Ordnung**:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Man schreibt:  $f^{(0)}(x) = f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$ ,  $f^{(4)}(x)$ ,  $f^{(5)}(x), \dots$ .

**Definition 4.5** Existiert  $f^{(n)}(x)$  in  $X$  und ist  $f^{(n)}(x)$  stetig in  $X$ , so heißt  $f(x)$  in  $X$   **$n$ -fach stetig differenzierbar**.

### Regeln zur Berechnung von Ableitungen höherer Ordnung

Die Funktionen  $f$  und  $g$  mögen in  $X$  **Ableitungen  $n$ -ter Ordnung** besitzen.

$$1^\circ (cf(x))^{(n)} = cf^{(n)}(x),$$

$$2^\circ (f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x),$$

$$3^\circ (f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \quad (\text{Leibnizsche Formel}).$$

Dabei ist unter Verwendung von  $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $0! = 1$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!k!} & \text{für } k < n, n \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{für } k = 0 \vee k = n. \end{cases}$$

### Beispiel 4.5 (Ableitungen höherer Ordnung)

$$(1) \quad \begin{aligned} f(x) = e^x & \quad f^{(n)}(x) = e^x, \\ f(x) = a^x & \quad f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n. \end{aligned}$$

(2) Gegeben:  $h(x) = e^x \cos x$ . Gesucht:  $h^{(4)}(x)$ . Wir setzen:  $f(x) = e^x$  und  $g(x) = \cos x$ . Aus der **Leibnizschen Formel** ergibt sich für  $n = 4$ :

$$\begin{aligned} h^{(4)} &= \binom{4}{0} f g^{(4)} + \binom{4}{1} f' g''' + \binom{4}{2} f'' g'' + \binom{4}{3} f''' g' + \binom{4}{4} f^{(4)} g, \\ h^{(4)}(x) &= -4e^x \cos x. \end{aligned}$$

### Physikalische Bedeutung der 2. Ableitung

Für  $s = s(t)$   $t \in [t_1, t_2]$  ist  $v(t) = \dot{s}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$  die **Geschwindigkeit** als Funktion der Zeit  $t$ .

Für  $v = v(t)$   $t \in [t_1, t_2]$  ist  $a(t) = \dot{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{s}(t + \Delta t) - \dot{s}(t)}{\Delta t}$  die **Beschleunigung** als Funktion der Zeit  $t$ .

**Beispiel 4.6** Es gilt das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls:  $s(t) = \frac{g}{2} t^2$   $t > 0$ . Dann ist  $v(t) = \dot{s}(t) = gt$  und  $a(t) = \dot{v}(t) = g$ .

## 4.3 Anwendungen der Differenzialrechnung

### 4.3.1 Approximation von Funktionen

**Theorem 4.3 (Satz von Taylor)** Sei

1°  $f$  definiert und  $n$ -fach stetig differenzierbar in  $[a, b]$ ,

2° es existiere eine **eigentliche (endliche) Ableitung**  $f^{(n+1)}(x)$  in  $]a, b[$ .

Dann gilt für beliebige Punkte  $x, x_0 \in [a, b]$  die **Taylor'sche Formel**

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + R_n(x, x_0), \quad (4.1)$$

d.h., eine Darstellung von  $f(x)$  durch ein Polynom in  $(x-x_0)$  und ein Restglied  $R_n(x, x_0)$ . Das Restglied in der Form

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad 0 < \theta < 1 \quad (4.2)$$

ist nach **Lagrange** benannt.

Es gibt noch andere Darstellungen des Restgliedes.

Speziell für  $x_0 = 0$  geht (4.1) über in die **Mac Laurinsche Formel**

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + R_n(x), \quad (4.3)$$

d.h., eine Darstellung von  $f(x)$  durch ein Polynom in  $x$  und ein Restglied  $R_n(x)$ . Das Restglied

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad 0 < \theta < 1 \quad (4.4)$$

ist hier wieder in der Form von **Lagrange** angegeben.

**Beispiel 4.7** Gesucht ist ein **Polynom 4. Grades** in  $x$  als Näherungsfunktion für die **Exponentialfunktion**  $f(x) = e^x$  im Intervall  $[0, 1]$ .

Die Formeln (4.3) und (4.4) liefern

$$e^x = \sum_{k=0}^4 \frac{e^0 x^k}{k!} + R_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{e^{\theta x}}{5!} x^5.$$

Da  $e^x$  eine **streng monoton wachsende** Funktion ist, wird das Restglied am größten, wenn  $\theta x$  nach oben durch 1 abgeschätzt und  $x$  durch 1 ersetzt wird. Man erhält

$$|R_4(1)| \leq \frac{e^1}{5!} \cdot 1^5 < \frac{3}{5!} = 0.025,$$

d.h., der mittels  $p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$  errechnete Näherungswert für  $e^x$  ist im Intervall  $[0, 1]$  mindestens auf eine Stelle hinter dem Komma genau.



### 4.3.2 Das Differenzial

Nach Definition 4.1 heißt eine Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  **differenzierbar** gdw

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = 0. \quad (4.5)$$

**Definition 4.6** Sei  $f$  differenzierbar in  $x_0$ . Das Produkt  $f'(x_0) \Delta x$  heißt das zur Stelle  $x_0$  und zum Argumentzuwachs  $\Delta x$  gehörige **Differenzial** der Funktion  $f$ .

Bezeichnung:  $df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \Delta x$  oder kurz  $df = f'(x_0) \Delta x$ .

Speziell ergibt sich für  $f(x) = x$   $df = dx$  und andererseits  $df = 1 \cdot \Delta x$ , also  $\Delta x = dx$ . Allgemein gilt dann  $df = f'(c) dx$  und für  $dx \neq 0$  erhält man die **Ableitung** von  $f$  an einer Stelle  $c$  als den **Quotienten** zweier **Differenziale**:

$$\frac{dy}{dx}_{/x=c} = f'(c).$$

Wir setzen in der **Taylorischen Formel**  $n = 1$ :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + R_1(x, x_0) \quad (4.6)$$

mit

$$R_1(x, x_0) = \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2.$$

Dabei stellt die lineare Funktion  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  die Gleichung der **Tangente** an die durch  $f$  gegebene Kurve im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  dar, d.h. eine in  $x_0$  **differenzierbare Funktion** ist in erster Näherung **linear**.

Setzt man in (4.6) für  $x_0 < x$   $x = x_0 + \Delta x$ , so gilt

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + \tilde{R}_1(\Delta x, x_0).$$

Mit der Bezeichnung  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  ergibt sich

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \tilde{R}_1(\Delta x, x_0) \implies \Delta f - df = \tilde{R}_1(\Delta x, x_0). \quad (4.7)$$

Ist  $|\tilde{R}_1(\Delta x, x_0)|$  hinreichend klein, (dies ist wegen Voraussetzung 1° im **Satz von Taylor** für kleine Zuwächse des Argumentes  $\Delta x$  der Fall), so folgt aus (4.7)

$$\Delta f \approx df \quad (4.8)$$

mit  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  und  $df = f'(x_0)\Delta x$ .

### 4.3.3 Anwendung des Differenzials in der Fehlerrechnung

Sei eine **differenzierbare** Funktion  $y = f(x)$  gegeben. Der Messwert  $x$  sei mit dem Messfehler  $\Delta x$  behaftet. Dieser zieht Ungenauigkeiten in den Funktionswerten nach sich. Nach (4.8) kann man schreiben:  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \approx df = f'(x) \Delta x$ . Es ist

$\Delta f \approx f'(x) \Delta x$  ein Näherungswert für den **absoluten Fehler** von  $f$  und

$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{f'(x)}{f(x)} \Delta x$  ein Näherungswert für den **relativen Fehler** von  $f$ , wenn  $f(x) \neq 0$ .

