

Vorlesungsskript Mathematik II für den Bachelorstudiengang Automobilproduktion

Verfasserin:
HSD Dr. Sybille Handrock
TU Chemnitz
Fakultät für Mathematik
e-mail: handrock@mathematik.tu-chemnitz.de

Wintersemester 2008/09

Literatur

- [1] *Dallmann, H., Elster, K. H.*: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Bd. 3, UTB, Stuttgart, 1992.
- [2] *Dietmaier, C.*: Mathematik für Wirtschaftsingenieure, Fachbuchverlag, Leipzig, 2005.
- [3] *Handrock-Meyer, S.*: Differenzialgleichungen für Einsteiger, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 2007.
- [4] *Heuser, H.*: Gewöhnliche Differenzialgleichungen, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006.
- [5] *Papula, Lothar*: Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Bd. 3, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.

Inhaltsverzeichnis

1	Gewöhnliche Differenzialgleichungen 1. Ordnung	1
1.1	Grundlegende Begriffe	1
1.1.1	Zusammenhang mit der Integration	1
1.1.2	Lösungen und ihre geometrische Interpretation	2
1.2	Einige Beispiele zur Modellierung	5
1.3	Ein grafisches Lösungsverfahren	6
1.4	Differenzialgleichungen mit trennbaren Variablen	7
1.5	Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	8
1.6	Direkte und inverse Probleme	10
2	Lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung	11
2.1	Homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichungen	11
2.2	Lösungsstruktur linearer Gleichungen	12
2.3	Variation der Konstanten	13
2.4	Ein algebraisches Lösungsverfahren	15
2.5	Die Schwingungsgleichung	19
2.6	Anfangs- und Randwertprobleme	23
3	Systeme linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	25
3.1	Homogene und inhomogene lineare Systeme	25
3.2	Lösungsstruktur linearer Systeme	26
3.3	Variation der Konstanten	27
3.4	Ein algebraisches Lösungsverfahren	29
4	Wahrscheinlichkeitsrechnung	33
4.1	Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeit	33
4.1.1	Zufällige Erscheinungen und Ereignisse	33
4.1.2	Relation und Operationen für zufällige Ereignisse	35
4.1.3	Verschiedene Definitionen der Wahrscheinlichkeit	37
4.1.4	Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	41
4.1.5	Die bedingte Wahrscheinlichkeit	42
4.2	Eindimensionale Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktionen	46
4.2.1	Diskrete und stetige Zufallsgrößen	46
4.2.2	Verteilungsfunktion für Zufallsgrößen	47

4.2.3	Parameter von Zufallsgrößen	50
4.3	Spezielle Verteilungen	53
4.3.1	Diskrete Verteilungen	53
4.3.2	Stetige Verteilungen	58
	Stichwortverzeichnis	65

1 Gewöhnliche Differenzialgleichungen 1. Ordnung

1.1 Grundlegende Begriffe

1.1.1 Zusammenhang mit der Integration

Ziel: Vorgänge in der Natur und Technik durch Gesetze und Formeln erfassen und daraus auf Eigenschaften und neue Gesetzmäßigkeiten schließen.

Beispiel 1.1 (Geradlinige gleichförmige Bewegung eines Körpers)

Sie ist als eine Funktion der Zeit t darstellbar:

$$s(t) = v_0 t + s_0.$$

Dabei bezeichnet s_0 den zum Zeitpunkt $t = 0$ zurückgelegten Weg und v_0 eine konstante Geschwindigkeit. Die erste Ableitung der Weg-Zeit-Funktion $s(t)$ ist die Geschwindigkeit $v(t)$ der Bewegung, also $v(t) = s'(t) = v_0$. Die zweite Ableitung liefert die Beschleunigung $a(t)$ der Bewegung: $a(t) = s''(t) = 0$.

Ist nun umgekehrt eine konstante Geschwindigkeit gegeben, so ergibt sich durch Integration der Gleichung $s'(t) = v_0$ wieder das Weg-Zeit-Gesetz der geradlinigen gleichförmigen Bewegung mit der Integrationskonstante s_0 , die einen beliebigen reellen Wert annehmen kann. Dies drückt den aus der Physik bekannten Fakt aus, dass man allein aus der Vorgabe der Geschwindigkeit das Bewegungsgesetz nicht eindeutig ermitteln kann. Mathematisch formuliert heißt das, die Gleichung $s'(t) = v_0$ besitzt keine eindeutige Lösung.

Gegeben: $y'(t) = f(t)$, wobei $f(t)$ bekannt ist, gesucht: $y(t)$ (unbestimmte Integration).

Gegeben: $y'(t) = f(t, y)$, wobei $f(t, y)$ bekannt ist, gesucht: $y(t)$ (Lösung einer Differenzialgleichung).

Bekanntlich nennt man eine Funktion $y(t)$ mit der Eigenschaft

$$y'(t) = f(t) \tag{1.1}$$

Stammfunktion von $f(t)$. Weiter gilt: Ist $f(t)$ stetig in $]a, b[$, so besitzt sie in $]a, b[$ eine Stammfunktion. Da die Ableitung einer Konstanten gleich null ist, gibt es stets unendlich viele Stammfunktionen, die sich voneinander durch eine Konstante unterscheiden. Die Gleichung (1.1) kann als eine einfache gewöhnliche Differenzialgleichung aufgefasst werden. Als Spezialfall ergibt sich für die geradlinige gleichförmige Bewegung $y'(t) = v_0$, wenn die Zeit t die unabhängige Variable ist. Folglich lässt sich das Auffinden aller Lösungen der Differenzialgleichung (1.1) zurückführen auf das Problem des Aufsuchens der Gesamtheit der Stammfunktionen oder des unbestimmten Integrals:

$$y(t) = \int_{t_0}^t f(z) dz + C. \tag{1.2}$$

Dabei ist t_0 eine gewisse fixierte Zahl aus dem Intervall $]a, b[$ und C eine beliebige Konstante. Geometrisch stellt (1.2) eine vom Parameter C abhängige **Kurvenschar** dar, d. h.,

die Eindeutigkeit der Lösung ist nicht gegeben. Dies gilt generell für Differenzialgleichungen.

Die Eindeutigkeit lässt sich aber durch Vorgabe von zusätzlichen Bedingungen erzwingen. Für die Lösungsmenge (1.2) bedeutet dies: Die Konstante C lässt sich eindeutig festlegen, falls die **Lösung** in einem Punkt bekannt ist. Sei $y(t_0) = y_0$ bekannt. Dann ist

$$y(t) = \int_{t_0}^t f(z) dz + y_0 \quad (1.3)$$

diejenige **Lösung**, deren Kurve durch den Punkt (t_0, y_0) hindurchgeht.

Es sei z. B. $y' = 2t$. Aus (1.3) erhält man die Lösung, deren Kurve durch den Punkt (t_0, y_0) hindurchgeht, in der Form

$$y(t) = \int_{t_0}^t 2z dz + y_0 = [z^2]_{t_0}^t + y_0 = t^2 - t_0^2 + y_0.$$

Eine weitere einfache gewöhnliche Differenzialgleichung hat die Form

$$y'(t) = f(y), \quad (1.4)$$

wobei die rechte Seite jetzt von der abhängigen Veränderlichen y abhängt. Um diese Gleichung auf eine solche vom Typ (1.1) zurückzuführen, fordern wir: Es sei $f(y)$ stetig in $]c, d[$ und $f(y) \neq 0$ für alle $y \in]c, d[$. Nach der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion gilt: $y'(t) = \frac{1}{t'(y)}$. Dies gibt uns die Möglichkeit, anstelle von (1.4) die Differenzialgleichung

$$t'(y) = \frac{1}{f(y)} =: g(y) \quad (1.5)$$

zu betrachten, welche, wenn man die Rolle von t und y vertauscht, vom Typ (1.1) ist. Dann besitzt $g(y)$ in $]c, d[$ eine Stammfunktion, und die Gesamtheit der Stammfunktionen

$$t(y) = \int_{y_0}^y g(\tau) d\tau + C \quad (1.6)$$

ist wieder eine **einparametrische Kurvenschar**. Wegen $f(y) \neq 0$ für alle $y \in]c, d[$ wechselt $g(y)$ in diesem Intervall das Vorzeichen nicht. Aus (1.5) folgt dann, dass $t(y)$ streng monoton ist, d.h., es existiert eine eindeutige Umkehrfunktion $y = \varphi(t)$.

1.1.2 Lösungen und ihre geometrische Interpretation

Definition 1.1 Sei I ein Teilintervall von \mathbb{R} . **Lösung** von (1.1) bzw. (1.4) heißt jede Funktion $y = y(t)$, $t \in I$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktion $y = y(t)$ ist in ihrem Definitionsbereich I einmal differenzierbar, d. h., die Funktionen $y(t)$ und $y'(t)$ existieren für alle $t \in I$.
2. Nach Einsetzen von $y(t)$ und $y'(t)$ in die Differentialgleichung (1.1) bzw. (1.4) sind diese Gleichungen für jedes $t \in I$ erfüllt.

Die zu $y = y(t)$ gehörige Kurve in der t, y -Ebene heißt Lösungskurve.

Beispiel 1.2 Lösen Sie die Differentialgleichung vom Typ (1.4):

$$y'(t) = -ky. \tag{1.7}$$

auf der Teilmenge $E = \{(x, y) \mid -\infty < t < +\infty, c < y < d, 0 \notin [c, d]\}$ der Ebene.

Für $y \neq 0$ lässt sich (1.7) in der Form

$$t'(y) = -\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{y} =: g(y)$$

mit $g(y) \neq 0$ schreiben. Integration gemäß Formel (1.6) liefert:

$$t(y) = -\frac{1}{k} \ln |y| + C_1.$$

Zur bequemen Bildung der Umkehrfunktion $y = y(t)$ ist es zweckmäßig, $C_1 = \frac{1}{k} \ln |C|$ zu setzen, wobei C ebenfalls eine beliebige Konstante ist. Dann ergibt sich

$$t(y) = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{C}{y} \right| \quad \implies \quad kt = \ln \left| \frac{C}{y} \right| \quad \implies \quad e^{kt} = \left| \frac{C}{y} \right| = \ln \frac{C}{y}$$

oder

$$y(t) = C e^{-kt} \quad I =] - \infty, +\infty[. \tag{1.8}$$

Da die Konstante C beliebig ist, können die Betragsstriche weggelassen werden.

Somit besitzt die Differentialgleichung (1.7) unendlich viele Lösungen im Sinne der Definition 1.1, welche die Form (1.8) besitzen.

Für Anwendungen ist der Lösungsbegriff gemäß Definition 1.1 zu eng. Es ist oft erforderlich, lineare Differentialgleichungen mit **unstetigem Störglied** zu lösen.

Beispiel 1.3 Ermitteln Sie alle Lösungen der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(t) = g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ 2t & \text{für } 0 \leq t < +\infty. \end{cases} \tag{1.9}$$

Im Intervall $-\infty < t < 0$ besitzt (1.9) unendlich viele Lösungen der Gestalt

$$y(t) = t + C_1 \quad (-\infty < t < 0)$$

und im Intervall $0 \leq t < +\infty$ unendlich viele Lösungen der Form

$$y(t) = t^2 + C_2 \quad (0 \leq t < +\infty).$$

Es ist zu prüfen, ob die unendlich vielen Lösungen auf den Teilintervallen durch Zusammenfügen Lösungen von (1.9) auf dem Intervall $-\infty < t < +\infty$ liefern. Wenn

$$y(t) = \begin{cases} t + C_1 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ t^2 + C_2 & \text{für } 0 \leq t < +\infty \end{cases} \quad (1.10)$$

eine Lösung von (1.9) sein soll, so muss die durch (1.10) gegebene Funktion gemäß Definition 1.1 an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und folglich dort stetig sein. Aus der Stetigkeitsforderung von (1.10) an der Stelle $t = 0$ erhält man $C_1 = C_2$. Es ergibt sich somit

$$y(t) = \begin{cases} t + C_1 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ t^2 + C_1 & \text{für } 0 \leq t < +\infty. \end{cases} \quad (1.11)$$

Allerdings ist die durch (1.11) gegebene Funktion keine Lösung von (1.9) auf dem Intervall $-\infty < t < +\infty$ im Sinne der Definition 1.1, da (1.11) an der Stelle $t = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist, denn dort ist die linksseitige Ableitung gleich eins und die rechtsseitige Ableitung gleich null. Somit besitzt (1.9) im Intervall $-\infty < t < +\infty$ keine Lösung im Sinne von Definition 1.1, jedoch gibt es in den Teilintervallen $-\infty < t < 0$ und $0 \leq t < +\infty$ jeweils unendlich viele Lösungen.

Um auch in solchen Fällen eine Lösung zu erhalten, definieren wir einen allgemeineren Lösungsbegriff.

Definition 1.2 Lösung von (1.1) bzw. (1.4) im erweiterten Sinne heißt jede Funktion $y = y(t)$, $t \in I$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktion $y = y(t)$ ist in ihrem Definitionsbereich I einmal differenzierbar, bis auf gewisse Stellen von I , in denen $y(t)$ nicht differenzierbar ist. Es wird jedoch gefordert, dass dort die einseitigen Ableitungen von $y(t)$ existieren und dass $y(t)$ überall in I stetig ist.
2. Nach Einsetzen von $y(t)$ und $y'(t)$ in die Differenzialgleichung (1.1) bzw. (1.4) sind diese Gleichungen für alle Existenzstellen der Funktion $y'(t)$, $x \in I$, erfüllt.

Bei Verwendung dieses erweiterten Lösungsbegriffes liefert (1.11) im Intervall $-\infty < t < +\infty$ unendlich viele Lösungen der Differenzialgleichung (1.9).

1.2 Einige Beispiele zur Modellierung

Unter Modellierung eines Anwendungsproblems versteht man die mathematische Formulierung des gegebenen Sachverhaltes.

Beispiel 1.4 Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf, die den Zerfall eines radioaktiven Stoffes beschreibt.

Bezeichnet man mit $N(t)$ die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge eines radioaktiven Stoffes und mit $k > 0$ die Zerfallskonstante, so ergibt sich, falls $N(t)$ differenzierbar

$$N'(t) = -kN(t). \quad (1.12)$$

Beispiel 1.5 Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf, die den Abkühlvorgang eines Körpers an der Luft beschreibt. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Außentemperatur T_u in der Umgebung des Körpers konstant sei und vernachlässigen die Maße sowie die spezifische Wärme des Körpers.

Unter diesen Voraussetzungen gilt das NEWTONsche Abkühlungsgesetz für die Temperatur $T(t)$ des Körpers

$$T(t + \Delta t) - T(t) \sim (T(t) - T_u)\Delta T$$

und nach Grenzübergang

$$T'(t) + kT(t) = -kT_u \quad (1.13)$$

mit einer Konstanten $k > 0$.

Beispiel 1.6 Ein Gefäß mit einem Volumen von 20 Litern (l) enthält ein Luftgemisch in der Zusammensetzung 80 % Stickstoff und 20 % Sauerstoff. In das Gefäß wird pro Sekunde 0,1 l Stickstoff eingelassen, der sich im gesamten Volumen des Gefäßes gleichmäßig vermischt. Pro Sekunde entweicht 0,1 l des Gemischs. Stellen Sie eine Differenzialgleichung dieses Vermischungsprozesses auf, unter der Annahme, dass sich während eines kleinen Zeitintervalls Δt die Stickstoffmenge im Gefäß nicht ändere.