**Beispiel 4.8** Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels ist für Auslenkwinkel unter  $5^\circ$  durch die Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gegeben. Dabei bezeichnet  $l$  die Pendellänge und  $g$  die Erdbeschleunigung. Die gemessene Pendellänge von  $l = 1$  [m] sei mit einem relativen Fehler von 2% behaftet. Mit welchem **absoluten** und welchem **relativen Fehler** erhält man die Schwingungsdauer  $T = T(l)$ ?

Für kleine Fehler  $\Delta l$  setzen wir  $\Delta T \approx dT = T'(l)\Delta l = \frac{\pi}{\sqrt{gl}} \Delta l$ .

Mit  $\Delta l = 0.0200$  [m] (entspricht 2%) erhält man  $\Delta T \approx \frac{3.1416}{\sqrt{9.8067 \cdot 1}} 0.020$  [s] = 0.0201 [s].

Die Schwingungsdauer  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2.0064$  [s] ist mit einem **absoluten Fehler** von  $\Delta T \approx 0.0201$  [s] behaftet:  $T = (2.0064 \pm 0.0201)$  [s].

Für den **relativen Fehler**  $\frac{\Delta T}{T}$  erhält man  $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{0.0201}{2.0064} = 0.0100$ , also 1%.

#### 4.3.4 Die Regeln von de l'Hospital

Unbestimmte Ausdrücke der Form  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  (dies sind Symbole, keine Rechengrößen) lassen sich oft mit mit Hilfer der de l' Hospital'schen Regeln untersuchen. Das Symbol  $0^\infty$  stellt keinen unbestimmten Ausdruck dar.

**1. Regel:** Sie dient zur Grenzwertbestimmung in unbestimmten Ausdrücken der Form  $\frac{0}{0}$ , d.h., es gilt  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ .

Wenn eine Zahl  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in ]c - \delta, c[ \cup ]c, c + \delta[$  gilt:

1°  $g(x) \neq 0$ ,

2°  $f'(x), g'(x)$  existieren und  $g'(x) \neq 0$  gilt,

dann ist

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  als **eigentlicher** oder **uneigentlicher GW** existiert.

**2. Regel:** Sie dient zur Grenzwertbestimmung in unbestimmten Ausdrücken der Form  $\frac{\infty}{\infty}$ , d.h., es gilt  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$ .

Wenn eine Zahl  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in ]c - \delta, c[ \cup ]c, c + \delta[$  die Bedingung 2° aus der **1. Regel** gilt, dann ist

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  als **eigentlicher** oder **uneigentlicher GW** existiert.

### Umformungen für die übrigen unbestimmten Ausdrücke

(I)  $0 \cdot \infty$ , d.h. es gilt  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$ :

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

(II)  $\infty - \infty$ , d.h. es gilt  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$ :

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}} \quad \left( \frac{0}{0} \right).$$

(III)  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ , d.h. wir betrachten den **GW**  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)}$   $f(x) > 0 \forall x \in D(f)$ .  
Aus  $y(x) = f(x)^{g(x)}$  folgt  $\ln y(x) = g(x) \ln f(x)$ . Gilt

$$\lim_{x \rightarrow c} \ln y(x) = \begin{cases} A \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}, \quad \text{so ist} \quad \lim_{x \rightarrow c} y(x) = \lim_{x \rightarrow c} e^{\ln y(x)} = e^{\left( \lim_{x \rightarrow c} \ln y(x) \right)} = \begin{cases} e^A \\ +\infty \\ 0 \end{cases}.$$

### Beispiel 4.9 (Regeln von de l'Hospital)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \xrightarrow{1. \text{ Regel}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\mu} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \mu > 0 \quad \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu x^\mu} = 0 \xrightarrow{2. \text{ Regel}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\mu} = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (1^\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad \left( \frac{0}{0} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \quad \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$$

Die **2. Regel** ist nicht anwendbar, da  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1}$  nicht existiert.

## 4.4 Untersuchung des Verhaltens reeller Funktionen

### 4.4.1 Monotonieverhalten

Aus  $f'(x) = \tan \alpha > 0 \quad \forall x \in ]a, b[$  folgt: Der Anstieg der **Tangente** an den Graphen von  $f$  ist positiv.

Aus  $f'(x) = \tan \alpha < 0 \quad \forall x \in ]a, b[$  folgt: Der Anstieg der **Tangente** an den Graphen von  $f$  ist negativ.

Für **differenzierbare** Funktionen kann man die **Monotonie** auch durch die **Ableitungen** der Funktion charakterisieren.

**Theorem 4.4** Sei  $f$  stetig in  $[a, b]$  sowie differenzierbar in  $]a, b[$ . Dann gilt:

- (1)  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in ]a, b[ \iff f(x) = K \quad \forall x \in [a, b]$ , wobei  $K$  eine Konstante ist,
- (2)  $f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in ]a, b[ \iff f(x) - g(x) = K \quad \forall x \in [a, b]$ ,
- (3)  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ )  $\forall x \in ]a, b[ \iff f$  **monoton wachsend** (**monoton fallend**) in  $[a, b]$ ,
- (4)  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ )  $\forall x \in ]a, b[ \implies f$  **streng monoton wachsend** (**streng monoton fallend**) in  $[a, b]$ .

**Beispiel 4.10**  $f(x) = x^3$  ist **streng monoton wachsend** in  $[-1, 1]$ , aber  $f'(0) = 0$ , d.h. die Umkehrung der Behauptung (4) in Theorem 4.4 gilt i. Allg. nicht.

### 4.4.2 Extrema

**Definition 4.7** Sei  $y = f(x)$  definiert in  $[a, b]$  und  $c \in [a, b]$ .

1. Die Funktion  $y = f(x)$  besitzt in  $c$  ein **relatives oder lokales Minimum (Maximum)**  $f(c)$  gdw eine Umgebung  $U_\delta(c) \subset [a, b]$  existiert, so dass gilt:

$$f(x) \geq f(c) \quad (f(x) \leq f(c)) \quad \forall x \in U_\delta(c)$$

Falls  $c$  einer der Randpunkte  $a$  oder  $b$  ist, versteht man unter  $U_\delta(c)$  eine einseitige Umgebung von  $c$ . **Lokale Minima** bzw. **Maxima** heißen **lokale Extrema** von  $f$ . Falls für alle  $x \in U_\delta(c) \setminus \{c\}$  eine strenge Ungleichung vorliegt, so spricht man von einem **eigentlichen lokalen Extremum**.

2. Die Funktion  $y = f(x)$  besitzt an der Stelle  $c_m$  ( $c_M$ ) ein **absolutes oder globales Minimum (Maximum)**  $f(c_m)$  ( $f(c_M)$ ) gdw

$$f(x) \geq f(c_m) \quad (f(x) \leq f(c_M)) \quad \forall x \in [a, b].$$

Dabei heißen  $f(c_m)$  und  $f(c_M)$  die **globalen Extrema** von  $f$  auf  $[a, b]$ .

3.  $f(c)$  heißt **inneres (lokales oder globales) Extremum**, wenn  $f(c)$  ein **lokales oder globales Extremum** und  $c \in ]a, b[$  ist.

4.  $f(c)$  heißt **Randextremum**, wenn  $f(c)$  ein **Extremum** ist und  $c = a$  oder  $c = b$ .

Jedes **globale Extremum** ist gleichzeitig ein **lokales**, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Ist die Funktion  $y = f(x)$   $x \in [a, b]$  hinreichend oft differenzierbar, so lassen sich **innere lokale Extrema** mit Hilfe der Differentialrechnung ermitteln. Durch Vergleich dieser **Extrema** mit den Randwerten  $f(a)$  und  $f(b)$  ergibt sich dann eine Aussage über die **globalen Extrema** von  $f(x)$  auf  $[a, b]$ .

**Notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums:**

**Theorem 4.5 (Satz von Fermat)** Sei  $f$  differenzierbar in  $]a, b[$  und  $f$  besitze in  $c \in ]a, b[$  ein inneres lokales Extremum  $f(c)$ . Dann gilt  $f'(c) = 0$ .

Ein Punkt  $c$ , für den  $f'(c) = 0$  gilt, heißt **stationärer Punkt**.

In einem **stationären Punkt**  $c$  verläuft die **Tangente** durch den Punkt  $(c, f(c))$  parallel zur  $x$ -Achse. Ihre Gleichung lautet  $y = f(c)$ . Dies gilt auch, wenn in  $c$  ein **inneres lokales Extremum** vorliegt, die Umkehrung ist jedoch i. Allg. nicht richtig.

**Beispiel 4.11**  $f(x) = x^3$   $x \in ]-1, 1[$  und  $f'(0) = 0$ , aber  $f(0)$  ist **kein Extremum**, d.h. der **Satz von Fermat** ist nicht hinreichend für die Existenz eines **lokalen Extremums**.

**Hinreichende Kriterien für die Existenz eines lokalen Extremums:**

**1. Regel:** Sie ist sowohl für **differenzierbare** als auch für **nicht differenzierbare** Funktionen anwendbar.

- 1° Sei  $f$  definiert und **stetig** in  $U_\delta(c) = ]c - \delta, c + \delta[$ ,
- 2°  $f$  besitze in  $]c - \delta, c[ \cup ]c, c + \delta[$  eine **endliche Ableitung**,
- 3° in  $c$  gelte entweder  $f'(c) = 0$  oder  $f$  ist in  $c$  **nicht differenzierbar**,
- 4°  $f'$  wechselt in keinem der Intervalle  $]c - \delta, c[$  und  $]c, c + \delta[$  das Vorzeichen.

Dann verhält sich  $f(x)$  an der Stelle  $c$  wie folgt:

	Vorzeichen von $f'(x)$ für		$f(x)$ besitzt an der Stelle $c$
	$x < c$	$x > c$	
I	+	+	kein Extremum
II	+	-	ein lokales Maximum
III	-	+	ein lokales Minimum
IV	-	-	kein Extremum.

**2. Regel:** Sie ist nur für  $n$ -fach stetig differenzierbare Funktionen anwendbar.

- 1° Sei  $f$   $n$ -fach stetig differenzierbar in  $U_\delta(c)$  ( $n \geq 2$ ).
- 2° Es gelte:  $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0 \wedge f^{(n)}(c) \neq 0$ .

Ist  $n$  **ungerade**, so besitzt  $f$  an der Stelle  $c$  **kein Extremum**. Ist  $n$  **gerade**, so hat  $f$  in  $c$  ein **eigentliches inneres lokales Extremum** und zwar für  $f^{(n)}(c) > 0$  ein **lokales Minimum** und für  $f^{(n)}(c) < 0$  ein **lokales Maximum** (vgl. **Taylorische Formel**).

**Spezialfall:** Sei  $f$  **zweifach stetig differenzierbar** in  $U_\delta(c)$ ,  $f'(c) = 0 \wedge f''(c) \neq 0$ . Dann hat  $f$  in  $c$  ein **eigentliches inneres lokales Extremum** und zwar für  $f''(c) > 0$  ein **lokales Minimum** und für  $f''(c) < 0$  ein **lokales Maximum**.

**Beispiel 4.12**  $f(x) = |x|$   $U_\delta(0) = ]-\delta, \delta[$   $f'_l(0) = -1$ ,  $f'_r(0) = +1$  (vgl. *Beispiel 4.3*). Die Funktion  $f(x)$  ist in  $c = 0$  **nicht differenzierbar**. Nach der **1. Regel** liegt in  $c = 0$  ein **eigentliches lokales Minimum** vor, welches gleichzeitig das **globale Minimum** ist.

### 4.4.3 Krümmungsverhalten

**Definition 4.8** Die Funktion  $f(x)$  heißt auf  $[a, b]$  **konvex (konkav)**, wenn für alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$  und jedes  $\alpha \in ]0, 1[$  die Ungleichung

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \stackrel{(\geq)}{\leq} \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (4.9)$$

erfüllt ist. Lässt man in (4.9) für  $x_1 \neq x_2$  das Gleichheitszeichen nicht zu, so heißt  $f(x)$  auf  $[a, b]$  **streng konvex (streng konkav)**.

#### Geometrische Interpretation

Aus  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x_2$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in ]x_1, x_2[$  folgt

$$\alpha = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}.$$

Die rechte Seite von (4.9) stellt die Gleichung der Sekante durch die Punkte  $(x_1, f(x_1))$  und  $(x_2, f(x_2))$  dar, denn

$$\begin{aligned} \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) &= f(x_2) + \alpha(f(x_1) - f(x_2)) \\ &= f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2) \\ \implies f_s(x) &:= f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2). \end{aligned}$$

Wegen  $f(x) = f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)$  bedeutet (4.9):  $f(x) \stackrel{(\geq)}{\leq} f_s(x)$ .

Für **differenzierbare** Funktionen kann man die **Konvexität (Konkavität)** auch durch die **Ableitungen** der Funktion charakterisieren.

**Theorem 4.6** Sei  $f$  **differenzierbar** in  $[a, b]$ .

$f(x)$  [**streng**] **konvex (konkav)** in  $[a, b] \iff f'(x)$  ist in  $[a, b]$  [**streng**] **monoton wachsend (fallend)**.

**Theorem 4.7** Sei  $f'$  **definiert und stetig** in  $[a, b]$  sowie **differenzierbar** in  $]a, b[$ . Dann gilt nach **Theorem 4.6** und **Theorem 4.4 (3) und (4)**:

(1)  $f''(x) \geq 0$  ( $f''(x) \leq 0$ )  $\forall x \in ]a, b[ \iff f$  **konvex (konkav)** in  $[a, b]$ ,

(2)  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ )  $\forall x \in ]a, b[ \implies f$  **streng konvex (streng konkav)** in  $[a, b]$ .

**Beispiel 4.13**  $f(x) = x \ln x$   $x \in ]0, 10[$ ,  $f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \forall x \in [0, 10] \implies f$  **streng konvex** in  $[0, 10]$ .

#### 4.4.4 Wendepunkte (WP)

**Definition 4.9** Sei  $f$  differenzierbar in  $]a, b[$ . Der Punkt  $(c, f(c))$  heißt **WP** des durch  $f$  gegebenen Graphen, wenn  $f'$  in  $c$  ein **lokales Extremum** besitzt. Die **Tangente** im **WP** heißt **Wendetangente**. Ist diese parallel zur  $x$ -Achse (d.h.  $f'(c) = 0$ ), so heißt  $(c, f(c))$  **Horizontalwendepunkt** oder **Stufenpunkt**.

#### Geometrische Interpretation

In einem **WP** ändert  $f$  das **Krümmungsverhalten** von **streng konvex** in **streng konkav** oder umgekehrt.