Bezeichnet man $y(t)$ die Stickstoffmenge im Gefäß zum Zeitpunkt t , gemessen in Litern, so ergibt sich

$$y'(t) = -\frac{y(t)}{200} + 0.1. \quad (1.14)$$

Beispiel 1.7 Bestimmen Sie alle Kurven, für die die Fläche des Dreiecks, das von der Tangente, der Ordinate des Berührungspunkts und der Abszissenachse gebildet wird, gleich einem konstanten Wert $a^2 > 0$ ist.

Das Problem führt auf die Differenzialgleichung

$$y' = \pm \frac{y^2}{2a^2}. \quad (1.15)$$

1.3 Ein grafisches Lösungsverfahren

Wir betrachten jetzt die allgemeine Form einer Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$$y' = f(t, y). \quad (1.16)$$

Definition 1.3 (Allgemeine Lösung, spezielle Lösung, Cauchy-Problem)

1. Die einparametrische Funktionenschar $y = y(t, C)$ heißt **allgemeine Lösung** von (1.16) in E , wenn bei entsprechender Auswahl der Konstanten C die Funktion y in eine beliebige Lösung dieser gewöhnliche Differenzialgleichung, deren Lösungskurve in E liegt, übergeht.
2. Die Gleichung $\Phi(t, y, C) = 0$ heißt **allgemeines Integral** der von (1.16) in E , wenn sie die **allgemeine Lösung** von (1.16) als implizit gegebene Funktion definiert.
3. Jede **Lösung**, die man durch Einsetzen eines fixierten Wertes für C aus der **allgemeinen Lösung** erhält, heißt **spezielle** oder **partikuläre Lösung** von (1.16).
4. **Cauchy-Problem** oder **Anfangswertproblem (AWP)**: Gesucht ist eine **Lösung** von (1.16), welche im Punkt $t_0 \in]a, b[$ der **Anfangsbedingung (Ab)** $y(t_0) = y_0$ genügt. Dabei ist (t_0, y_0) mit $y(t_0) = y_0$ ein gewisser fixierter Punkt aus E .

Die Funktion $f(t, y)$ sei in einer Teilmenge E der Ebene definiert und eindeutig. Jedem Punkt $(t_0, y_0) \in E$ wird durch die Gleichung (1.16) eine eindeutig bestimmte Richtung $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ zugeordnet. Man trägt im Punkt (t_0, y_0) ein Geradenstück mit dem Anstieg $f(t_0, y_0)$ an und nennt den Punkt mit dem angehefteten Geradenstück **Richtungselement**.

Es sei jetzt $y(t) = \varphi(t)$ eine **Lösung** von (1.16), die durch (t_0, y_0) hindurchgeht. Dann ist $\varphi'(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0))$. Daraus folgt: Der Anstieg der Tangente an die durch (t_0, y_0) hindurchgehende Lösungskurve $\varphi(t)$ hat den Wert $f(t_0, \varphi(t_0)) := \tan \alpha_0$, wobei α_0 der Winkel zwischen dieser Tangente und der positiven Richtung der t -Achse ist.

Definition 1.4 (Richtungsfeld, Isoklinen)

1. Die Gesamtheit der durch (1.16) den Punkten aus E zugeordneten **Richtungselemente** heißt **Richtungsfeld** der Differenzialgleichung (1.16).
2. Die Kurven, die alle Punkte mit gleich großem **Richtungselement** $y' = m$ miteinander verbinden, nennt man **Isoklinen (Neigungslinien)**. Sie bilden eine einparametrische Kurvenschar mit dem Parameter m .

Beispiel 1.8 (Richtungsfeld, Isoklinen)

$$(1) \quad y' = -\frac{t}{y} \quad (0, 0) \notin E. \quad \text{Setzen } y' = m = -\frac{t}{y}.$$

Die **Isoklinenschar** ist die Geradenschar $y = \left(-\frac{1}{m}\right) t$. Wegen $m \left(-\frac{1}{m}\right) = -1$ steht die Tangente an die Lösungskurve in jedem Punkt senkrecht auf der **Isokline**, d.h. die Lösungskurven sind konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt in $(0, 0)$.

$$(2) \quad y' = \frac{y}{t} \quad (0, 0) \notin E. \text{ Setzen } y' = m = \frac{y}{t}.$$

Die **Isoklinenschar** ist die Geradenschar $y = mt$. Sowohl der Anstieg der **Isokline** als auch der Anstieg der Lösungskurve hat den Wert m . Folglich sind die Lösungskurven Halbgeraden, die sämtlich im Punkt $(0, 0)$ münden.

1.4 Differenzialgleichungen mit trennbaren Variablen

Eine **gewöhnliche Differenzialgleichung mit trennbaren Variablen** hat die Gestalt:

$$y' = f_1(t)f_2(y) \quad (f(t, y) = f_1(t)f_2(y)). \quad (1.17)$$

Theorem 1.1 *Es sei $f_1(t)$ stetig in $]a, b[$, $f_2(y)$ stetig und $f_2(y) \neq 0$ in $]c, d[$. Dann geht durch jeden Punkt (t_0, y_0) des Rechtecks $Q = \{(t, y) \mid a < t < b \wedge c < y < d\}$ genau eine Lösungskurve der Differenzialgleichung (1.17) hindurch, d.h., das Anfangswertproblem ist für rechte Seiten der Form (1.17) stets eindeutig lösbar.*

Die *Methode der Variablentrennung* besteht darin, dass alle Terme, die die Variable t enthalten, auf eine Seite und alle Terme, die y enthalten, auf die andere Seite gebracht werden. Dazu stellen wir y' als Differenzialquotienten, den man als Quotienten zweier Differenziale betrachten kann, dar: $y' = \frac{dy}{dt}$. Dann ist

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t)f_2(y) \quad \text{und nach Variablentrennung} \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(t)dt.$$

Integration auf beiden Seiten ergibt

$$\int_{y_0}^y \frac{d\tau}{f_2(\tau)} = \int_{t_0}^t f_1(z) dz + C. \quad (1.18)$$

Die letzte Formel liefert das **allgemeine Integral** mit der Integrationskonstanten C . Falls eine eindeutige Auflösung nach y möglich ist, erhält man die **allgemeine Lösung**.

Bei der Berechnung des **allgemeinen Integrals** (1.18) kann man die Integrationsgrenzen weglassen, denn die Zahlen, die bei Einsetzen der unteren Integrationsgrenzen entstehen, können mit der beliebigen Konstanten C zusammengefasst werden. Man schreibt dann

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(t) dt + C.$$

Beispiel 1.9 (Differenzialgleichung mit trennbaren Variablen)

$$(1) \quad y' = \frac{dy}{dt} = -\frac{t}{y} \implies \int \tau dy = - \int t dt + C \implies \Phi(t, y, C) = t^2 + y^2 - C^2 = 0.$$

Der letzte Ausdruck stellt das **allgemeine Integral** dar.

$$(2) \quad y' = \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \implies \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t} \implies \ln |y| = \ln |t| + \ln |C|.$$

Die Integrationskonstante wurde hier in der Form $\ln |C|$ gewählt, um das Entlogarithmieren, welches zur Auflösung nach y erforderlich ist, einfacher zu gestalten. Man erhält zunächst $|y| = |Ct|$. Aufgrund der Beliebigkeit von C kann man die Betragsstriche weglassen. Die **allgemeine Lösung** hat die Form $y = Ct$.

(3) Bestimmen Sie alle Kurven, bei denen der Schnittpunkt einer beliebigen Tangente mit der Abszissenachse gleich der Hälfte der Abszisse des Berührungspunktes der Tangente an die Kurve ist.

Man erhält die Differenzialgleichung $y' = \frac{2y}{t}$ mit der allgemeinen Lösung $y = Ct^2$.

1.5 Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Eine **lineare gewöhnliche Differenzialgleichung 1. Ordnung** hat die Form

$$y' + a_0(t)y = g(t) \quad (f(t, y) = g(t) - a_0(t)y). \quad (1.19)$$

Theorem 1.2 Die Funktionen $a_0(t)$ und $g(t)$ seien stetig in $I =]a, b[$, $t_0 \in]a, b[$ sei ein fixierter Wert und y_0 eine vorgegebene reelle Zahl. Dann geht durch jeden Punkt $(t_0, y_0) \in E = \{(t, y) \mid a < t < b \wedge -\infty < y < +\infty\}$ genau eine für alle $t \in]a, b[$ definierte Lösungskurve der Differenzialgleichung (1.19) hindurch, d.h., das **AWP** ist unter den getroffenen Voraussetzungen für Differenzialgleichungen der Form (1.19) stets eindeutig lösbar.

Definition 1.5 Gilt für das Störglied in (1.19) $g(t) = 0$ für alle $t \in]a, b[$, d.h. ist

$$y' + a_0(t)y = 0, \quad (1.20)$$

so nennt man die Differenzialgleichung **homogen**. Ist jedoch $g(t) \neq 0$ für wenigstens ein $t \in]a, b[$, dann nennt man (1.19) **inhomogen**. Die Funktion $a_0(t)$ heißt **Koeffizient** der Differenzialgleichung (1.19) bzw. (1.20).

Die **allgemeine Lösung** y_a^{inh} von (1.19) lässt sich stets als Summe einer **speziellen Lösung** y_s^{inh} von (1.19) und der **allgemeinen Lösung** y_a^h von (1.20) darstellen. Diese Eigenschaft gilt bekanntlich auch für lineare algebraische Gleichungssysteme.

Berechnung von y_a^h der Gleichung (1.20):

Diese ist stets eine spezielle Gleichung mit trennbaren Variablen, denn in Formel (1.17) ist hier $f_1(t) = -a_0(t)$ und $f_2(y) = y$. Man erhält das **allgemeine Integral** in der Form

$$\frac{dy}{y} = -a_0(t)dt \implies \ln \left| \frac{y}{C} \right| = - \int a_0(t) dt.$$

Dieses kann im vorliegenden Falle durch Entlogarithmieren stets nach y aufgelöst werden und man erhält die **allgemeine Lösung** der **homogenen Differenzialgleichung** (1.20)

$$y_a^h(t) = C y_s^h(t) \quad \text{mit} \quad y_s^h(t) := e^{-\int a_0(t) dt}. \quad (1.21)$$

Dabei ist $y_s^h(t)$ eine **spezielle Lösung** von (1.20).

Berechnung von y_s^{inh} der Gleichung (1.19):

Wir verwenden einen Lösungsansatz der Form (1.21), wobei $C = C(t)$ gesetzt wird

$$y_s^{inh} = C(t)y_s^h \quad (y_s^{inh})' = C'(t)y_s^h + C(t)(y_s^h)' \quad (1.22)$$

Dabei wird $C(t)$ derart bestimmt, dass $y_s^{inh}(t)$ die Gleichung (1.19) löst. Dieses Verfahren heißt *Variation der Konstanten*.

Einsetzen von (1.22) in (1.19) liefert

$$\begin{aligned} C'(t)y_s^h + C(t)(y_s^h)' + a_0(t)C(t)y_s^h &= g(t) \quad \text{oder nach Umordnung} \\ C'(t)y_s^h + C(t)[(y_s^h)' + a_0(t)y_s^h] &= g(t). \end{aligned}$$

Da $y_s^h(t)$ eine **spezielle Lösung** von (1.20) ist, gilt: $(y_s^h)' + a_0(t)y_s^h = 0$ und man erhält zur Bestimmung von $C(t)$ eine Differenzialgleichung, die auf Typ (1.1) zurückführbar ist:

$$C'(t)y_s^h(t) = g(t).$$

Wegen $y_s^h(t) \neq 0$ ergibt sich nach Integration mit der Integrationskonstanten 0

$$C(t) = \int \frac{g(t)}{y_s^h(t)} dt. \quad (1.23)$$

Einsetzen von (1.23) in die erste Formel in (1.22) ergibt eine **spezielle Lösung** von (1.19)

$$y_s^{inh}(t) = y_s^h(t) \int \frac{g(t)}{y_s^h(t)} dt. \quad (1.24)$$

Addition von $y_s^{inh}(t)$ und $y_a^h(t)$ liefert die allgemeine Lösung $y_a^{inh}(t)$ von (1.19):

$$y_a^{inh} = y_s^{inh} + y_a^h = e^{-\int a_0(t) dt} \int g(t) e^{\int a_0(t) dt} dt + C e^{-\int a_0(t) dt}. \quad (1.25)$$

Bei der Ermittlung der **allgemeinen Lösung** sind die Integrationsgrenzen in (1.25) nicht erforderlich, bei der Lösungsdarstellung des **AWP** sind sie jedoch anzugeben.

Lösungsdarstellung des AWP der Gleichung(1.19) mit der Ab $y(t_0) = y_0$:

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^t a_0(z) dz} \int_{t_0}^t g(z) e^{\int_{t_0}^z a_0(s) ds} dz + y_0 e^{-\int_{t_0}^t a_0(z) dz}. \quad (1.26)$$

Beispiel 1.10 An eine Spule mit einem konstanten ohmschen Widerstand R und einer konstanten Selbstinduktivität L werde zur Zeit $t_0 = 0$ eine Spannung $U = U(t)$ angelegt. Zu ermitteln ist die in der anfangs stromlosen Spule durch den Einschaltvorgang bestimmte Stromstärke $I(t)$. Betrachten Sie **Fall 1:** $U(t) = U_0 = \text{const.}$ und **Fall 2:** $U(t) = U_0 \sin \omega t$.

Nach dem 2. KIRCHHOFFSchen Gesetz erhält man

$$L I'(t) + R I(t) = U(t), \quad \text{wobei } I(0) = 0 \quad \text{gilt.}$$

Fall 1: $I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$

Fall 2: $I(t) = U_0 \frac{(R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) + L\omega e^{-\frac{R}{L}t}}{R^2 + (L\omega)^2}.$

1.6 Direkte und inverse Probleme

Direktes Problem: Ursache \implies Wirkung

Inverses Problem: Wirkung \implies Ursache

In der Theorie der Differentialgleichungen ist die Bestimmung der Lösung der Differentialgleichung ein direktes Problem, während die Ermittlung von in die Differentialgleichung eingehenden Parametern in der Regel ein inverses Problem darstellt.

Beispiel 1.11 *In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf 100°C erhitzt wurde, bei einer Außentemperatur von 0°C auf 25°C ab, wenn er sich in 10 Minuten bis auf 50°C abkühlt? Dabei werde angenommen, dass die Abkühlgeschwindigkeit des Körpers proportional der Temperaturdifferenz von Körper und Außentemperatur sei.*

Das direkte Problem ist ein Anfangswertproblem der Form

$$T'(t) = -kT(t), \quad T(0) = 100$$

(vgl. Beispiel 1.5 für $T_u = 0$). Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$T(t) = 100 e^{-kt}. \tag{1.27}$$

Das inverse Problem besteht in der Ermittlung des Parameters k aus der Zusatzinformation $T(10) = 50$.