**Notwendiges Kriterium für die Existenz eines WP (Analogon zum Satz von Fermat):**

Sei  $f$  **zweifach differenzierbar** in  $]a, b[$  und  $(c, f(c))$  sei ein **WP** des durch  $f$  gegebenen Graphen. Dann gilt  $f''(c) = 0$ .

**Beispiel 4.14**  $f(x) = x^4$   $x \in ]-1, 1[$  und  $f''(0) = 0$ , aber  $(0, f(0))$  ist **kein WP**.

**Hinreichende Kriterien für die Existenz eines WP:**

#### 1. Regel:

1° Sei  $f$  **zweifach differenzierbar** in  $U_\delta(c) = ]c - \delta, c + \delta[$ ,

2°  $f''(c) = 0$ ,

3° es gelte:  $f''(x) < 0$  (bzw.  $f''(x) > 0$ )  $\forall x \in ]c - \delta, c[ \wedge f''(x) > 0$  (bzw.  $f''(x) < 0$ )  $\forall x \in ]c, c + \delta[$ .

Dann ist  $(c, f(c))$  ein **WP** des durch  $f$  gegebenen Graphen.

#### 2. Regel:

1° Sei  $f$   **$n$ -fach stetig differenzierbar** in  $U_\delta(c)$  ( $n \geq 3$ ).

2° Es gelte:  $f''(c) = f'''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0 \wedge f^{(n)}(c) \neq 0$ .

Ist  $n$  **ungerade**, so ist  $(c, f(c))$  ein **WP** des durch  $f$  gegebenen Graphen. Ist  $n$  **gerade**, so hat  $f$  in  $c$  ein **eigentliches inneres lokales Extremum** (vgl. **2. Regel** für **Extrema**).

**Spezialfall:** Sei  $f$  **dreifach stetig differenzierbar** in  $U_\delta(c)$ ,  $f''(c) = 0 \wedge f'''(c) \neq 0$ . Dann ist  $(c, f(c))$  ein **WP** des durch  $f$  gegebenen Graphen.

**Beispiel 4.15**  $f(x) = x^5$   $x \in ]-1, 1[$ ,  $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0$ , aber  $f^{(5)}(0) \neq 0$ , d.h.  $(0, f(0))$  ist ein **Horizontalwendepunkt**.

# 5 Differenzialrechnung für reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen

## 5.1 Partielle Ableitungen

Bekanntlich lässt sich die Funktion  $u = f(x, y)$   $D(f) = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$  im Raum durch eine Fläche darstellen. Fixiert man  $y = y_0$  mit  $y_0 \in Y$ , so ist  $y = y_0$  eine parallel zur  $xu$ -Ebene verlaufende Schnittebene und  $u = f(x, y_0) = \varphi(x)$  definiert eine auf der Fläche  $u = f(x, y)$  befindliche Schnittkurve der Fläche mit der Ebene  $y = y_0$ . Den **GW**

$$\varphi'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} =: f_x(x_0, y_0)$$

bezeichnet man, falls er existiert, als **partielle Ableitung 1. Ordnung der Funktion  $u = f(x, y)$  nach der Variablen  $x$**  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

**Geometrische Deutung:**  $f_x(x_0, y_0)$  ist der Anstieg der Tangente an die Flächenkurve  $u = f(x, y_0) = \varphi(x)$  im Raumpunkt mit den Koordinaten  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

Analog setzt man  $u = f(x_0, y) = \psi(y)$  und bezeichnet den **GW**

$$\psi'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} =: f_y(x_0, y_0),$$

falls er existiert, als **partielle Ableitung 1. Ordnung der Funktion  $u = f(x, y)$  nach der Variablen  $y$**  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

**Geometrische Deutung:**  $f_y(x_0, y_0)$  ist der Anstieg der Tangente an die Flächenkurve  $u = f(x_0, y) = \psi(y)$  im Raumpunkt mit den Koordinaten  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

Die **partiellen Ableitungen 1. Ordnung**  $f_x(x_0, y_0)$ ,  $f_y(x_0, y_0)$  einer Funktion  $u = f(x, y)$  geben also den Anstieg der Fläche  $u = f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  in Richtung der  $x$ - bzw. der  $y$ -Achse an.

$$\text{Bezeichnungen: } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Sie heißen **partielle Differenzialquotienten 1. Ordnung** und sind keine Brüche.

Für eine Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  kann man entsprechend  $n$  verschiedene **partielle Ableitungen 1. Ordnung** bilden, indem man jeweils  $n - 1$  Variable fixiert:

$$\text{Bezeichnungen: } f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad f_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad f_{x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

### Beispiel 5.1 (Partielle Ableitungen)

(1) *Zustandsfunktion eines idealen Gases:*  $p = p(T, V) = \frac{RT}{V}$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V} \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}$$



Der erste Differenzialquotient besagt, dass sich bei **isochor** vorgenommener Zustandsänderung ( $V = \text{const.}$ ) Druck und Temperatur im gleichen Verhältnis ändern ( $p \sim T$ ). Der zweite Differenzialquotient zeigt, wie sich bei einer **isothermen** Zustandsänderung ( $T = \text{const.}$ ) eines idealen Gases der Druck  $p$  in Abhängigkeit vom Volumen ändert.

$$(2) f(x, y) = x^3 - 3x \sin y + y^2 + 4 \quad f_x(x, y) = 3x^2 - 3 \sin y \quad f_y = -3x \cos y + 2y$$

## 5.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Für die Funktion  $u = f(x, y)$  lassen sich auch **partielle Ableitungen höherer Ordnung** bilden. Für  $n = 2$  Variable sind folgende **partielle Ableitungen 2. Ordnung** möglich:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} && \text{reine Ableitungen,} \\ f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, & f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} && \text{gemischte Ableitungen.} \end{aligned}$$

Analog definiert man Ableitungen der Ordnung  $k > 2$ . Der Fall  $f_{xy} \neq f_{yx}$  ist möglich.

**Theorem 5.1 (Satz von Schwarz)** Sind die partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung einer Funktion  $f(x, y)$  stetig nach allen Variablen in einer offenen Menge  $M \subset D(f)$ , so sind die gemischten partiellen Ableitungen gleich.

### Beispiel 5.2 (Ableitungen höherer Ordnung)

(1) Zustandsfunktion eines idealen Gases:  $p = p(T, V) = \frac{RT}{V}$ . Im Bereich  $T \geq 0, V > 0$  sind die beiden **gemischten Ableitungen 2. Ordnung** stetig und somit gleich:

$$p_{TV} = \frac{\partial^2 p}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 p}{\partial V \partial T} = p_{VT} = -\frac{R}{V^2}.$$

(2) Für die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

sind die **gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung** in  $(0, 0)$  nicht gleich:

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0 \quad f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0.$$

Für  $x^2 + y^2 > 0$  gilt aber

$$f_x(x, y) = y \left[ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \quad f_y(x, y) = x \left[ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right].$$

Dann ist

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = -1,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(\Delta x, 0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = +1.$$

### 5.3 Totale Differenzierbarkeit und totales Differenzial

Für  $n = 1$  bedeutete die Differenzierbarkeit einer Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $c$  die Existenz der Ableitung  $f'(c)$ . Für  $n > 1$  sind Differenzierbarkeit und Existenz der partiellen Ableitungen unterschiedliche Begriffe.

#### Definition 5.1 (Totale Differenzierbarkeit, totales Differenzial)

1. Eine im Gebiet  $G$  definierte Funktion  $u = f(x, y)$  heißt **total (vollständig) differenzierbar** an der Stelle  $(x_0, y_0)$ , gdw gilt:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - (f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0. \quad (5.1)$$

2. Die Differenz

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (5.2)$$

heißt **totaler Zuwachs** der Funktion  $u = f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

3. Der lineare Differenzialausdruck

$$df = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \quad (5.3)$$

heißt das zur Stelle  $(x_0, y_0)$  und zu den Argumentzuwächsen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gehörige **totale Differenzial** der Funktion  $f$ . Analog zum Fall  $n = 1$  gilt:  $\Delta x = dx$  und  $\Delta y = dy$ .

Aus (5.1) folgt für **total differenzierbare** Funktionen  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ .

**Theorem 5.2** *Besitzt eine Funktion  $u = f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung, so ist  $f(x, y)$  an dieser Stelle total differenzierbar.*

#### Beispiel 5.3 (Totaler Zuwachs, totales Differenzial)

Die Funktion  $u = f(x, y) = x^2 e^{xy}$  besitzt **stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung**  $f_x = x(xy + 2)e^{xy}$ ,  $f_y = x^3 e^{xy}$  und ist somit überall in der  $xy$ -Ebene **total differenzierbar**. Der **totale Zuwachs** an der Stelle  $(x_0, y_0)$  lautet:

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x)^2 e^{(x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)} - x_0^2 e^{x_0 y_0}.$$

Für das **totale Differenzial** an der Stelle  $(x_0, y_0)$  erhält man

$$df = x_0(x_0 y_0 + 2) e^{x_0 y_0} \Delta x + x_0^3 e^{x_0 y_0} \Delta y.$$

Die **totale Differenzierbarkeit** einer Funktion  $u = f(x, y)$  hängt eng zusammen mit dem Problem, ob **alle Tangenten**, die im Raumpunkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  an die Fläche  $u = f(x, y)$  gelegt werden können, in einer **gemeinsamen Ebene** liegen oder nicht.

Existiert eine solche Ebene, so heißt sie **Tangentialebene** der Fläche  $u = f(x, y)$  im Flächenpunkt  $((x_0, y_0, f(x_0, y_0)))$  und besitzt die Gleichung

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

**Theorem 5.3** *Eine Tangentialebene zur Fläche  $u = f(x, y)$  im Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  existiert genau dann, wenn die Funktion  $u = f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  **total differenzierbar** ist. (Nach Theorem 5.2 heißt dies, wenn  $u = f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  **stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung** besitzt.) Ist dagegen die Funktion  $u = f(x, y)$  an einer Stelle  $(x_0, y_0)$  **nicht total differenzierbar**, so besitzt die zugeordnete Fläche im Flächenpunkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  **keine Tangentialebene**.*

Aus (5.1) folgt wie in (4.7) (vgl. **Taylorische Formel** für  $n = 1$ )  $\Delta f - df = R_1$ , also

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + R_1(\Delta x, \Delta y, x_0, y_0). \quad (5.4)$$

Wir setzen  $x_0 + \Delta x = x$  und  $y_0 + \Delta y = y$ . Dann erhält man aus (5.4)

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R_1(x, y, x_0, y_0).$$

Dabei stellt die **lineare Funktion**  $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$  eine Gleichung für die **Tangentialebene** an die Fläche im Flächenpunkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  dar, d.h. eine in  $(x_0, y_0)$  **total differenzierbare Funktion** ist in einer Umgebung  $U_\rho(\mathbf{r}_0)$  in erster Näherung **linear**, es gilt also für kleine  $\rho$  in  $U_\rho(\mathbf{r}_0)$  die Beziehung

$$\Delta f \approx df. \quad (5.5)$$

bzw. unter Verwendung von (5.2) und (5.3)

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y = df. \quad (5.6)$$

**Definition 5.2** *Sei  $f$  total differenzierbar an der Stelle  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Der lineare Differenzialausdruck*

$$df = f_{x_1}(x_1^0, \dots, x_n^0)\Delta x_1 + \dots + f_{x_n}(x_1^0, \dots, x_n^0)\Delta x_n$$

*heißt das zur Stelle  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  und zu den Argumentenzuwächsen  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$  gehörige totale Differenzial der Funktion  $f$ .*

**Theorem 5.4 (Verallgemeinerte Kettenregel)** *Sei  $u = g(v(x), w(x))$  total differenzierbar in  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Die Funktionen  $v = v(x)$  und  $w = w(x)$  seien stetig differenzierbar in  $]a, b[$ , wobei für  $x \in ]a, b[$  die Funktionswerte  $v = v(x)$  und  $w = w(x)$  in  $G$  liegen mögen. Dann ist die Funktion  $g(v(x), w(x))$  in  $]a, b[$  **stetig differenzierbar** und es gilt:*

$$\frac{dg(v(x), w(x))}{dx} = g_v \frac{dv}{dx} + g_w \frac{dw}{dx}. \quad (5.7)$$

*Speziell erhält man aus (5.7) für eine durch  $F(x, y) = 0$  implizit gegebene Funktion  $y = f(x)$  die Ableitung  $y' = f'(x)$ , falls eine solche existiert, indem man  $g = F$ ,  $v(x) = x$  und  $w(x) = f(x) = y$  setzt:*

$$\frac{dg(v(x), w(x))}{dx} = \frac{dF(x, f(x))}{dx} = F_x + F_y f'(x) = 0 \implies f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{falls } F_y \neq 0.$$

## 5.4 Anwendung des totalen Differenzials in der Fehlerrechnung

Sei eine **total differenzierbare Funktion**  $u = f(x, y)$  gegeben. Die gemessenen Werte für  $x$  und  $y$  seien mit Meßfehlern  $\Delta x$  und  $\Delta y$  behaftet, wobei  $|\Delta x| \leq \tilde{x}$  und  $|\Delta y| \leq \tilde{y}$  gelten möge. Dies zieht Ungenauigkeiten in den Funktionswerten nach sich. Gesucht ist eine obere Schranke für den **absoluten Fehler**

$$|\Delta f| = |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)|.$$

Sind die Schranken  $\tilde{x}$  und  $\tilde{y}$  für die Meßfehler klein, so sind auch die Meßfehler (die Zuwächse  $\Delta x$  und  $\Delta y$ ) klein. Wegen der **totalen Differenzierbarkeit** von  $f$ , kann (5.5) bzw. (5.6) angewendet werden und man erhält eine Abschätzung für den Betrag des **absoluten Fehlers**  $\Delta f$ :

$$|\Delta f| \approx |df| = |f_x \Delta x + f_y \Delta y| \leq |f_x| |\Delta x| + |f_y| |\Delta y| \leq |f_x| \tilde{x} + |f_y| \tilde{y} \quad (5.8)$$

Für den Betrag des **relativen Fehlers** von  $f$  ergibt sich, falls  $f \neq 0$ :

$$\frac{|\Delta f|}{|f|} \approx \frac{|f_x| |\Delta x| + |f_y| |\Delta y|}{|f|}. \quad (5.9)$$

Der **relative Fehler** wird in der Regel in % ausgedrückt.

**Beispiel 5.4** Bei einem Hohlspiegel werden Bildweite  $b = 4 \text{ cm}$  und Gegenstandsweite  $g = 3 \text{ cm}$  gemessen. Berechnen Sie den **absoluten und relativen Fehler** der Brennweite  $f$ , wenn der Meßfehler jeweils  $\pm 0.1 \text{ mm}$  beträgt.