Einsetzen dieser Bedingung in (1.27) liefert eine nichtlineare Bestimmungsgleichung für k in der Form: $50 = 100 e^{-k \cdot 10}$, woraus durch Logarithmieren $k = \frac{\ln 2}{10}$ folgt. Ersetzen des Wertes für k in (1.27) liefert

$$T(t) = 100 e^{-\frac{\ln 2}{10}t} = 100 (e^{\ln 2})^{-\frac{t}{10}} = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}. \tag{1.28}$$

Berechnung der Abkühlzeit:

Die Frage in der Aufgabenstellung lautet: Wann hat sich der Körper auf 25°C abgekühlt? Hier ist der Wert t gesucht, für den $T(t) = 25$ gilt. Einsetzen des Temperaturwertes in (1.28) ergibt $25 = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}$ oder $2^{-2} = 2^{-\frac{t}{10}}$. woraus $t = 20$ Minuten folgt.

2 Lineare Differenzialgleichungen n -ter Ordnung

2.1 Homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichungen

Definition 2.1 Ein Differenzialausdruck der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \quad (2.1)$$

heißt **lineare** Differenzialgleichung n -ter Ordnung ($n > 1$). Analog zu **linearen** Differenzialgleichungen 1. Ordnung heißt ein Differenzialausdruck der Form (2.1) **inhomogene lineare** Differenzialgleichung n -ter Ordnung und ein Differenzialausdruck der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \quad (2.2)$$

die zu (2.1) **homogene lineare** Differenzialgleichung n -ter Ordnung. Die Funktionen $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$ nennt man die Koeffizienten der linearen Differenzialgleichung, während $g(t)$ Störglied heißt.

Definition 2.2 Sei I ein Teilintervall von \mathbb{R} . **Lösung** von (2.1) bzw. (2.2) heißt jede Funktion $y = y(t)$, $t \in I$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktion $y = y(t)$ ist in ihrem Definitionsbereich I n -fach differenzierbar, d. h., die Funktionen $y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)$ existieren für alle $t \in I$ bis zur Ordnung n einschließlich.
2. Nach Einsetzen von $y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)$ in die Differenzialgleichung (2.1) bzw. (2.2) sind diese Gleichungen für jedes $t \in I$ erfüllt.

Die zu $y = y(t)$ gehörige Kurve in der t, y -Ebene heißt Lösungskurve.

Die Lösung einer Differenzialgleichung 1. Ordnung hängt von einer willkürlichen Konstanten C ab, während die Lösung der Differenzialgleichung (2.1) bzw. (2.2) von n willkürlichen Konstanten C_1, C_2, \dots, C_n abhängt.

Definition 2.3 (Allgemeine Lösung, spezielle Lösung, Cauchy-Problem)

1. Jede Lösung $y = y(t, C_1, \dots, C_n)$ der Differenzialgleichung (2.1) bzw. (2.2), die n willkürliche Konstanten (oder Parameter) C_1, \dots, C_n enthält und die Eigenschaft besitzt, dass sich jede beliebige Lösung von (2.1) bzw. (2.2) durch spezielle Wahl dieser Konstanten ergibt, heißt **allgemeine Lösung** der Differenzialgleichung (2.1) bzw. (2.2).
2. Jede Lösung, die man aus der allgemeinen Lösung durch Einsetzen fixierter Werte für C_1, \dots, C_n erhält, heißt **spezielle Lösung** oder **partikuläre Lösung** von (2.1) bzw. (2.2).

3. **Cauchy-Problem oder Anfangswertproblem (AWP):** Gesucht ist eine Lösung von (2.1) bzw. (2.2), welche im Punkt $t_0 \in]a, b[$ den Anfangsbedingungen (**Abn**) $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ genügt. Dabei sind $t_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ vorgegebene Zahlen, die **Anfangsdaten** heißen. Die Zahlen $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ heißen **Anfangswerte** der Lösung $y = y(t)$, die Zahl t_0 **Anfangswert der unabhängigen Variablen**.

Auch für diesen Gleichungstyp gibt es einen speziellen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Theorem 2.1 Die Funktionen $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ und $g(t)$ seien stetig sowie beschränkt in $I =]a, b[, t_0 \in]a, b[$ sei ein fixierter Wert und $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ seien vorgegebene reelle Zahlen. Dann geht durch jeden Punkt $(t_0, y_0) \in E = \{(t, y) \mid a < t < b \wedge -\infty < y < +\infty\}$ genau eine für alle $t \in]a, b[$ definierte Lösungskurve der Differenzialgleichung (2.1) bzw. (2.2) hindurch, für deren Ableitungen gilt: $y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$, d.h., das Anfangswertproblem ist unter den getroffenen Voraussetzungen für Differenzialgleichungen der Form (2.1) bzw. (2.2) stets eindeutig lösbar.

Wie für lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung setzt sich die **allgemeine Lösung** $y_a^{inh}(t)$ der **inhomogenen** Gleichung (2.1) aus der **allgemeinen Lösung** $y_a^h(t)$ der zugehörigen **homogenen** Gleichung (2.2) und einer speziellen Lösung $y_s^{inh}(t)$ der **inhomogenen** Gleichung (2.1) zusammen.

Jedoch lässt sich die Methode der Variablentrennung, mit der wir die **allgemeine Lösung** der **homogenen** linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung (1.18) bestimmt hatten, nicht zur Ermittlung von $y_a^h(t)$ der Gleichung (2.2) verwenden. Unser nächstes Ziel ist deshalb die Bestimmung von $y_a^h(t)$.

2.2 Lösungsstruktur linearer Gleichungen

Definition 2.4 Ein System von n **speziellen Lösungen** y_1, y_2, \dots, y_n einer **homogenen** linearen Differenzialgleichung n -ter Ordnung der Form (2.2) heißt ein **Fundamentalsystem** von (2.2) genau dann, wenn die Determinante

$$W_G(t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

gebildet aus den n Lösungen und ihren Ableitungen bis zur Ordnung $n - 1$ einschließlich für alle Werte von t aus dem gemeinsamen Definitionsbereich der Lösungsfunktionen von null verschieden ist. Die Determinante $W_G(t)$ heißt **WRONSKISCHE** Determinante der Differenzialgleichung (2.2).

Beispiel 2.1 Zeigen Sie, dass die Funktionen $y_1(t) = e^t$ und $y_2(t) = e^{-t}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differenzialgleichung $y''(t) - y(t) = 0$ bilden, während die Funktionen $\tilde{y}_1(t) = 2e^t$ und $\tilde{y}_2(t) = 3e^t$ kein Fundamentalsystem für diese Differenzialgleichung darstellen.

Theorem 2.2 Es sei $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ ein **Fundamentalsystem** spezieller Lösungen der **homogenen** linearen Differenzialgleichung (2.2) und y_s^{inh} eine spezielle Lösung der **inhomogenen** linearen Differenzialgleichung (2.1). Dann hat die **allgemeine Lösung** von (2.2) die Form

$$y_a^h(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n y_n(t), \quad (2.3)$$

während die **allgemeine Lösung** von (2.1) die Gestalt

$$y_a^{inh}(t) = y_a^h(t) + y_s^{inh}(t) \quad (2.4)$$

besitzt. Dabei sind C_1, C_2, \dots, C_n beliebige Konstanten.

Sind Anfangsbedingungen gemäß Definition 2.3 3. gegeben, so sind nach Satz 2.1 die Konstanten C_1, C_2, \dots, C_n eindeutig bestimmbar.

2.3 Variation der Konstanten

Ist ein **Fundamentalsystem** bekannt, so lässt sich die Methode der **Variation der Konstanten** zur Bestimmung einer speziellen Lösung $y_s^{inh}(t)$ der **inhomogenen** Differenzialgleichung, die wir für **lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung** kennen gelernt hatten, übertragen.

Ausgangspunkt ist die Lösungsdarstellung (2.3) für die **homogene** Differenzialgleichung (2.2). Wie bei linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung ersetzen wir die Konstanten C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) in (2.3) durch Funktionen $C_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) und versuchen, diese so zu bestimmen, dass sich eine spezielle Lösung $y_s^{inh}(t)$ von (2.1) ergibt:

$$y_s^{inh}(t) = C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2 + \dots + C_n(t)y_n. \quad (2.5)$$

Einsetzen von (2.5) in die inhomogene Differenzialgleichung (2.1) liefert nur eine einzige Gleichung zur Bestimmung von n unbekannt Funktionen $C_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), wobei sich sehr umfangreiche Ausdrücke ergeben würden. Um dies zu vermeiden, suchen wir $n - 1$ weitere Gleichungen aus der Forderung, dass in den Ableitungen des Lösungsansatzes (2.5) bis zur Ordnung $n - 1$ keine Ableitungen der Funktionen $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ mehr auftreten. Den Ansatz (2.5) differenziert man nach der Produktregel:

$$(y_s^{inh})' = \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i'(t) + \sum_{i=1}^n C_i'(t)y_i(t). \quad (2.6)$$

Gemäß unserer Forderung setzen wir

$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) + \dots + C_n'(t)y_n(t) = 0. \quad (2.7)$$

Die Gleichung (2.6) hat nun die Form

$$(y_s^{inh})' = \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i'(t).$$

Nochmalige Differenziation des letzten Ausdrucks liefert

$$(y_s^{inh})'' = \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i''(t) + \sum_{i=1}^n C_i'(t)y_i'(t). \quad (2.8)$$

Gemäß unserer Forderung setzen wir wieder

$$C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) + \dots + C_n'(t)y_n'(t) = 0 \quad (2.9)$$

und erhalten

$$(y_s^{inh})'' = \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i''(t).$$

Auf diese Weise berechnen wir die Ableitungen der gesuchten Funktion $y_s^{inh}(t)$ bis zur $(n-1)$ -ten Ordnung einschließlich. Es ergibt sich

$$(y_s^{inh})^{(k)} = \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i^{(k)}(t) \quad (k = 0, \dots, n-1), \quad (2.10)$$

$$(y_s^{inh})^{(n)} = \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n C_i'(t)y_i^{(n-1)}(t). \quad (2.11)$$

In der Ableitung n -ter Ordnung bleibt die erste Summe erhalten. Setzt man die Ableitungen aus (2.10) und (2.11) in die **inhomogene** Differenzialgleichung (2.1) ein, so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i'(t)y_i^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i^{(n-1)}(t) \\ + \dots + a_0(t) \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i(t) = g(t) \end{aligned}$$

oder nach Umordnung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i(t)[y_i^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y_i^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y_i(t)] \\ + \sum_{i=1}^n C_i'(t)y_i^{(n-1)}(t) = g(t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die erste Summe in (2.12) verschwindet, weil die Funktionen $y_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) sämtlich Lösungen der **homogenen** Differenzialgleichung (2.2) sind. Aus (2.7), (2.9) und der zweiten Zeile in (2.12) erhält man ein lineares Gleichungssystem bezüglich der Unbekannten $C_i'(t)$ ($i = 1, \dots, n$) in der Form

$$\begin{aligned} C_1' y_1 &+ C_2' y_2 &+ \dots &+ C_n' y_n &= 0 \\ C_1' y_1' &+ C_2' y_2' &+ \dots &+ C_n' y_n' &= 0 \\ \dots &\dots &\dots &\dots &\dots \\ C_1' y_1^{(n-1)} &+ C_2' y_2^{(n-1)} &+ \dots &+ C_n' y_n^{(n-1)} &= g. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems ist gerade die WRONSKISCHE *Determinante* der Differenzialgleichung (2.2), welche nirgends verschwindet, da $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ ein **Fundamentalsystem** von (2.2) ist. Folglich ist das lineare Gleichungssystem bezüglich der Unbekannten $C'_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) eindeutig lösbar. Integriert man die gefundenen Ausdrücke für $C'_i(t)$ nach t und setzt die Integrationskonstanten gleich null, so erhält man die gesuchten Funktionen $C_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$). Einsetzen der $C_i(t)$ in den Lösungsansatz (2.5) liefert die gesuchte spezielle Lösung $y_s^{inh}(t)$. Addiert man dazu $y_a^h(t)$, so ergibt sich die **allgemeine Lösung** von (2.1) in der Form (2.4).

Beispiel 2.2 Berechnen Sie die **allgemeine Lösung** der Differenzialgleichung

$$y''(t) - y(t) = \sin t.$$

$$y_a^{inh}(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \sin t.$$

2.4 Ein algebraisches Lösungsverfahren

Die Konstruktion eines Fundamentalsystems, bestehend aus elementaren Funktionen, ist i. Allg. nicht möglich. In den Anwendungen können jedoch die Koeffizienten sehr oft in erster Näherung als konstant angesehen werden. Deshalb untersuchen wir im Weiteren den wichtigen Spezialfall der Gleichungen (2.1) und (2.2) mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t) \quad (2.14)$$

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (2.15)$$

Für Gleichungen der Form (2.15) lässt sich stets ein Fundamentalsystem in elementaren Funktionen angeben und zwar ohne Integration durch rein algebraische Operationen.

Konstruktion eines Fundamentalsystems für (2.15)

Wir suchen eine Lösung der **homogenen** linearen Differenzialgleichung (2.15) in der Form $y(t) = e^{\lambda t}$, wobei λ ein noch zu bestimmender i. Allg. komplexer Parameter ist. Setzt man den Lösungsansatz und seine Ableitungen $y^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$ für $k = 1, 2, \dots, n$ in die Gleichung (2.15) ein, so erhält man nach Ausklammern des für alle t von Null verschiedenen Faktors $e^{\lambda t}$

$$(\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0.$$

Somit ist die letzte Gleichung (und auch (2.15)) genau dann erfüllt, wenn

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

gilt. Wir setzen

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (2.16)$$

und nennen $P(\lambda)$ das **charakteristische Polynom** der Differenzialgleichung (2.15). Die Gleichung $P(\lambda) = 0$ heißt **charakteristische Gleichung**. Der Grad von $P(\lambda)$ stimmt

mit der Ordnung der Differenzialgleichung (2.15) überein. Damit ist die Lösung von (2.15) auf die Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$, also auf die Lösung einer algebraischen Gleichung, zurückgeführt.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra kann ein Polynom n -ten Grades höchstens n voneinander verschiedene reelle oder komplexe Nullstellen besitzen. Die Nullstellen können einfach (mit der Vielfachheit $s = 1$) oder auch mehrfach (mit einer Vielfachheit $s > 1$) auftreten. Es sei \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen. Die Zahl $s_i \in \mathbb{N}$ nennt man Vielfachheit der Nullstelle λ_i von $P(\lambda)$, wenn sie die größte natürliche Zahl ist, für die $(\lambda - \lambda_i)^{s_i}$ ein Teiler von $P(\lambda)$ ist. Wir unterscheiden vier Fälle:

Fall 1: Es sei λ eine reelle Nullstelle der Vielfachheit 1. Dann ist $y_1(t) = e^{\lambda t}$ die zum Fundamentalsystem gehörende spezielle Lösung, die dieser Nullstelle entspricht.