Bekanntlich gilt folgender Zusammenhang zwischen  $b, g$  und  $f$ :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \implies f = \frac{gb}{g+b} \quad f = \frac{12}{7} [\text{cm}]$$

$$\Delta f \approx df = f_b \Delta b + f_g \Delta g \quad f_b = \frac{g^2}{(g+b)^2} = \frac{9}{49} \quad f_g = \frac{b^2}{(g+b)^2} = \frac{16}{49}$$

Die Beziehung (5.8) hat die Gestalt:

$$|\Delta f| \approx |df| = |f_b \Delta b + f_g \Delta g| \leq |f_b| |\Delta b| + |f_g| |\Delta g|.$$

Außerdem ist

$$|\Delta b| = |\Delta g| \leq 10^{-2} [\text{cm}]$$

Für den Betrag des **absoluten Fehlers** erhält man

$$|\Delta f| \leq \left( \frac{9}{49} + \frac{16}{49} \right) 10^{-2} [\text{cm}] \approx 5 \cdot 10^{-3} [\text{cm}]$$

Wegen  $f \approx \left( \frac{12}{7} \pm 5 \cdot 10^{-3} \right) [\text{cm}]$  ergibt sich für den **relativen Fehler** aus (5.9)

$$\frac{|\Delta f|}{|f|} 100\% = \frac{35}{12} \cdot 10^{-1}\% \approx 0.3\%.$$

## 5.5 Extrema ohne Nebenbedingungen

**Definition 5.3** Sei  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$   $P = (x_1, \dots, x_n) \in D(f)$  und  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D(f)$ .

1. Die Funktion  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  besitzt in  $P_0$  ein **lokales Minimum (lokales Maximum)**  $f(P_0)$  gdw eine Umgebung  $U_\rho(P_0) \subset D(f)$  existiert, so dass gilt:

$$f(P) \geq f(P_0) \quad (f(P) \leq f(P_0)) \quad \forall P \in U_\rho(P_0).$$

Falls für alle  $P \in U_\rho(P_0) \setminus \{P_0\}$  eine strenge Ungleichung vorliegt, so spricht man von einem **eigentlichen lokalen Extremum**.

2. Die Funktion  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  besitzt an der Stelle  $P_m (P_M)$  ein **globales Minimum (globales Maximum)**  $f(P_m) (f(P_M))$  gdw gilt:

$$f(P) \geq f(P_m) \quad (f(P) \leq f(P_M)) \quad \forall P \in D(f).$$

Dabei heißen  $f(P_m)$  und  $f(P_M)$  die **globalen Extrema** von  $f$  in  $D(f)$ .

3. Sei  $D(f)$  **abgeschlossen** (d.h. alle Randpunkte gehören zu  $D(f)$ ). Dann heißt  $f(P_0)$  ein **inneres (lokales oder globales) Extremum**, wenn  $f(P_0)$  ein **lokales oder globales Extremum** und  $P_0$  kein Randpunkt von  $D(f)$  ist.
4.  $f(P_0)$  heißt **Randextremum**, wenn  $f(P_0)$  ein **Extremum** und  $P_0$  ein **Randpunkt** von  $D(f)$  ist.

Jedes **globale Extremum** ist gleichzeitig ein **lokales**, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Wie für  $n = 1$  lassen sich **innere lokale Extrema** mit Hilfe der Differenzialrechnung ermitteln. Durch Vergleich dieser **Extrema** mit den Funktionswerten auf dem Rand von  $D(f)$  ergibt sich dann eine Aussage über die **globalen Extrema** von  $f(P)$  auf  $D(f)$ .

**Notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums:**

Sei  $f$  **partiell differenzierbar** in  $D(f)$  und  $P_0 \in D(f)$  kein Randpunkt von  $D(f)$ . Besitzt  $f$  in  $P_0$  ein **inneres lokales Extremum**  $f(P_0)$  so gilt:  $f_{x_i}(P_0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$ .

Für  $n = 2$  und  $P_0 = (x_0, y_0)$  bedeutet die letzte Bedingung:

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0, y_0) = 0. \quad (5.10)$$

Punkte, in denen alle **partiellen Ableitungen 1. Ordnung** gleichzeitig verschwinden, heißen **stationäre Punkte** von  $f$ .

**Hinreichendes Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums:** ( $n = 2$ )

Die Funktion  $u = f(x, y)$  besitze **stetige partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung** in  $P_0 = (x_0, y_0) \in D(f)$ , wobei  $(x_0, y_0)$  kein Randpunkt von  $D(f)$  sei. Wir bezeichnen mit  $K_f(x_0, y_0)$  den Ausdruck

$$K_f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0). \quad (5.11)$$

Außerdem gelte (5.10). Dann ist

- 1°  $f(x_0, y_0)$  ein **eigentl. inn. lok. Min.** für  $f$ , falls  $K_f(x_0, y_0) > 0$  und  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ,
- 2°  $f(x_0, y_0)$  ein **eigentl. inn. lok. Max.** für  $f$ , falls  $K_f(x_0, y_0) > 0$  und  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ,
- 3°  $f(x_0, y_0)$  kein **lokales Extremum** für  $f$ , falls  $K_f(x_0, y_0) < 0$ ,
- 4° keine Aussage möglich, falls  $K_f(x_0, y_0) = 0$ .

Für  $K_f(x_0, y_0) > 0$  besitzen  $f_{xx}$  und  $f_{yy}$  in  $(x_0, y_0)$  wegen (5.11) stets dasselbe Vorzeichen. Gilt (5.10) und  $K_f(x_0, y_0) < 0$ , so heißt  $(x_0, y_0)$  **Sattelpunkt** von  $f$ .

In einem **stationären Punkt**  $(x_0, y_0)$  verläuft die **Tangentialebene** durch den Punkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  parallel zur  $xy$ -Ebene. Ihre Gleichung lautet  $y = f(x_0, y_0)$ . Dies gilt auch, wenn in  $(x_0, y_0)$  ein **inneres lokales Extremum** vorliegt, die Umkehrung ist jedoch i. Allg. nicht richtig.

### Beispiel 5.5 (Stationäre Punkte, Extrema)

- (1)  $u = f(x, y) = x^2 + y^2$   $D(f) = \mathbb{R}^2$   $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , also ist  $(0, 0)$  nach (5.10) ein **stationärer Punkt**. Wegen  $K_f(0, 0) = 4 > 0$  besitzt  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  ein **eigentliches lokales und zugleich globales Minimum**  $f(0, 0) = 0$ .
- (2)  $u = f(x, y) = x^2 - y^2$   $D(f) = \mathbb{R}^2$   $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , also ist  $(0, 0)$  nach (5.10) ein **stationärer Punkt**. Wegen  $K_f(0, 0) = -4 < 0$  besitzt  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  einen **Sattelpunkt**  $f(0, 0) = 0$ . Die Schnittfunktion  $f(x, 0) = \varphi(x) = x^2$  ( $f(0, y) = \psi(y) = -y^2$ ) hat beim Durchgang durch  $(0, 0)$  ein **eigentliches lokales Minimum (Maximum)**. Die **Tangentialebene** verläuft parallel zur  $xy$ -Ebene.
- (3) Bestimmen Sie den Maximalwert der Funktion  $u = f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$  auf dem Dreieck, begrenzt durch die Geraden  $x = 0$ ,  $y = 0$  und  $x + y = 2\pi$ .

Aus dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$f_x(x, y) = \cos x - \cos(x + y) = 0, \quad f_y(x, y) = \cos y - \cos(x + y) = 0$$

erhält man zunächst  $\cos x = \cos y$ , also  $x = y$  und als einzige Lösung der Gleichung  $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$  im **Inneren** des Dreiecks  $(x_0, y_0) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ . Es gibt

also einen **einzigen stationären Punkt**  $(x_0, y_0)$  mit  $f(x_0, y_0) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ . Weiter gilt

$f(x, y) = 0$  auf den Begrenzungsgeraden des Dreiecks. Also ist  $f(x_0, y_0) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$  das **globale Maximum** der Funktion auf dem Dreieck.