Fall 2: Es sei λ eine reelle Nullstelle der Vielfachheit $s > 1$. Dann sind $y_1(t) = e^{\lambda t}$, $y_2(t) = t e^{\lambda t}$, \dots , $y_s(t) = t^{s-1} e^{\lambda t}$ die zum Fundamentalsystem gehörenden speziellen Lösungen, die dieser Nullstelle entsprechen.

Fall 3: Es sei $\lambda = \alpha + i\beta$ eine komplexe Nullstelle der Vielfachheit $s = 1$. Da $P(\lambda)$ reelle Koeffizienten besitzt, ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms mit der Vielfachheit $s = 1$. Dann sind $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$, $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$ die zum Fundamentalsystem gehörenden speziellen Lösungen, die einem Paar zueinander konjugiert komplexer Nullstellen der Vielfachheit $s = 1$ entsprechen.

Fall 4: Es sei $\lambda = \alpha + i\beta$ eine komplexe Nullstelle der Vielfachheit $s > 1$. Dann sind

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\alpha t} \cos \beta t, & y_2(t) &= e^{\alpha t} \sin \beta t, \\ y_3(t) &= t e^{\alpha t} \cos \beta t, & y_4(t) &= t e^{\alpha t} \sin \beta t, \\ &\dots & & \dots \\ y_{2s-1}(t) &= t^{s-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, & y_{2s}(t) &= t^{s-1} e^{\alpha t} \sin \beta t \end{aligned}$$

die zum Fundamentalsystem gehörenden speziellen Lösungen, die einem Paar zueinander konjugiert komplexer Nullstellen der Vielfachheit $s > 1$ entsprechen.

Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ist gleich dem Grad n des charakteristischen Polynoms. Deshalb lässt sich die **allgemeine Lösung** der **homogenen** Gleichung (2.15) als Linearkombination von n **speziellen Lösungen** gemäß Fall 1 - 4 mit n beliebigen Konstanten darstellen. Man kann zeigen, dass dabei für alle $t \in]a, b[$ stets $W_G(t) \neq 0$ gilt.

Speziell sind für $n = 2$ nur die ersten drei Fälle möglich:

Fall 1: Besitzt $P_2(\lambda)$ zwei voneinander verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so bilden die Funktionen $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ und $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ ein Fundamentalsystem, denn die WRONSKISCHE *Determinante*

$$W_G(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

ist wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ verschieden von null. Dann hat die **allgemeine Lösung** die Gestalt

$$y_a^h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Fall 2: Besitzt $P_2(\lambda)$ eine reelle Nullstelle λ_1 der Vielfachheit $s = 2$, so bilden die Funktionen $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ und $y_2(t) = t e^{\lambda_1 t}$ ein Fundamentalsystem, denn die WRONSKISCHE Determinante

$$W_G(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & (1 + \lambda_1 t) e^{\lambda_1 t} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 t}$$

verschwindet für kein $t \in \mathbb{R}$. Die **allgemeine Lösung** hat nun die Gestalt

$$y_a^h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}.$$

Fall 3: Besitzt $P_2(\lambda)$ ein Paar zueinander konjugiert komplexe Zahlen $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$, (α, β reell und $\beta \neq 0$) als Nullstellen, so bilden die Funktionen $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ und $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ ein Fundamentalsystem, denn die WRONSKISCHE Determinante

$$W_G(t) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \sin \beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t) & e^{\alpha t}(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha t}$$

verschwindet nirgends. Die **allgemeine Lösung** ist von der Form

$$y_a^h(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Beispiel 2.3 Bestimmen Sie die **allgemeine Lösung** der Differenzialgleichung

$$y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0.$$

$$\begin{aligned} y_a^h(t) &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t \\ &+ C_5 t \cos t + C_6 t \sin t. \end{aligned}$$

Methode der Störgliedansätze für (2.14)

Die Methode der Variation der Konstanten aus Abschn. 2.3 ist natürlich auch für **inhomogene** Differenzialgleichungen der Form (2.14) anwendbar. Jedoch für gewisse Störglieder, z. B. $g(t) = e^{2t}(t+1)\cos 3t$, lässt sich eine spezielle Lösung $y_s^{inh}(t)$ der **inhomogenen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten** durch Lösungsansätze, die unbestimmte Koeffizienten enthalten, angeben. Die unbestimmten Koeffizienten kann man durch Koeffizientenvergleich eindeutig ermitteln. Somit gewinnt man auch die **allgemeine Lösung** von (2.14) durch ein rein algebraisches Verfahren. Es ist für folgende Formen von Störgliedern anwendbar.

Fall 1: Das Störglied habe die Gestalt:

$$g(t) = e^{\gamma t} q_m(t), \tag{2.17}$$

wobei $q_m(t) = q_m t^m + q_{m-1} t^{m-1} + \dots + q_1 t + q_0$ ein Polynom m -ten Grades mit bekannten Koeffizienten und $\gamma \in \mathbb{R}$. Der zugehörige Lösungsansatz lautet

$$y_s^{inh}(t) = e^{\gamma t} t^k Q_m(t).$$

Dabei bezeichnet $Q_m(t) = Q_m t^m + Q_{m-1} t^{m-1} + \dots + Q_1 t + Q_0$ ein Polynom m -ten Grades mit noch zu bestimmenden Koeffizienten. Ist γ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms (2.16) der **homogenen** Differenzialgleichung (2.15), so setzen wir $k = 0$. Ist jedoch γ eine Nullstelle von (2.16), so wird die Zahl k gleich der Vielfachheit s dieser Nullstelle gesetzt.

Um die unbekanntenen Koeffizienten in den Lösungsansätzen zu ermitteln, setzt man diese in die Differenzialgleichung (2.14) ein und vergleicht die Koeffizienten bei gleichen Potenzen von t . Es lässt sich zeigen, dass das entstehende lineare algebraische Gleichungssystem stets eindeutig lösbar ist.

Fall 2: Das Störglied habe die Gestalt:

$$g(t) = e^{\alpha t} (q_{m_1}(t) \cos \beta t + r_{m_2}(t) \sin \beta t), \quad (2.18)$$

wobei $q_{m_1}(t)$ bzw. $r_{m_2}(t)$ Polynome vom Grade m_1 bzw. m_2 bezeichnen und die Zahlen α, β reell sind. Der zugehörige Lösungsansatz lautet

$$y_s^{inh}(t) = e^{\alpha t} t^k (Q_{m_0}(t) \cos \beta t + R_{m_0}(t) \sin \beta t).$$

Dabei sind $Q_{m_0}(t)$ und $R_{m_0}(t)$ Polynome vom Grade $m_0 = \max(m_1, m_2)$ mit noch zu bestimmenden Koeffizienten. Ist $\alpha + i\beta$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms (2.16) der **homogenen** Differenzialgleichung (2.15), so setzen wir $k = 0$. Ist jedoch $\alpha + i\beta$ eine Nullstelle von (2.16), so wird die Zahl k gleich der Vielfachheit s dieser Nullstelle gesetzt.

Die unbekanntenen Koeffizienten in den Polynomen $Q_{m_0}(t)$ und $R_{m_0}(t)$ berechnet man wieder durch Einsetzen des Lösungsansatzes in die Differenzialgleichung (2.14) und Koeffizientenvergleich analog zum **Fall 1**.

Fall 3: Das Störglied habe die Gestalt:

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) + \dots + g_l(t), \quad (2.19)$$

wobei die Funktionen $g_i(t)$ ($i = 1, \dots, l$) die Form (2.17) bzw. (2.18) besitzen. Der zugehörige Lösungsansatz lautet

$$y_s^{inh}(t) = y_{s1}^{inh}(t) + y_{s2}^{inh}(t) + \dots + y_{sl}^{inh}(t),$$

wobei die Funktionen $y_{si}^{inh}(t)$ ($i = 1, \dots, l$) spezielle Lösungen der **inhomogenen** Differenzialgleichungen

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g_i(t) \quad (i = 1, \dots, l).$$

sind. Die **allgemeine Lösung** der Gleichung (2.14) mit dem Störglied (2.19) lautet

$$y_a^{inh}(t) = y_a^h(t) + \sum_{i=1}^l y_{si}^{inh}(t).$$

Beispiel 2.4 Berechnen Sie die **allgemeine Lösung** der *Differenzialgleichung*

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3t} t + e^{3t} \cos 2t. \quad (2.20)$$

$$y_s^{inh}(t) = y_a^h(t) + y_{s1}^{inh}(t) + y_{s2}^{inh}(t),$$

mit

$$y_a^h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} + C_3.$$

$$y_{s1}^{inh}(t) = \frac{1}{18} (t^3 - t^2) e^{3t}$$

$$y_{s2}^{inh}(t) = -e^{3t} \left(\frac{3}{52} \cos 2t + \frac{1}{26} \sin 2t \right).$$

2.5 Die Schwingungsgleichung

Mechanische und elektrische Schwingungen werden im einfachsten Fall durch eine lineare gewöhnliche Differenzialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Bezeichnet t die Zeit, so schreibt man mit $a_2 > 0$, $a_1 \geq 0$ und $a_0 > 0$

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t). \quad (2.21)$$

Dabei bedeuten $a_2 y''(t)$ eine Trägheitskraft, $a_1 y'(t)$ eine Reibungs- oder Dämpfungskraft, $a_0 y(t)$ eine Rückstellkraft und $g(t)$ eine äußere Kraft.

Ist $g(t) = 0$ für alle $t \geq 0$, so ist die Differenzialgleichung **homogen** und man spricht von einer **Eigenschwingung**.

Ist $g(t) \neq 0$ für wenigstens ein $t \geq 0$, so ist die Differenzialgleichung **inhomogen** und man spricht von einer **erzwungenen Schwingung**, die durch eine äußere Kraft aufgeprägt wird.

Ist $a_1 = 0$, d.h., der Prozess verläuft **ohne Reibung** bzw. **ohne Dämpfung**, so spricht man von einer **ungedämpften Schwingung**.

Ist $a_1 > 0$, d.h., der Prozess verläuft **mit Reibung** bzw. **mit Dämpfung**, so spricht man von einer **gedämpften Schwingung**.

Es sei y_0 die Anfangsauslenkung und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Schwingungsprozesses zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Folgende Anfangsbedingungen sind von praktischer Bedeutung:

- (1) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ Gleichgewichtslage,
- (2) $y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$ Auslenkung ohne Anstoß,
- (3) $y(0) = 0, \quad y'(0) = v_0$ Anstoß ohne Auslenkung,
- (4) $y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$ Auslenkung mit Anstoß.

Die zu (2.21) homogene Differenzialgleichung mit den (homogenen) Anfangsbedingungen (1) liefert die triviale Lösung $y(t) = 0$ für alle t , d.h., ohne Anfangsauslenkung

und Anfangsimpuls sowie ohne Einwirkung äußerer Kräfte verbleibt das System in der Gleichgewichts- oder Ruhelage. Jedoch ergibt die inhomogene Differenzialgleichung (2.21) mit den Anfangsbedingungen (1) eine nichttriviale Lösung, da das System durch die äußere Kraft aus der Ruhelage gebracht wird.

Wir schreiben (2.21) in der Form

$$y''(t) + \frac{a_1}{a_2}y'(t) + \frac{a_0}{a_2}y(t) = \frac{g(t)}{a_2}.$$

Mit Einführung der Bezeichnungen

$$\frac{a_1}{a_2} = 2\delta \quad \frac{a_0}{a_2} = \omega_0^2 \quad \frac{g(t)}{a_2} = u(t)$$

ergibt sich die Differenzialgleichung

$$y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = u(t). \tag{2.22}$$

1. Ungedämpfte Eigenschwingungen ($\delta = 0$ und $u(t) = 0$ für alle $t \geq 0$)

Wir lösen das Anfangswertproblem

$$y'' + \omega_0^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = v_0 \quad (\text{Anstoß ohne Auslenkung}).$$

Die charakteristische Gleichung lautet $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$. Sie besitzt die Nullstellen $\lambda_{1/2} = \pm i\omega_0$. Die allgemeine Lösung und ihre 1. Ableitung lauten

$$\begin{aligned} y_a^h(t) &= C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \\ (y_a^h(t))' &= -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen in (2.23) ergibt $C_1 = 0$ und $C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$.

Somit ist $y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$ die Lösung des Anfangswertproblems. Sie stellt einen Schwingungsvorgang mit der Eigenfrequenz ω_0 dar. Das Geschwindigkeitsgesetz lautet $y'(t) = v_0 \cos \omega_0 t$. Ungedämpfte Eigenschwingungen sind Idealisierungen, die in der Praxis nur näherungsweise realisierbar sind.

2. Gedämpfte Eigenschwingungen ($\delta > 0$ und $u(t) = 0$ für alle $t \geq 0$)

Wir lösen wieder das Anfangswertproblem

$$y'' + 2\delta y' + \omega_0^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = v_0 \quad (\text{Anstoß ohne Auslenkung}).$$

Die charakteristische Gleichung lautet $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$. Sie besitzt die Lösungen $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Es sind drei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: Starke Dämpfung für $\delta > \omega_0$ (**Kriechfall**)

Wir setzen $\Omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Offensichtlich gilt $\Omega < \delta$. Für $\delta > \omega_0$ gibt es zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen der charakteristischen Gleichung: $\lambda_1 = -\delta + \Omega < 0$ und

$\lambda_2 = -\delta - \Omega < 0$, wobei $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\Omega$ gilt. Die allgemeine Lösung und ihre 1. Ableitung lauten

$$\begin{aligned} y_a^h(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ (y_a^h(t))' &= \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen in (2.24) ergibt $C_1 = \frac{v_0}{2\Omega}$ und $C_2 = -\frac{v_0}{2\Omega}$.

Somit stellt $y(t) = \frac{v_0}{2\Omega}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$ das Bewegungsgesetz bei den vorgegebenen Anfangsbedingungen dar. Infolge der starken Dämpfung ($\delta > \omega_0$) kommt kein Schwingungsvorgang zustande. Als Geschwindigkeitsgesetz erhält man $y'(t) = \frac{v_0}{2\Omega}(\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t})$.

Fall 2: Mittlere Dämpfung für $\delta = \omega_0$ (**aperiodischer Grenzfall**)

Für $\delta = \omega_0$ gibt es eine reelle Lösung der Vielfachheit $s = 2$ der charakteristischen Gleichung: $\lambda_1 = -\delta < 0$. Die allgemeine Lösung und ihre 1. Ableitung lauten nun

$$\begin{aligned} y_a^h(t) &= (C_1 + C_2 t)e^{-\delta t} \\ (y_a^h(t))' &= C_2 e^{-\delta t} - \delta(C_1 + C_2 t)e^{-\delta t}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen in (2.25) ergibt $C_1 = 0$ und $C_2 = v_0$.

Somit ist $y(t) = v_0 t e^{-\delta t}$ die Lösung des Anfangswertproblems. Auch im Grenzfall $\delta = \omega_0$ tritt noch kein Schwingungsvorgang auf. Als Geschwindigkeitsgesetz ergibt sich $y'(t) = v_0(1 - \delta t)e^{-\delta t}$.