- (4)  $u = f(x, y) = (x + y)^2$   $D(f) = \mathbb{R}^2$  Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x + 2y = 0 \\ f_y(x, y) &= 2x + 2y = 0, \end{aligned}$$

besitzt unendlich viele Lösungen, d.h. alle Punkte der Geraden  $y = -x$  sind **stationäre Punkte**, jedoch ist  $K_f = 0$  in all diesen Punkten. Da  $f(x, y) > 0$  für  $y \neq -x$ , liegt in allen Punkten der Geraden ein **globales Minimum** vor (parabolischer Zylinder).

## Die Methode der kleinsten Quadrate

Diese Methode ist eine wichtige Anwendung zur Berechnung von Extrema.

In der  $xy$ -Ebene seien  $N+1$  Punkte  $(x_i, y_i)$  ( $i = 0, \dots, N$ ) mit  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$  gegeben. Gesucht ist eine von  $x$  und  $n$  Parametern  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  ( $n < N$ ) abhängige Funktion  $y = f(x, a_0, \dots, a_{n-1})$ , deren Graph sich möglichst gut den gegebenen Punkten anpasst. Man wählt die Parameter  $a_0, \dots, a_{n-1}$  derart, dass

$$Q(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{j=0}^N [f(x_j, a_0, \dots, a_{n-1}) - y_j]^2$$

minimal wird. Wir betrachten  $Q$  als Funktion von  $n$  Variablen  $a_0, \dots, a_{n-1}$  und wenden, falls  $f$  differenzierbar ist, die Theorie der **lokalen Extrema** an. Die **notwendigen Bedingungen**

$$Q_{a_l}(a_0, \dots, a_{n-1}) = 0 \quad (l = 0, \dots, n-1)$$

liefern dann ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Parameter  $a_0, \dots, a_{n-1}$ . Diese Gleichungen heißen **Normalgleichungen**.

Wählt man speziell  $f$  als ein Polynom in  $x$ , d.h.

$$f(x, a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,$$

dann erhält man mit

$$Q_{a_l}(a_0, \dots, a_{n-1}) = 2 \sum_{j=0}^N \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_j^k - y_j \right) x_j^l = 0 \quad (l = 0, \dots, n-1)$$

als **Normalgleichungssystem**  $n$  lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^N x_j^{n-1} \right) a_{n-1} + \left( \sum_{j=0}^N x_j^{n-2} \right) a_{n-2} + \dots + (N+1) a_0 &= \sum_{j=0}^N y_j \\ \left( \sum_{j=0}^N x_j^n \right) a_{n-1} + \left( \sum_{j=0}^N x_j^{n-1} \right) a_{n-2} + \dots + \left( \sum_{j=0}^N x_j \right) a_0 &= \sum_{j=0}^N y_j x_j \\ \dots &\dots \\ \left( \sum_{j=0}^N x_j^{2n-2} \right) a_{n-1} + \left( \sum_{j=0}^N x_j^{2n-3} \right) a_{n-2} + \dots + \left( \sum_{j=0}^N x_j^{n-1} \right) a_0 &= \sum_{j=0}^N y_j x_j^{n-1}. \end{aligned}$$

Auf Grund der Voraussetzung  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$  ist das **Normalgleichungssystem** stets **eindeutig lösbar**.

Für  $n = 2$  ergibt sich die sogenannte **Ausgleichsgerade**. Die Parameter  $a_0$  und  $a_1$  der **Ausgleichsgeraden** berechnen sich aus dem **linearen Gleichungssystem**:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^N x_j \right) a_1 + (N+1) a_0 &= \sum_{j=0}^N y_j \\ \left( \sum_{j=0}^N x_j^2 \right) a_1 + \left( \sum_{j=0}^N x_j \right) a_0 &= \sum_{j=0}^N y_j x_j. \end{aligned}$$

Die **Ausgleichsgerade** oder auch **Regressionsgerade** ist diejenige Gerade, die sich den  $N + 1$  Messpunkten am besten anpasst.

Für  $n = 3$  ergibt sich die sogenannte **Ausgleichsparabel**. Ihre Parameter  $a_0$ ,  $a_1$  und  $a_2$  berechnen sich aus dem **linearen Gleichungssystem**:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^N x_j^2 \right) a_2 + \left( \sum_{j=0}^N x_j \right) a_1 + (N + 1) a_0 &= \sum_{j=0}^N y_j \\ \left( \sum_{j=0}^N x_j^3 \right) a_2 + \left( \sum_{j=0}^N x_j^2 \right) a_1 + \left( \sum_{j=0}^N x_j \right) a_0 &= \sum_{j=0}^N y_j x_j \\ \left( \sum_{j=0}^N x_j^4 \right) a_2 + \left( \sum_{j=0}^N x_j^3 \right) a_1 + \left( \sum_{j=0}^N x_j^2 \right) a_0 &= \sum_{j=0}^N y_j x_j^2. \end{aligned}$$

Die **Ausgleichsparabel** ist diejenige Parabel, die sich den  $N + 1$  Messpunkten am besten anpasst.

**Beispiel 5.6 (Methode der kleinsten Quadrate)** Vor der Eröffnung einer neuen Mensa wurde in einer Umfrage unter Studenten folgendes Kaufkraftpotenzial (Umsatz in € pro Woche) ermittelt:

Preis pro Portion (in €)	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
Nachfrage (in Portionen)	1000	760	560	400	300

Berechnen Sie mittels eines linearen Ansatzes eine Preis-Absatz-Funktion  $f(x)$ , die die Umfrageergebnisse bestmöglich widerspiegelt. Für welchen Preis  $x_0$  ist der Absatz gleich Null?

Wir bezeichnen mit  $x_j$  den Preis pro Portion und mit  $y_j$  die Nachfrage ( $j = 0, \dots, 4$ ). Zu berechnen ist die **Ausgleichs-** oder **Regressionsgerade**. Die benötigten Summen erhält man aus der Tabelle:

$j$	$x_j$	$y_j$	$x_j^2$	$x_j y_j$
0	1.25	1000	1.56	1250
1	1.50	760	2.25	1140
2	1.75	560	3.06	980
3	2.00	400	4.00	800
4	2.25	300	5.06	675
$\sum$	8.75	3020	15.93	4845

Man erhält

$$\begin{aligned} 8.75 a_1 + 5.00 a_0 &= 3020 \\ 15.93 a_1 + 8.75 a_0 &= 4845, \end{aligned}$$

welches die **eindeutige Lösung**  $a_1 = -713$  und  $a_0 = 1851$  besitzt. Die **Regressionsgerade** lautet also

$$f(x) = -713x + 1851.$$

Sie besitzt die **NS**  $x_0 = 2.60$ , für welche der Absatz gleich Null wird. Ab einem Preis von 2.60 € ist kein Umsatz mehr zu erwarten.



**Beispiel 5.7 (Methode der kleinsten Quadrate)** Ein zeitabhängiger Vorgang werde durch die Funktion  $g(t) = A e^{-Bt}$  beschrieben ( $A > 0$ ). Bestimmen Sie  $A$  und  $B$  aus den Daten

$t_j$	20	40	60	80
$g_j$	2.70	1.50	0.80	0.43

Wir betrachten  $\ln g(t) = \ln A - Bt$  und setzen  $y := \ln g(t)$ ,  $a_0 = \ln A$ ,  $a_1 = -B$ .