Fall 3: Schwache Dämpfung für $\delta < \omega_0$ (**Schwingfall**)

Wir setzen $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Für $\delta < \omega_0$ gibt es ein Paar zueinander konjugiert komplexer Lösungen der **charakteristischen Gleichung**: $\lambda_1 = -\delta + i\omega$ und $\lambda_2 = -\delta - i\omega$. Die allgemeine Lösung und ihre 1. Ableitung lauten jetzt

$$\begin{aligned} y_a^h(t) &= e^{-\delta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \\ (y_a^h(t))' &= -\delta e^{-\delta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \\ &+ e^{-\delta t}(-\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen in (2.26) ergibt $C_1 = 0$ und $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$.

Somit ist $y(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t$ die Lösung des Anfangswertproblems. Für $\delta < \omega_0$ kommt das System zum Schwingen. Dies gilt auch für das Geschwindigkeitsgesetz $y'(t) = \frac{v_0}{\omega}(\omega \cos \omega t - \delta \sin \omega t)e^{-\delta t}$. Die Amplituden der Schwingungen nehmen exponentiell ab. Sie sind nach oben durch die Funktion $z(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\delta t}$ und nach unten durch die Funktion $-z(t)$ beschränkt.

3. Ungedämpfte erzwungene Schwingungen ($\delta = 0$ und $u(t) \neq 0$)

Wir betrachten den Fall einer periodischen äußeren Kraft der Form $u(t) = a \sin \omega_1 t$ und lösen das Anfangswertproblem

$$y'' + \omega_0^2 y = u(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (\text{Ruhelage})$$

Die äußere Kraft zwingt dem mit der Eigenfrequenz ω_0 schwingenden System ihre Frequenz ω_1 auf. Zunächst bestimmen wir eine spezielle Lösung y_s^{inh} der inhomogenen Differenzialgleichung

$$y'' + \omega_0^2 y = a \sin \omega_1 t$$

nach der Methode der Störgliedansätze. In Formel (2.18) ist dann $q_{m1} = 0$ und $r_{m2} = a$ für alle $t \geq 0$, mit $m_0 = \max(m_1, m_2) = 0$, $\alpha = 0$ und $\beta = \omega_1$. Der Lösungsansatz lautet deshalb

$$y_s^{inh}(t) = t^k (Q_0 \cos \omega_1 t + R_0 \sin \omega_1 t),$$

wobei die Koeffizienten Q_0 und R_0 noch zu ermitteln sind und der Exponent k davon abhängt, ob $i\omega_1$ Lösung der charakteristischen Gleichung ist oder nicht. Wir betrachten zwei Fälle.

Fall 1: $\omega_1 \neq \omega_0$

Dann ist $i\omega_1$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung, also $k = 0$ und der Lösungsansatz vereinfacht sich zu

$$y_s^{inh}(t) = Q_0 \cos \omega_1 t + R_0 \sin \omega_1 t.$$

Einsetzen von $y_s^{inh}(t)$ und der zweiten Ableitung

$$(y_s^{inh}(t))'' = -\omega_1^2 (Q_0 \cos \omega_1 t + R_0 \sin \omega_1 t)$$

in die inhomogene Differenzialgleichung liefert eine Gleichung zur Bestimmung von Q_0 und R_0 :

$$Q_0(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos \omega_1 t + R_0(\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin \omega_1 t = a \sin \omega_1 t.$$

Daraus folgt $Q_0 = 0$, $R_0 = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$ und

$$y_s^{inh}(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t.$$

Diese Funktion ist beschränkt für alle $t \geq 0$.

Fall 2: $\omega_1 = \omega_0$

Dann ist $i\omega_1$ eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung der Vielfachheit $s = 1$, also ist $k = 1$ und der Lösungsansatz lautet

$$y_s^{inh}(t) = t(Q_0 \cos \omega_1 t + R_0 \sin \omega_1 t).$$

Wie im Fall 1 berechnet man mit $\omega_1 = \omega_0$ die Koeffizienten $Q_0 = -\frac{a}{2\omega_0}$, $R_0 = 0$ und

$$y_s^{inh}(t) = -\frac{a}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t.$$

Diese Funktion wächst für $t \rightarrow \infty$ über alle Grenzen.

Die allgemeine Lösung im Falle erzwungener Schwingungen ohne Dämpfung ergibt sich mit $y_a^h(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$ zu

$$y_a^{inh}(t) = \begin{cases} y_a^h(t) + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t & \text{für } \omega_1 \neq \omega_0 \\ y_a^h(t) - \frac{a}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t & \text{für } \omega_1 = \omega_0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Einsetzen der allgemeinen Lösung in die Anfangsbedingungen liefert wieder ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von C_1 und C_2 . Für $\omega_1 \neq \omega_0$ erhält man $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{\omega_1 a}{\omega_0 \omega_0^2 - \omega_1^2}$ und für $\omega_1 = \omega_0$ ergibt sich $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{a}{2\omega_0^2}$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(t) = \begin{cases} \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \left(\sin(\omega_1 t) - \frac{\omega_1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) & \text{für } \omega_1 \neq \omega_0 \\ \frac{a}{2\omega_0} \left(\frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} - t \cos \omega_0 t \right) & \text{für } \omega_1 = \omega_0. \end{cases}$$

Im Falle $\omega_1 \neq \omega_0$ kommt es zur Überlagerung der Schwingung mit der Eigenfrequenz ω_0 und der Schwingung mit der Frequenz ω_1 , hervorgerufen durch die äußere Kraft. Wir betrachten nur den Spezialfall, dass ω_0 und ω_1 nahezu gleich sind. Die Überlagerung führt dann auf eine Schwingung mit periodisch schwankender Amplitude, die als **Schwebung** bezeichnet wird. Dieses Phänomen tritt z.B. auf, wenn zwei Stimmgabeln von annähernd gleicher Frequenz gleichzeitig angestimmt werden.

Im Falle $\omega_1 = \omega_0$ fällt die Frequenz der periodischen äußeren Kraft mit der Eigenfrequenz des Systems zusammen. Die Amplitude der Schwingung wird aufgrund des Terms $t \cos(\omega_0 t)$ in der Lösung mit wachsendem t immer größer. Diese Erscheinung wird als **Resonanz** bezeichnet. Durch das Aufschaukeln der Amplitude werden Instabilitäten erzeugt, die zur Zerstörung des Systems führen können (Schwingungen in Autos).

2.6 Anfangs- und Randwertprobleme

Für $n > 1$ sind außer den Anfangsbedingungen noch andere Zusatzinformationen möglich.

Definition 2.5 Werden bei einer Differenzialgleichung für die Lösung bzw. für deren Ableitungen

1. an einer einzigen Stelle ihres Definitionsbereiches zusätzliche Bedingungen vorgegeben, so spricht man von **Anfangsbedingungen**,
2. an mehreren Stellen ihres Definitionsbereiches zusätzliche Bedingungen vorgegeben, so spricht man von **Randbedingungen**.

Eine Differenzialgleichung zusammen mit

1. Anfangsbedingungen nennt man ein **Anfangswertproblem**,

2. Randbedingungen nennt man ein **Randwertproblem**.

Beispiel 2.5 Berechnen Sie die Lösung der linearen gewöhnlichen Differenzialgleichung 2. Ordnung $y''(t) = 0$ unter verschiedenen Zusatzbedingungen.

Allgemeine Lösung: $y_a^h(t) = C_1 t + C_2$. Geometrisch stellt sie eine zweiparametrische Kurvenschar dar. **Lösung** ist jede Gerade in der t, y -Ebene mit Ausnahme von Geraden parallel zur y -Achse. Zur Festlegung der willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 geben wir auf verschiedene Art und Weise jeweils zwei Zusatzbedingungen vor.

(1) Anfangsbedingungen

Nach dem oben Gesagten sind für $n = 2$ in einem Punkt t_0 Bedingungen der Form $y(t_0) = y_0$ und $y'(t_0) = y'_0$ vorzugeben. Für die betrachtete Differenzialgleichung heißt das geometrisch: Es ist die spezielle Gerade gesucht, die durch den Punkt (t_0, y_0) hindurchgeht und den Anstieg $y'(t_0) = y'_0$ besitzt.

Einsetzen der ersten sowie der zweiten Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung liefert ein lineares algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung von C_1 und C_2 :

$$\begin{aligned} y(t_0) &= C_1 t_0 + C_2 = y_0 \\ y'(t_0) &= C_1 = y'_0. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man $C_1 = y'_0$ und aus der ersten $C_2 = y_0 - y'_0 t_0$. Das lineare algebraische Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Die gesuchte Gerade existiert also und ist durch die Funktion $y(t) = y'_0 t + y_0 - y'_0 t_0$ darstellbar, welche die Differenzialgleichung und die Anfangsbedingungen erfüllt.

(2) Randbedingungen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Vorgabe von zwei Randbedingungen.

a) $y(t_1) = y_1, \quad y(t_2) = y_2, \quad t_1 \neq t_2$

Geometrisch bedeutet diese Vorgabe: Es ist die spezielle Gerade gesucht, die durch die Punkte (t_1, y_1) und (t_2, y_2) hindurchgeht. Klar ist, dass eine solche Gerade existiert, was sich auch rechnerisch nachweisen lässt. Setzt man nämlich die beiden Randbedingungen in die allgemeine Lösung ein, so erhält man das lineare algebraische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y(t_1) &= C_1 t_1 + C_2 = y_1 \\ y(t_2) &= C_1 t_2 + C_2 = y_2, \end{aligned}$$

welches eindeutig lösbar ist. Man erhält eine Gerade mit dem Anstieg $C_1 = \frac{y_1 - y_2}{t_1 - t_2}$ und dem Ordinatenabschnitt $C_2 = \frac{y_2 t_1 - y_1 t_2}{t_1 - t_2}$ und überprüft durch Einsetzen, dass die Lösung

$$y(t) = \frac{y_1 - y_2}{t_1 - t_2} t + \frac{y_2 t_1 - y_1 t_2}{t_1 - t_2}$$

die Differenzialgleichung und die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt, d. h., das vorgegebene Randwertproblem ist eindeutig lösbar.

b) $y'(t_1) = y'_1, \quad y'(t_2) = y'_2, \quad t_1 \neq t_2, \quad y'_1 \neq y'_2.$

mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei heißt \mathbf{A} die Koeffizientenmatrix ($a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$) und $\mathbf{g}(t)$ das Störglied. Die Funktionen $y_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), zusammengefasst zu einer Vektorfunktion $\mathbf{y}(t)$, sind die Unbekannten im System.

Definition 3.2 Sei I ein Teilintervall von \mathbb{R} . **Lösung** von (3.1) bzw. (3.2) heißt jedes System von n Funktionen $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ ($t \in I$) mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktionen $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ seien in ihrem Definitionsbereich I einmal differenzierbar.
2. Nach Einsetzen von $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ und ihrer Ableitungen in das System (3.1) bzw. (3.2) sind diese Gleichungen für jedes $t \in I$ erfüllt.

Definition 3.3 Cauchy-Problem oder Anfangswertproblem:

Gesucht ist eine Lösung $\mathbf{y}(t)$ von (3.1) bzw. (3.2), welche im Punkt $t_0 \in I =]a, b[$ die Anfangsbedingungen $y_1(t_0) = y_1^0, y_2(t_0) = y_2^0, \dots, y_n(t_0) = y_n^0$ erfüllt, d.h., es gilt

$$\mathbf{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}.$$

Theorem 3.1 Die Funktionen $g_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) seien stetig sowie beschränkt in $I =]a, b[$. Ferner sei $t_0 \in]a, b[$ und $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine Lösung $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ von (3.1) bzw. (3.2), für die gilt:

$$\mathbf{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix},$$

d.h., das Anfangswertproblem ist für **lineare Systeme** der Form (3.1) bzw. (3.2) stets eindeutig lösbar.

3.2 Lösungsstruktur linearer Systeme

Definition 3.4 Ein System von n speziellen Lösungsvektoren

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{21}(t) \\ \vdots \\ y_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2(t) = \begin{pmatrix} y_{12}(t) \\ y_{22}(t) \\ \vdots \\ y_{n2}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \mathbf{y}^n(t) = \begin{pmatrix} y_{1n}(t) \\ y_{2n}(t) \\ \vdots \\ y_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

eines **homogenen linearen Systems** der Form $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$ heißt ein **Fundamentalsystem** von $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$ genau dann, wenn die Determinante

$$W_S(t) := \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \dots & y_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}, \quad (3.5)$$

gebildet aus den n Lösungsvektoren für alle Werte von t aus dem gemeinsamen Definitionsbereich der Lösungsfunktionen von Null verschieden ist. Die Determinante $W_S(t)$ nennt man **WRONSKISCHE Determinante** des **linearen Systems** $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$.

Dabei bezeichnet $y_{ij}(t)$ die i -te Koordinate des Lösungsvektors $\mathbf{y}^j = \mathbf{y}^j(t)$.

Beispiel 3.1 Gegeben seien die Vektorfunktionen

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^3(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ -2e^t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektorpaare $\{\mathbf{y}^1(t), \mathbf{y}^2(t)\}$ und $\{\mathbf{y}^2(t), \mathbf{y}^3(t)\}$ Fundamentalsysteme des homogenen linearen Systems

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathbf{y}(t) \iff \begin{cases} y_1'(t) = -\frac{1}{3}y_1(t) + \frac{2}{3}y_2(t) \\ y_2'(t) = \frac{4}{3}y_1(t) + \frac{1}{3}y_2(t) \end{cases}$$

bilden, während das Vektorenpaar $\{\mathbf{y}^1(t), \mathbf{y}^3(t)\}$ kein Fundamentalsystem für das homogene lineare System darstellt.

Theorem 3.2 Es sei $\mathbf{y}^n(t)$ ein **Fundamentalsystem** spezieller Lösungsvektoren des **homogenen linearen Systems** (3.2) und \mathbf{y}_s^{inh} eine spezieller Lösungsvektor des **inhomogenen linearen Systems** (3.1). Dann hat die **allgemeine Lösung** von (3.2) die Form

$$\mathbf{y}_a^h(t) = C_1 \mathbf{y}^1(t) + C_2 \mathbf{y}^2(t) + \dots + C_n \mathbf{y}^n(t), \quad (3.6)$$

während die **allgemeine Lösung** von (3.1) die Gestalt

$$\mathbf{y}_a^{inh}(t) = \mathbf{y}_a^h(t) + \mathbf{y}_s^{inh}(t) \quad (3.7)$$

besitzt. Dabei sind C_1, C_2, \dots, C_n beliebige Konstanten.

3.3 Variation der Konstanten

Zur Ermittlung einer speziellen Lösung \mathbf{y}_s^{inh} des **linearen inhomogenen Systems** modifizieren wir die Methode der Variation der Konstanten aus Abschn. 2.3.

Ausgangspunkt ist die Lösungsdarstellung (3.6) für das **homogene** System (3.2). Wie bei linearen Differenzialgleichungen n -ter Ordnung ersetzen wir die Konstanten C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) in (3.6) durch Funktionen $C_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) und versuchen, diese so zu bestimmen, dass sich eine spezielle Lösung $\mathbf{y}_s^{inh}(t)$ von (3.1) ergibt:

$$\mathbf{y}_s^{inh}(t) = C_1(t)\mathbf{y}^1(t) + C_2(t)\mathbf{y}^2(t) + \dots + C_n(t)\mathbf{y}^n(t). \quad (3.8)$$

In Koordinatenschreibweise erhält man

$$\begin{pmatrix} (y_1)_s^{inh} \\ (y_2)_s^{inh} \\ \vdots \\ (y_n)_s^{inh} \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix} + \dots + C_n(t) \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Ableitungen $C'_i(t)$ der unbekanntenen Funktionen $C_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) berechnet man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n C'_i(t)y_{ki}(t) = g_k(t) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Integriert man die Funktionen $C'_i(t)$ und setzt die $C_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) in (3.8) ein, so erhält man eine spezielle Lösung des Systems (3.1). Addiert man zu dieser speziellen Lösung gemäß (3.7) noch $\mathbf{y}_a^h(t)$, so ergibt sich die **allgemeine Lösung** $\mathbf{y}_a^{inh}(t)$ des **inhomogenen linearen Systems** (3.1).

Beispiel 3.2 Berechnen Sie die **allgemeine Lösung** des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + t \\ y_2' &= 4y_1 - 3y_2 + 2 \end{aligned}$$

mithilfe der Konstantenvariation und lösen Sie das Anfangswertproblem mit den Anfangsbedingungen: $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{y}_a^h(t) = C_1\mathbf{y}^1(t) + C_2\mathbf{y}^2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Diese allgemeine Lösung wird später berechnet.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_a^{inh}(t) &= \mathbf{y}_s^{inh}(t) + \mathbf{y}_a^h(t) \\ &= \begin{pmatrix} 3t - 7 \\ 4t - 10 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3t + 7)e^{-t} + 3t - 7 \\ (6t + 11)e^{-t} + 4t - 10 \end{pmatrix}.$$

3.4 Ein algebraisches Lösungsverfahren

Um ein Fundamentalsystem für das lineare System $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t)$ mit einer konstanten quadratischen Matrix zu ermitteln, betrachten wir einen Lösungsansatz der Form $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x} e^{\lambda t}$, wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein konstanter Vektor und λ eine reelle oder komplexe Zahl ist und bilden die erste Ableitung: $\mathbf{y}'(t) = \lambda \mathbf{x} e^{\lambda t}$. Einsetzen dieser beiden Ausdrücke in das lineare System liefert:

$$\lambda \mathbf{x} e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{x} e^{\lambda t}.$$

Nach Kürzen des von null verschiedenen Terms $e^{\lambda t}$ ergibt sich $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. Dies ist die Ausgangsgleichung für die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren. Folglich führt das Problem der Konstruktion eines Fundamentalsystems für lineare Systeme auf die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der konstanten quadratischen Matrix \mathbf{A} . Mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren wird ein Fundamentalsystem aus n Lösungsvektoren konstruiert. Wir bezeichnen mit s_i die Vielfachheit der Nullstelle λ_i des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ und mit $m_i = n - r_i$ die Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren, die zum Eigenwert λ_i gehören.

Ist ein Fundamentalsystem bekannt, so lässt sich auch die allgemeine Lösung $\mathbf{y}_a^h(t)$ des homogenen linearen Systems angeben. Da die Eigenwerte reell oder komplex sein können, einfach oder mehrfach auftreten, sind bei der Konstruktion eines Fundamentalsystems folgende Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: Alle Eigenwerte von \mathbf{A} seien reell und voneinander verschieden.

Dann gehört zu jedem Eigenwert genau ein Eigenvektor. Es sei \mathbf{x}^i , ($i = 1, \dots, n$) der zum Eigenwert λ_i gehörende Eigenvektor. Man erhält ein Fundamentalsystem der Gestalt

$$\mathbf{y}^1(t) = \mathbf{x}^1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{y}^2(t) = \mathbf{x}^2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \mathbf{y}^n(t) = \mathbf{x}^n e^{\lambda_n t}$$

oder in Koordinatenschreibweise

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \mathbf{y}^2(t) = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}, \dots, \mathbf{y}^n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} e^{\lambda_n t}$$

und die **allgemeine Lösung** in der Form

$$\mathbf{y}_a^h(t) = C_1 \mathbf{y}^1(t) + C_2 \mathbf{y}^2(t) + \dots + C_n \mathbf{y}^n(t).$$

Beispiel 3.3 (Einfache reelle Nullstellen)

Geben Sie für das System in Beispiel 3.1 ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung an.

$$\mathbf{y}_a^h(t) = C_1 \mathbf{y}^1(t) + C_2 \mathbf{y}^2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Fall 2: Ein oder mehrere reelle Eigenwerte treten mehrfach auf.

Es sei $r_i = r(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}_n)$ und $m_i = n - r_i$ die Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren, die zum Eigenwert λ_i gehören. Der Fall $m_i > s_i$ ist nicht möglich. Also sind die Fälle $m_i = s_i$ und $m_i < s_i$ zu unterscheiden.

Fall 2.1: Es sei λ_i ein Eigenwert der Vielfachheit s_i und $m_i = s_i$. Da s_i linear unabhängige Eigenvektoren \mathbf{x}^j ($j = 1, \dots, s_i$) zu λ_i gehören, hat der zu λ_i gehörige Lösungsanteil die Gestalt:

$$\mathbf{y}(t) = (C_1 \mathbf{x}^1 + C_2 \mathbf{x}^2 + \dots + C_{s_i} \mathbf{x}^{s_i}) e^{\lambda_i t}.$$

Wir erhalten also s_i Lösungsvektoren zum Eigenwert λ_i der Vielfachheit s_i , die in das Fundamentalsystem eingehen.

Beispiel 3.4 (Mehrfache reelle Nullstellen und $m_i = s_i$)

Geben Sie für das lineare homogene System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned}.$$

ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung an.

$$\mathbf{y}_a^h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^t \end{pmatrix}.$$

Fall 2.2: Es sei λ_i ein Eigenwert der Vielfachheit s_i und $m_i < s_i$. Da nur $m_i < s_i$ linear unabhängige Eigenvektoren zu λ_i gehören, erhalten wir, wenn wir wie oben vorgehen, nur m_i Lösungsvektoren zum Eigenwert λ_i der Vielfachheit s_i . Wir benötigen aber s_i solcher Lösungsvektoren, die in das Fundamentalsystem eingehen. Um dies zu erreichen, suchen wir den zu λ_i gehörigen Lösungsanteil in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^i(t) &= \sum_{l=0}^{s_i-m_i} \mathbf{v}^{l+1} t^l e^{\lambda_i t} = (\mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2 t + \dots + \mathbf{v}^{s_i-m_i+1} t^{s_i-m_i}) e^{\lambda_i t} \\ &= \begin{pmatrix} v_{11} + v_{12}t + \dots + v_{1(s_i-m_i+1)} t^{s_i-m_i} \\ v_{21} + v_{22}t + \dots + v_{2(s_i-m_i+1)} t^{s_i-m_i} \\ \vdots \\ v_{n1} + v_{n2}t + \dots + v_{n(s_i-m_i+1)} t^{s_i-m_i} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dieser Lösungsansatz wird in das Differenzialgleichungssystem eingeführt. Mittels eines Koeffizientenvergleichs bei gleichen t -Potenzen in der rechten und linken Seite ergibt sich ein lineares algebraisches Gleichungssystem bezüglich der Unbekannten $v_{11}, \dots, v_{n(s_i-m_i+1)}$, dessen allgemeine Lösung zu bestimmen ist. Diese hängt von s_i beliebigen Konstanten C_p ($p = 1, \dots, s_i$) ab, wobei s_i die Vielfachheit des Eigenwertes λ_i ist. Ordnet man den Lösungsansatz (3.9) nach diesen Konstanten C_p ($p = 1, \dots, s_i$), so erhält man die benötigten s_i Lösungsvektoren, die den zu λ_i gehörigen Lösungsanteil eines Fundamentalsystems bilden.

Beispiel 3.5 (Mehrfache reelle Nullstellen und $m_i < s_i$)

Geben Sie für das lineare homogene System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 3y_2 \end{aligned}.$$

ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung an (vgl. Beispiel 3.2).

$$\mathbf{y}_a^h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Fall 3: Ein Eigenwert ist komplex und einfach.

Da die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} nur reelle Einträge besitzt, gilt: Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ ein einfacher komplexer Eigenwert, so ist ihre konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ ebenfalls ein einfacher komplexer Eigenwert der Matrix \mathbf{A} .

Man geht wie unter **Fall 1** vor. Mit dem (komplexen) Lösungsansatz

$$\mathbf{z}^1 = \mathbf{u}^1 e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad \mathbf{z}^2 = \mathbf{u}^2 e^{(\alpha-i\beta)t}$$

erhält man jedoch jetzt die Eigenvektoren \mathbf{u}^1 und \mathbf{u}^2 ebenfalls als zueinander konjugiert komplexe Terme. Es genügt, einen der Lösungsvektoren, z. B. \mathbf{z}^1 , der zu $\lambda = \alpha + i\beta$ gehört, zu berechnen. Den zweiten Lösungsvektor \mathbf{z}^2 , der dem konjugiert komplexen Eigenwert $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ entspricht, braucht man nicht auszurechnen. Er ist durch den konjugiert komplexen Ausdruck zu \mathbf{z}^1 gegeben.

Die beiden Lösungsvektoren \mathbf{z}^1 und \mathbf{z}^2 bilden den zum Paar zueinander konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda = \alpha + i\beta$ und $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ gehörenden Lösungsanteil eines Fundamentalsystems. Damit wäre das Problem formal gelöst.

Wir suchen aber eine Darstellung der Lösungen nur durch reelle Terme. Dies erreicht man mit folgendem Trick. Wir setzen

$$\operatorname{Re} \mathbf{z}^1(t) =: \mathbf{y}^1(t) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \mathbf{z}^1(t) =: \mathbf{y}^2(t).$$

Dann ist $\mathbf{z}^1(t) = \mathbf{y}^1(t) + i\mathbf{y}^2(t)$. Einsetzen dieses Ausdrucks in das homogene lineare System $\mathbf{z}' = \mathbf{A} \mathbf{z}$ liefert:

$$(\mathbf{y}^1)' + i(\mathbf{y}^2)' = \mathbf{A}(\mathbf{y}^1 + i\mathbf{y}^2) = \mathbf{A} \mathbf{y}^1 + i\mathbf{A} \mathbf{y}^2.$$

Zwei komplexe Ausdrücke sind genau dann gleich, wenn ihre Realteile und ihre Imaginärteile übereinstimmen, d.h. es gilt

$$(\mathbf{y}^1)' = \mathbf{A} \mathbf{y}^1 \quad \text{und} \quad (\mathbf{y}^2)' = \mathbf{A} \mathbf{y}^2.$$

Damit ist sowohl \mathbf{y}^1 als auch \mathbf{y}^2 eine Lösung des homogenen linearen Systems. Es erweist sich, dass auch diese beiden Lösungen den zum Paar zueinander konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda = \alpha + i\beta$ und $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ gehörenden Lösungsanteil eines Fundamentalsystems

repräsentieren. Es ist jetzt nur noch der Real- und Imaginärteil von $\mathbf{z}^1(t)$ zu berechnen. Dazu setzen wir

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{x}^1 + i\mathbf{x}^2, \quad (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \text{ reell}), \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{x}^1 - i\mathbf{x}^2, \quad (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \text{ reell}).$$

Somit ist $\mathbf{x}^1 = \operatorname{Re} \mathbf{u}^1$ und $\mathbf{x}^2 = \operatorname{Im} \mathbf{u}^1$. Verwendet man noch die EULERSche *Formel*

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

und die Multiplikationsregel für komplexe Zahlen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^1(t) &= (\mathbf{x}^1 + i\mathbf{x}^2) e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \\ &= e^{\alpha t} [\mathbf{x}^1 \cos \beta t - \mathbf{x}^2 \sin \beta t] + i e^{\alpha t} [\mathbf{x}^1 \sin \beta t + \mathbf{x}^2 \cos \beta t]. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= \operatorname{Re} \mathbf{z}^1(t) = e^{\alpha t} [\mathbf{x}^1 \cos \beta t - \mathbf{x}^2 \sin \beta t] \\ \mathbf{y}^2(t) &= \operatorname{Im} \mathbf{z}^1(t) = e^{\alpha t} [\mathbf{x}^1 \sin \beta t + \mathbf{x}^2 \cos \beta t]. \end{aligned}$$

die gesuchte reelle Form der Lösung.

Beispiel 3.6 (Einfache komplexe Nullstellen)

Geben Sie für das lineare homogene System

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - y_2 \\ y_2' &= 5y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung an.

Die Lösungsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1 &= \operatorname{Re} \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} e^{3t} \cos 2t \\ e^{3t} (\cos 2t + 2 \sin 2t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \mathbf{y}^2 &= \operatorname{Im} \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} e^{3t} \sin 2t \\ e^{3t} (\sin 2t - 2 \cos 2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

bilden ein Fundamentalsystem. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_a^h(t) &= C_1 \mathbf{y}^1(t) + C_2 \mathbf{y}^2(t) \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} \cos 2t + C_2 e^{3t} \sin 2t \\ C_1 e^{3t} (\cos 2t + 2 \sin 2t) + C_2 e^{3t} (\sin 2t - 2 \cos 2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung des Systems.

Fall 4: Mehrfache komplexe Eigenwerte (nur für $n \geq 4$ möglich)

Ist $\lambda = \alpha + i\beta$ ein s -facher komplexer Eigenwert, so verfährt man wie bei einem reellen s -fachen Eigenwert und nimmt dann als Lösungsanteile von λ und $\bar{\lambda}$ Real- und Imaginärteil des berechneten Lösungsvektors.

4 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die moderne Industrieproduktion ist auf die Anfertigung hoher Stückzahlen von Erzeugnissen mit gleichen Qualitätsmerkmalen ausgerichtet. Gefordert sind effektive und genaue Methoden zur Gütekontrolle der Produkte und damit des Arbeitsprozesses. Vollständige Information ergäbe sich bei einer hundertprozentigen Prüfung der gesamten Produktion. Dies ist ökonomisch nicht vertretbar und bei zerstörenden Prüfverfahren nicht möglich.

Einige Aufgabenstellungen

1. Kontrolle einer bestimmten Materialeigenschaft

Zur Bestimmung des mittleren Durchmessers eines Werkstücks wird eine Anzahl von Proben untersucht, wobei die Messergebnisse in Form von Tabellen erfasst werden.

2. Kontrolle der Arbeitsweise einer Maschine

Aus der Menge der von einer bestimmten Maschine hergestellten Teile werden Proben entnommen und auf ihre Maßhaltigkeit untersucht.

Es sind Verfahren erforderlich, die eine ausreichend genaue Schlussfolgerung aus Einzelmessungen auf die Gesamtmenge erlauben. Diese liefert die mathematische Statistik.