$j$	$t_j$	$y_j = \ln g_j$	$t_j^2$	$t_j y_j$
0	20	0.9933	400	19.866
1	40	0.4055	1600	16.220
2	60	-0.2231	3600	-13.386
3	80	-0.8439	6400	-67.512
$\Sigma$	200	0.3318	12000	-44.812

$$\begin{aligned} 200a_1 + 4a_0 &= 0.3318 \\ 12000a_1 + 200a_0 &= -44.812 \end{aligned}$$

$a_1 = -0.0307$ ,  $a_0 = 1.618$ ,  $B = -a_1 = 0.0307$ ,  $A = e^{a_0} = 5.043$ ,  $g(t) = 5.043 e^{-0.0307t}$ .

## 5.6 Extrema unter Nebenbedingungen

Vielfach tritt das Problem auf, Extrema einer Funktion  $u = f(x, y)$  ( $(x, y) \in D(f)$ ) zu bestimmen, wenn  $x$  und  $y$  gleichzeitig noch irgendeiner Nebenbedingung unterliegen, d.h. einer Gleichung  $g(x, y) = 0$  genügen. Man spricht dann von der Bestimmung eines **Extremums mit Nebenbedingungen**.

**Beispiel 5.8** Welcher Punkt der Ebene hat vom Koordinatenursprung das kleinstmögliche Abstandsquadrat und liegt gleichzeitig auf der Geraden, die durch die Gleichung  $3x - y - 1 = 0$  gegeben ist?

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt für das Quadrat des Abstandes eines Punktes vom Koordinatenursprung

$$d^2 = x^2 + y^2.$$

Folglich erhält man für die Funktion, deren Minimum gesucht ist,

$$u = f(x, y) = x^2 + y^2. \quad (5.12)$$

Als Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  fungiert die Geradengleichung

$$3x - y - 1 = 0. \quad (5.13)$$

Die Funktion (5.12) besitzt im Punkt  $(0, 0)$  ein **globales Minimum ohne Nebenbedingungen** (vgl. Beispiel 5.5 (1)).

Geometrisch entspricht der Funktion (5.12) ein Rotationsparaboloid mit der  $u$ -Achse als Rotationsachse. Der Nebenbedingung (5.13) entspricht die Gerade  $y = 3x - 1$  in der  $xy$ -Ebene. Da der gesuchte Extremwert die Gleichung (5.13) erfüllen soll, liegen die möglichen Werte auf der Schnittkurve  $s$  des Paraboloids mit der Ebene, die durch die Gerade  $y = 3x - 1$  hindurchgeht und die senkrecht auf der  $xy$ -Ebene steht. Das Minimum dieser Schnittkurve stellt die gesuchte Lösung des Problems dar.

### Lösungsverfahren für Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

## 1. Die Reduktionsmethode

Die Gleichung für die Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  sei **eindeutig** nach einer der Variablen auflösbar. Wir nehmen an, dass die Gleichung nach  $y$  auflösbar ist:  $y = \psi(x)$ . Dann erhält man durch Einsetzen von  $y = \psi(x)$  in die Ausgangsfunktion  $u = f(x, y)$  eine Funktion  $u = f(x, \psi(x)) = F(x)$ , die nur noch von einer Variablen  $x$  abhängt. Damit ist das Problem auf die Bestimmung von Extremwerten einer Funktion einer Variablen zurückgeführt worden.

Die Anwendung dieser Methode auf den Fall von mehr als zwei Variablen und mehr als zwei Nebenbedingungen ist i. Allg. nicht möglich.

## 2. Die Methode der **Lagrange-Multiplikatoren**

1. *Schritt*: Ermittlung **aller stationären Punkte** der **Lagrange-Funktion**:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (x, y) \in G, \lambda \in \mathbb{R} \ (\lambda \text{ Parameter})$$

### **Notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums**

Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien in  $G$  **total differenzierbar**. Besitzt  $f$  in  $P_0 = (x_0, y_0) \in G$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  ein **lokales Extremum**, wobei  $g_x(x_0, y_0) \neq 0$  oder  $g_y(x_0, y_0) \neq 0$  erfüllt sein möge, dann genügt  $(x_0, y_0)$  den Gleichungen

$$\begin{aligned} L_x(x_0, y_0, \lambda) &= f_x(x_0, y_0) + \lambda g_x(x_0, y_0) = 0, \\ L_y(x_0, y_0, \lambda) &= f_y(x_0, y_0) + \lambda g_y(x_0, y_0) = 0, \\ L_\lambda(x_0, y_0, \lambda) &= g(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

Man erhält also als **notwendige Bedingung** ein System von drei Gleichungen mit den Unbekannten  $x_0, y_0, \lambda$ .

2. *Schritt*: Untersuchung, in welchem der **stationären Punkte** unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  ein **lokales Extremum** von  $f$  vorliegt. **Hinreichende Bedingungen** im Zusammenhang mit der Methode der **Lagrange-Multiplikatoren** sind relativ kompliziert zu formulieren und zu überprüfen. In einfachen Fällen kommt man mit Hilfe geometrischer Überlegungen zum Ziel.

Die Methode der **Lagrange-Multiplikatoren** lässt sich ohne Schwierigkeiten auch auf Funktionen  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  von  $n$  Variablen übertragen, deren **Extremwerte** insgesamt  $k$  Nebenbedingungen ( $1 \leq k \leq n - 1$ ) unterworfen sind.

### **Beispiel 5.9 (Lösung von Beispiel 5.8)**

(1) *Reduktionsmethode*:  $y = 3x - 1$  eingesetzt in (5.12) liefert:

$$u = F(x) = 10x^2 - 6x + 1.$$

Aus  $F'(x) = 20x - 6 = 0$  erhält man  $x_0 = \frac{3}{10}$ . Einsetzen in (5.13) ergibt  $y_0 = -\frac{1}{10}$ . Außerdem ist  $F''(x) > 0$ , also liegt in  $x_0 = \frac{3}{10}$  ein **eigentliches lokales Minimum**, welches gleichzeitig das **globale Minimum** für  $F$  ist, vor:  $F_{\min} = F(x_0) = F\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{1}{10}$ . Dann ist  $(x_0, y_0) = \left(\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right)$  der gesuchte Punkt und man erhält:  $u_{\min}^g = f\left(\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}$ .

(2) Methode der **Lagrange-Multiplikatoren**: Die **Lagrange-Funktion**

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(3x - y - 1) \quad (x, y) \in G, \lambda \in \mathbb{R} (\lambda \text{ Parameter})$$

liefert das Gleichungssystem

$$L_x = 2x + 3\lambda = 0 \quad L_y = 2y - \lambda = 0 \quad L_\lambda = 3x - y - 1 = 0$$

mit der Lösung  $x_0 = \frac{3}{10}$ ,  $y_0 = -\frac{1}{10}$ ,  $\lambda_0 = -\frac{2}{10}$ . Dabei gilt  $g_x(x_0, y_0) = 3 \neq 0$ . Der Punkt  $(x_0, y_0)$  liegt auf der Geraden  $g$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq 0$ . Wir betrachten  $(x_1, y_1) \in g$ , d.h.  $x_1 = x_0 + \alpha = \frac{3}{10} + \alpha$  und  $y_1 = 3(x_0 + \alpha) - 1 = 3\alpha - \frac{1}{10}$ . Dann ist  $f(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{10} + 10\alpha^2 > \frac{1}{10}$ . Folglich liegt an der Stelle  $(x_0, y_0)$  der Geraden  $g$  das **globale Minimum** des Abstandsquadrates vom Koordinatenursprung vor.