Unterschied zu früher üblichen Verfahren (die im wesentlichen Prozentwerte lieferten):

Mit Hilfe von Methoden der mathematischen Statistik kann man nicht nur aus einer Anzahl von Einzelmessungen Schätzungen für charakteristische Parameter der Gesamtmenge angeben, sondern gleichzeitig Aussagen über Genauigkeit und Sicherheit einer solchen Schätzung treffen. Methoden der mathematische Statistik basieren auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

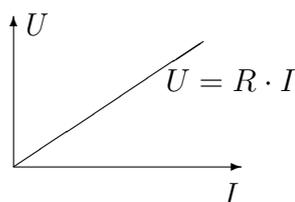
4.1 Zufallsexperiment und Wahrscheinlichkeit

4.1.1 Zufällige Erscheinungen und Ereignisse

Deterministische Erscheinungen:

Bei genau bekannten Voraussetzungen kann das Ergebnis eines Experiments mit Bestimmtheit vorausgesagt werden. Das Bedingungsgefüge ist vollständig angebbar.

Beispiel 4.1 *Das ohmsche Gesetz lautet: $U = R \cdot I$. Dabei ist U die Spannung, I die Stromstärke und R ein konstanter Widerstand.*



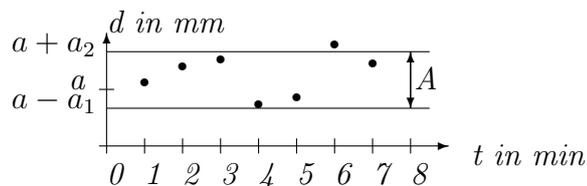
Beispiele deterministischer Erscheinungen sind vor allem in der klassischen Physik häufig anzutreffen.

Zufällige Erscheinungen:

Das Bedingungsgefüge ist kompliziert, umfangreich und nicht vollständig bekannt. Das Ergebnis eines Experiments kann nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden.

Beispiel 4.2 Herstellung von Antriebswellen auf einer automatischen Drehmaschine.

Nach Einstellung der Maschine soll der äußere Durchmesser $d = a$ mm betragen. Messungen der nacheinander gefertigten Wellen ergeben Werte, die um den Sollwert schwanken.



Ursachen: verschiedene unkontrollierbare Einflüsse (Materialunterschiede, Schwingungen der Maschine, Temperaturschwankungen) Der Durchmesser d einer Antriebswelle ist also nicht exakt vorauszubestimmen, da sich die genannten Einflüsse in ihrer Wirkung nicht ausschalten lassen. Wird pro Minute eine Messung durchgeführt, so ergibt sich ein Diagramm, welches zeigt, wie die Messwerte um den Sollwert a streuen.

Beispiel 4.3 (Würfel) Ein idealer Spielwürfel ist völlig homogen und symmetrisch, keine der 6 Seiten ist bezüglich des Wurfresultates ausgezeichnet. Beim Würfeln lässt sich nicht vorhersagen, welche Augenzahl nach dem Wurf oben liegt. Das Bedingungsgefüge (Bewegung der Hand beim Würfeln, Beschaffenheit der Oberfläche des Tisches) ist mathematisch nicht bzw. nur ungenau erfassbar.

Die zufälligen Erscheinungen unterliegen, obwohl über das Ergebnis eines Einzelversuchs nichts ausgesagt werden kann, ebenfalls gewissen Gesetzmäßigkeiten. Diese werden von der Wahrscheinlichkeitsrechnung untersucht.

In Beispiel 4.2 betrachten wir das Intervall

$$A =]a - a_1, a + a_2[\quad (a_1 \geq 0, a_2 \geq 0) \quad a \in A. \text{ Wir sagen:}$$

Das Ereignis A ist eingetreten $\Leftrightarrow d \in A$,

das Ereignis A ist nicht eingetreten $\Leftrightarrow d \notin A$,

A heißt ein zufälliges Ereignis, da sich nicht vorhersagen lässt, ob A im speziellen Fall eintreten wird. Im Beispiel 4.3 sagen wir: Das Ereignis A_i ist eingetreten oder nicht, je nachdem, ob bei einem Wurf die Augenzahl i oben liegt oder nicht. A_i heißt ebenfalls zufälliges Ereignis.

Bezeichnung: $A_i = \{i\}$.

Zufallsexperiment (zufälliger Versuch) heißt ein Experiment mit folgenden Eigenschaften:

- Das Experiment ist unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar.
- Es sind mehrere sich gegenseitig ausschließende Ergebnisse möglich.

- Das Ergebnis lässt sich nicht mit Sicherheit voraussagen.

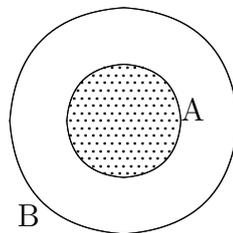
Zufälliges Ereignis (zE) heißt ein Ereignis, das bei einem zufälligen Versuch, bei dem bestimmte Bedingungen eingehalten werden, eintreten kann, aber nicht eintreten muss.

Bezeichnungen: $A, B, C, \dots, A_i, B_i, C_i, \dots$

4.1.2 Relation und Operationen für zufällige Ereignisse

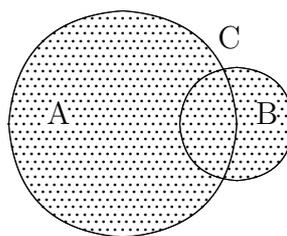
Für zE gelten die gleichen Beziehungen wie für Mengen (Veranschaulichung durch VENN-Diagramme möglich, es wird in Klammern auf die bei Mengen übliche Bezeichnungsweise hingewiesen).

1. $A \subset B$: A zieht B nach sich, d.h., wenn das Ereignis A eintritt, so ist auch das Ereignis B eingetreten. ($A \subset B$ - A Teilmenge von B).



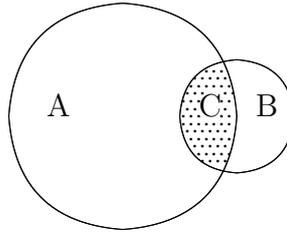
Beispiel 4.4 (Würfel) $A_1 = \{1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ - Ereignis für das Auftreten einer ungeraden Augenzahl $A_1 \subset B$.

2. Das Ereignis $C = A \cup B$ heißt die (logische) **Summe** der Ereignisse A und B . Es tritt ein, wenn mindestens eins der Ereignisse A oder B eintritt. ($A \cup B$ - Vereinigung von A und B).



Beispiel 4.5 (Würfel) $A_2 = \{2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$. Das Ereignis $C = A_2 \cup B$ tritt genau dann ein, wenn 1 oder 2 oder 3 oder 5 geworfen wird, d.h. $C = \{1, 2, 3, 5\}$. Die Summe kann von einer beliebigen Anzahl zE gebildet werden.

3. Das Ereignis $C = A \cap B$ heißt das logische **Produkt** der Ereignisse A und B . Es tritt ein, wenn sowohl A als auch B eintritt. ($A \cap B$ - Durchschnitt von A und B).



Beispiel 4.6 (Würfel) $A_1 = \{1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{1\}$. Das Ereignis $C = A_1 \cap B$ tritt genau dann auf, wenn eine Eins geworfen wird. Das Produkt kann von einer beliebigen Anzahl zE gebildet werden.

- Ein Ereignis E heißt **sicheres** Ereignis (bezüglich eines festen Versuches), wenn es stets (d.h. bei jeder Wiederholung des Versuchs) eintritt (E - Grundmenge oder Universalmenge).

Beispiel 4.7 (Würfel) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist das sichere Ereignis im Beispiel 4.3, da bei einem Versuch eine der 6 Augenzahlen bestimmt eintritt.

- Ein Ereignis \emptyset heißt **unmögliches** Ereignis (bezüglich eines festen Versuches), wenn es niemals (d.h. bei beliebiger Wiederholung des Versuchs) eintritt (\emptyset - leere Menge).

Beispiel 4.8 (Würfel) Im Beispiel 4.3 ist $\emptyset = \{7\}$ oder $\emptyset = \{0\}$.

- \bar{A} heißt das zu A **komplementäre** Ereignis. Es tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt (\bar{A} - Komplement von A).

Beispiel 4.9 (Würfel) $A_1 = \{1\} \Rightarrow \bar{A}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ oder $B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow \bar{B} = \{2, 4, 6\}$.

Es gilt stets $A \cup \bar{A} = E$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$. E und \emptyset sind zueinander komplementär.

- A und B heißen **unvereinbar** oder **disjunkt**, wenn ihr gleichzeitiges Eintreten unmöglich ist, d.h. $A \cap B = \emptyset$. Man sagt auch: A und B schließen sich gegenseitig aus.

Beispiel 4.10 (Würfel) $A_1 = \{1\}$ $\bar{B} = \{2, 4, 6\}$ $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

- Alle zE , die im Zusammenhang mit einem bestimmten zufälligen Versuch unter gleichbleibenden Bedingungen auftreten können, bilden das **Ereignisfeld** \mathcal{A} . Ein Ereignisfeld enthält demnach mit den zE A und B auch alle zE , die durch die Operationen 2.-6., aus A und B hervorgehen. Mathematisch ist ein Ereignisfeld eine Menge. Die möglichen Ereignisse sind dann die Elemente dieser Menge.

- Ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ heißt **Elementarereignis**, wenn es sich nicht weiter (echt) zerlegen lässt, d.h., wenn man es nicht in der Form $A = B \cup C$ mit $B, C \in \mathcal{A}$, $B \neq A$, $C \neq A$ darstellen kann. Alle möglichen sich gegenseitig ausschließenden Ergebnisse eines Zufallsexperimentes sind **Elementarereignisse**. Ist ein Ereignis kein Elementarereignis, so heißt es zusammengesetztes Ereignis. Wir bezeichnen mit Ω die Menge aller Elementarereignisse. Das Ereignisfeld setzt sich aus Ω und der Menge der zusammengesetzten Ereignisse zusammen.

Beispiel 4.11 (Würfel) A_1, \dots, A_6 Elementarereignisse zum Ereignisfeld von Beispiel 4.3. Jedes beliebige, dem Ereignisfeld \mathcal{A} angehörende Ereignis lässt sich in eine Summe von Elementarereignissen aus \mathcal{A} zerlegen.

Beispiel 4.12 (Würfel) $B = \{1, 3, 5\}$, $B = A_1 \cup A_3 \cup A_5$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$ - Augenzahl nicht kleiner als 3 $C = A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$.

4.1.3 Verschiedene Definitionen der Wahrscheinlichkeit

Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit (P. LAPLACE (1749-1827))

Gesetzmäßigkeiten bei Glücksspielen basieren auf **Gleichwahrscheinlichkeit** von zE .

Beispiel 4.13 Wurf eines Geldstücks.

$zE A$ - Nach dem Wurf liegt die Zahl oben.

$zE \bar{A}$ - Nach dem Wurf liegt das Wappen oben.

$$\implies A \cup \bar{A} = E, A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Anzahl der möglichen Elementarereignisse: 2.

Annahme: A und \bar{A} sind gleichwahrscheinlich, (LAPLACESches Ereignisfeld) d.h. mit 50%-iger Sicherheit tritt A ein, mit 50%-iger Sicherheit \bar{A} .

Wir ordnen jedem der beiden Elementarereignisse die gleiche nichtnegative reelle Zahl zu, derart, dass ihre Summe 1 ergibt: $P(A) = \frac{1}{2}$ und $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$. Dabei ist $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses A .

Beispiel 4.14 (Würfel) $zE B = \{1, 3, 5\}$ Gesucht: $P(B)$ Es gilt: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 = E$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$)

Annahme: Alle A_i sind gleichwahrscheinlich.

Wir ordnen jedem der 6 Elementarereignisse die gleiche nichtnegative reelle Zahl zu, derart, dass ihre Summe 1 ergibt:

$$P(A_i) = \frac{1}{6} \quad P(A_i) \text{ ist die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses } A_i,$$

$B = A_1 \cup A_3 \cup A_5$, wobei die Elementarereignisse, in die B zerlegt werden kann, für das Eintreten von B günstig sind.

$$\text{Dann setzt man } P(B) = \frac{g}{k} = \frac{1}{2} \quad P(B) \text{ Wahrscheinlichkeit von } B.$$

Definition 4.1 Das Ereignisfeld \mathcal{A} enthalte k Elementarereignisse A_1, \dots, A_k mit den Eigenschaften $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, k$), wobei all diese

A_i gleichwahrscheinlich sind, d.h., es gibt $P(A_i) = \frac{1}{k}$ $\forall i = 1, \dots, k$. Lässt sich ein beliebiges Ereignis $A \in \mathcal{A}$ in eine Summe von g elementaren Ereignissen, die für das Eintreten von A günstig sind, zerlegen, so heißt die Zahl

$$P(A) = \frac{g}{k} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen elementaren Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Elementarereignisse}}$$

Wahrscheinlichkeit von A .

Beispiel 4.15 *zE S* - Im LOTTO 6 aus 49 in einer Woche mit einem Tippschein einen Sechser zu erzielen. Gesucht: $P(S)$.

Es gibt $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten aus 49 Zahlen 6 verschiedene herauszugreifen, d.h. das Ereignisfeld \mathcal{A} enthält nach Definition der Binomialkoeffizienten

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q! \cdot (p-q)!} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \dots \cdot (p-q+1)}{q!}$$

$$k = \binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 49 \cdot 8 \cdot 47 \cdot 23 \cdot 3 \cdot 11 = 13\,983\,816$$

Elementarereignisse. Um mit Sicherheit einen Sechser zu haben, müsste man so viele Tippscheine ausfüllen.

Genau eine dieser Sechserkombinationen ist für die jeweilige Ziehung günstig, d.h. $g = 1$. Somit ist $P(S) = \frac{1}{k} \approx 7,1511 \cdot 10^{-8}$.

Nachteil der klassischen Definition

Nur auf Ereignisfelder anwendbar, die eine **endliche** Anzahl von **gleichwahrscheinlichen** Elementarereignissen enthalten.

Die bei unendlich vielen Elementarereignissen auftretenden Schwierigkeiten lassen sich teilweise beheben durch die

Geometrische Definition der Wahrscheinlichkeit.

Ermittlung der Wahrscheinlichkeit durch Bestimmung von Flächeninhalten, Bogenlängen u. ä. m. geometrischer Figuren. Methoden anschaulich, vielfach verwendbar.

Beispiel 4.16 *Eine Uhr bleibt stehen.* *zE C₂* - Großer Zeiger bleibt zwischen 3 und 6 stehen. Gesucht: $P(C_2)$.

Annahme: Wahrscheinlichkeit dafür, dass der große Zeiger auf einem gegebenen Bogen der Peripherie des Ziffernblattes stehenbleibt, ist proportional zu dessen Bogenlänge. Bezeichnungen: K - voller Kreisbogen, K_{3-6} - Kreisbogen von 3 bis 6 auf dem Ziffernblatt.

$$P(C_2) = \frac{L(K_{3-6})}{L(K)} = \frac{2\pi a \cdot \frac{1}{4}}{2\pi a} = \frac{1}{4}$$

Zusammenhang mit Definition 4.1

C_1 - Der große Zeiger bleibt zwischen nullter und fünfzehnter Minute stehen.

C_2 - Der große Zeiger bleibt zwischen fünfzehnter und dreißigter Minute stehen.

C_3 - Der große Zeiger bleibt zwischen dreißigster und fünfundvierzigster Minute stehen.

C_4 - Der große Zeiger bleibt zwischen fünfundvierzigster und sechzigster Minute stehen.

Das Ereignisfeld \mathcal{A} enthält vier gleichwahrscheinliche Elementarereignisse und $P(C_i) = \frac{1}{4}$

Weitere Anwendungen: Militärtechnik (Trefferwahrscheinlichkeit), statistische Physik.

Nachteil der geometrischen Definition: Die Methoden sind sehr speziell.

Es gibt Beispiele, in denen die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines zE nach beiden Definitionen nicht gelingt.

Definition der Wahrscheinlichkeit mittels relativer Häufigkeit (R. v. MISES)

Definition 4.2 *Tritt bei n unter gleichen Bedingungen durchgeführten Versuchen das zE A gerade m -mal ein, so heißt m die **absolute Häufigkeit** ($a H$) und $\frac{m}{n}$ die **relative Häufigkeit** ($r H$) von A .*

Bezeichnungen: $m = H_n(A)$, $\frac{m}{n} = h_n(A)$.

Für $h_n(A)$ gilt wegen $0 \leq m \leq n$ $0 \leq h_n(A) \leq 1$

E sicheres Ereignis $\implies h_n(E) = 1$

\emptyset unmögliches Ereignis $\implies h_n(\emptyset) = 0$.

Annahme:

1. Versuchreihe: n_1 Versuche, A tritt m_1 mal ein $\implies h_{n_1}(A) = \frac{m_1}{n_1}$

2. Versuchsreihe: n_2 Versuche, a tritt m_2 mal ein $\implies h_{n_2}(A) = \frac{m_2}{n_2}$

k -te Versuchsreihe: n_k Versuche, A tritt m_k mal ein $\implies h_{n_k}(A) = \frac{m_k}{n_k}$

$(h_{n_k}(A)) = \frac{m_k}{n_k}$ Folge der $r H$ von A .

Es erweist sich, dass sich die Quotienten $\frac{m_k}{n_k}$ für große n_k wenig unterscheiden (Nachweis durch umfangreiche Versuchsreihen)

Beispiel 4.17 *Wurf eines Geldstückes (vgl. Annahme Beispiel 4.13)*

n - Anzahl der Würfe

m - Anzahl des Auftretens von A (absolute Häufigkeit)

$h_n(A)$ - relative Häufigkeit von A

	n	m	$h_n(A)$
de Buffon	4040	2048	0,5080
K. Pearson	12000	6018	0,5016
K. Pearson	24000	12012	0,5005

Definition 4.3 *Es existiert ein fester Wert, um den $h_n(A)$ schwankt und dem sie sich um so mehr nähert, je größer die Anzahl der Versuche ist. Dieser feste Wert heißt **Wahrscheinlichkeit** $P(A)$ des zE A .*

Gesetz der großen Zahlen (J. BERNOULLI)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die r H eines Ereignisses A um mehr als eine beliebige vorgegebene Größe $\varepsilon > 0$ von der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ dieses Ereignisses abweicht, wird verschwindend klein, wenn die Anzahl der Versuche unendlich groß wird. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|h_n(A) - P(A)| \geq \varepsilon) = 0 \quad (\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|h_n(A) - P(A)| < \varepsilon) = 1)$$

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(A) \quad (h_n(A)) \text{ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen } P(A)$$

Es gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(E) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

Mit Hilfe der r H lässt sich die Wahrscheinlichkeit **näherungsweise** berechnen (n groß)

Nachteil: Unendlich viele Versuche sind nicht durchführbar.

Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit (A.N.KOLMOGOROV (1933))

Aufstellung eines Axiomensystems (widerspruchsfrei, vollständig, unabhängig) unter Zugrundelegung der aus Erfahrung resultierenden Eigenschaften. Von konkreten Eigenschaften der zE wird abstraktiert. Axiome werden nicht bewiesen, alle anderen Eigenschaften und Folgerungen sind ausgehend vom Axiomensystem zu beweisen. Wir betrachten eine abstrakte Menge E von Elementarereignissen $A_1, A_2, \dots; A_i \in \mathcal{A}$ - Ereignisfeld. Zu \mathcal{A} gehören außerdem alle zE, die sich nach dem in Abschnitt 4.1.2 angegebenen Relationen und Operationen für zE aus den Elementarereignissen bilden lassen, d.h.

1. $E \in \mathcal{A}$, E - sicheres Ereignis, E - Summe aller in \mathcal{A} enthaltenen Elementarereignisse.
2. $\emptyset \in \mathcal{A}$, \emptyset unmögliches Ereignis, \emptyset -komplementäres Ereignis zu E .
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, \bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{A}$.

Damit wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff axiomatisch wie folgt aufgebaut:

A I - Jedem zE $A \in \mathcal{A}$ wird eine reelle Zahl $P(A)$, die Wahrscheinlichkeit von A , zugeordnet, für die $0 \leq P(A) \leq 1$ gilt.

A II - $P(E) = 1$.

A III - $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(zu **A I**) - Diese Grundeigenschaft gilt bei der klassischen Definition und bei der Definition mit Hilfe der r H.

(zu **A II**) - Gemäß Definition 4.1 lässt sich $E \in \mathcal{A}$ genau in alle k Elementarereignisse von \mathcal{A} zerlegen, so dass die Anzahl der günstigen Elementarereignisse für E gerade gleich k ist: $P(E) = \frac{k}{k} = 1$. Nach Definition 4.3 ist $h_n(E) = \frac{n}{n} = 1 \quad \forall n$.

(zu **A III**) - Bei n -maliger Wiederholung eines Versuchs gilt für die r H von $A, B, A \cup B$ ($A \cap B = \emptyset$): $h_n(A) = \frac{m}{n} \quad h_n(B) = \frac{l}{n} \quad h_n(A \cup B) = \frac{m+l}{n}$.

Andererseits tritt $A \cup B$ bei n Versuchen genau $(m+l)$ -mal ein, wegen $\frac{m+l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{l}{n}$ folgt $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$.

Beispiel 4.18 (Würfel) $A_1 = \{1\}$ $A_2 = \{2\}$ $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ $A_1 \cup A_2 = \{1, 2\}$.
 $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{6}$ $P(A_1 \cup A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Definition 4.4 Eine Menge heißt abzählbar-unendlich, wenn sich ihre Elemente als unendliche Folge schreiben lassen. Jede nicht abzählbar-unendliche Menge heißt überabzählbar-unendlich.

A III kann auf abzählbar-unendlich viele paarweise disjunkte Ereignisse A_1, A_2, \dots erweitert werden: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$

4.1.4 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

1. $P(\emptyset) = 0$

Beweis: $E = E \cup \emptyset$, $E \cap \emptyset = \emptyset$

Aus A II, A III folgt: $P(E) = P(E) + P(\emptyset)$, $1 = 1 + P(\emptyset)$ $P(\emptyset) = 0$.

Aus $P(A) = 0$ folgt aber **nicht** $A = \emptyset$.

Ist $P(A) = 0$, so heißt A **fast unmöglich**.

Ist $P(A) = 1$, so heißt A **fast sicher**.

Aus $P(A) = 1$ folgt jedoch **nicht** $A = E$.

Ist $P(A)$ sehr klein, so heißt A **seltenes** Ereignis.

2. $P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

Beweis: $A \cup \bar{A} = E$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Aus A II, A III folgt: $P(A) + P(\bar{A}) = P(E) = 1$.

3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Beweis: $B = A \cup (\bar{A} \cap B)$ $A \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$.

Aus A III folgt $P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \geq P(A)$.

Beispiel 4.19 (Würfel) $A_1 = \{1\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $P(A_1) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(A_1) < P(B)$.

4. Additionsatz

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad A, B \in \mathcal{A}. \quad (4.1)$$

$P(A \cup B)$ - Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eines der Ereignisse A oder B eintritt. Das Ereignis $A \cap B$ zieht sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B nach sich, wird also bei $P(A)$ und bei $P(B)$ berücksichtigt. Da aber in $P(A \cup B)$ diesem Ereignis nur einmal Rechnung getragen wird, muss durch Subtraktion von $P(A \cap B)$ die Gleichheit hergestellt werden.

Aus Gleichung (4.1) folgt wegen $P(A \cap B) \geq 0$, dass $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Das Gleichheitszeichen gilt dann, wenn $P(A \cap B) = 0$ ist, insbesondere, wenn $A \cap B = \emptyset$ (A III).

Beispiel 4.20 Gegeben seien 10^4 Antriebswellen. Als Kontrollgröße fungiert der Außendurchmesser d mit einem Sollmaß von $a = 35$ mm, einer unteren Toleranzgrenze von $T_U = (35 - 0,005)$ mm = 34,995 mm und einer oberen Toleranzgrenze von $T_O = (35 + 0,011)$ mm = 35,011 mm.

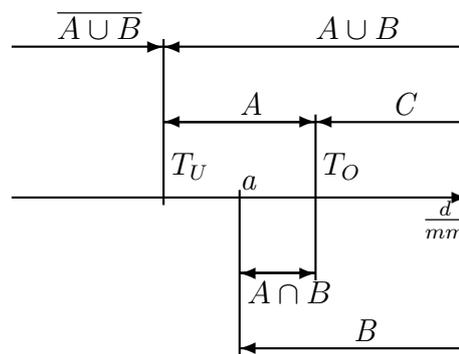
Für Wellen mit $d > T_O$ ist Nacharbeit erforderlich, Wellen mit $d < T_U$ sind Ausschuss.

zE $A = \{T_U \leq d \leq T_O\}$, d.h. d liegt innerhalb der Toleranzgrenzen,

zE $B = \{d \geq a\}$, d.h. d ist mindestens gleich dem Sollmaß,

$A \cap B = \{a \leq d \leq T_O\} \neq \emptyset$ $A \cup B = \{d \geq T_U\}$,

$\overline{A \cup B} = \{d < T_U\}$ $C = \{d > T_O\}$.



Für 9200 Wellen gilt $d \in [T_U, T_O] \implies$ zE $A : d \in [T_U, T_O]$ tritt 9200 mal auf.

Für 5200 Wellen gilt $d \geq a \implies$ zE $B : d \geq a$ tritt 5200 mal auf.

Für 4700 Wellen gilt $a \leq d \leq T_O \implies$ zE $A \cap B : a \leq d \leq T_O$ tritt 4700 mal auf.

$$P(A) = \frac{9200}{10000} = 0,92 \quad P(B) = \frac{5200}{10000} = 0,52 \quad P(A \cap B) = \frac{4700}{10000} = 0,47,$$

zE $A \cup B$ - Welle ist brauchbar oder kann durch Nacharbeit brauchbar gemacht werden,

$P(A \cup B) \stackrel{(4.1)}{=} 0,92 + 0,52 - 0,47 = 0,97$ - Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses,

zE $\overline{A \cup B}$ - Ereignis, ein Ausschussstück aus dem Posten zu erhalten,

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,97 = 0,03$, d.h. 3% aller Wellen sind Ausschuss.

4.1.5 Die bedingte Wahrscheinlichkeit

Mit Hilfe von Axiomen und Rechenregeln lässt sich nicht in jedem Fall die Wahrscheinlichkeit bestimmen.

Beispiel 4.21 Es werden alle Wellen aussortiert, für die $d \notin [T_U, T_O]$ gilt:

zE $\overline{A} = \{d < T_U \vee d > T_O\}$, d.h. d liegt außerhalb der Toleranzgrenzen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses unter den aussortierten Wellen eine herauszugreifen, die nachgearbeitet werden kann, d.h. die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von $C = \{d > T_O\}$ unter der Bedingung, dass \overline{A} bereits eingetreten ist.

Bezeichnung: $P(C/\bar{A})$ (lies: Die Wahrscheinlichkeit von C unter der Bedingung \bar{A}).

Für 800 Wellen gilt $d \notin [T_U, T_O] \implies zE \bar{A} : d \notin [T_U, T_O]$ tritt 800 mal auf.

Für 500 Wellen gilt $d > T_O \implies zE C : d > T_O$ tritt 500 mal auf.

Für 300 Wellen gilt $d < T_U \implies zE \overline{A \cup B} : d < T_u$ tritt 300 mal auf.

$$P(C/\bar{A}) = \frac{500}{800} = 0,625 \text{ aber } P(C) = \frac{500}{10000} = 0,05.$$

Es ist also erforderlich, zwischen der Wahrscheinlichkeit unter Zusatzbedingungen - bedingter Wahrscheinlichkeit - und der unbedingten Wahrscheinlichkeit zu unterscheiden.

Definition 4.5 Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten des Ereignisses A unter der Bedingung, dass B schon eingetreten ist, heißt die Zahl

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ wenn } P(B) > 0. \quad (4.2)$$

Die Rollen von A und B sind vertauschbar.

Man kann zeigen, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit A I bis A III erfüllt.

Es gilt der **Multiplikationssatz** für Wahrscheinlichkeiten: Aus Gleichung (4.2) folgt

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A). \quad (4.3)$$

Beispiel 4.22 Wegen $C \subset \bar{A}$ ist $C \cap \bar{A} = C$,

$$P(C \cap \bar{A}) = P(C) = 0,05 \quad P(\bar{A}) = \frac{800}{10000} = 0,08,$$

$$P(C/\bar{A}) = \frac{P(C \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,05}{0,08} = 0,625 \implies P(C/\bar{A}) > P(C).$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A/B)$ kann kleiner, gleich oder größer als die unbedingte Wahrscheinlichkeit sein. Die Gleichheit bedeutet: Das Eintreten von B hat keinen Einfluss auf das Eintreten von A .

Definition 4.6 Zwei $zE A$ und B heißen **unabhängig** voneinander, wenn gilt:

$$P(A/B) = P(A) \quad \wedge \quad P(B/A) = P(B). \quad (4.4)$$

Aus den Gleichungen (4.3) und (4.4) folgt der **Multiplikationssatz** für **unabhängige** Ereignisse:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (4.5)$$

Gleichung (4.5) ist auch anwendbar, wenn $P(A) = 0$ oder $P(B) = 0$ ist.

Definition 4.7 Es sei $n > 2$. Die $zE A_1, \dots, A_n$ heißen **vollständig unabhängig**, wenn für jede natürliche Zahl $k \leq n$ und beliebige natürliche Zahlen i_1, \dots, i_k mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ die Beziehung $P(A_{i_k} \cap \dots \cap A_{i_1}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ gilt.

Beispiel 4.23 *Ein Arbeiter bedient 3 Maschinen.*

$zE A_1$: Maschine 1 erfordert im Laufe einer Stunde nicht die Aufmerksamkeit des Arbeiters; $P(A_1) = 0,9$,

$zE A_2$: Maschine 2 erfordert im Laufe einer Stunde nicht die Aufmerksamkeit des Arbeiters; $P(A_2) = 0,8$,

$zE A_3$: Maschine 3 erfordert im Laufe einer Stunde nicht die Aufmerksamkeit des Arbeiters; $P(A_3) = 0,85$.

$zE A_1 \cap A_2 \cap A_3$: keine der Maschinen erfordert im Laufe einer Stunde die Aufmerksamkeit des Arbeiters.

Die Maschinen arbeiten in jeder Beziehung unabhängig voneinander.

Gesucht: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,612.$$

Seien A_1, A_2, \dots, A_n n zE mit den Eigenschaften

$A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ $i, j = 1, 2, \dots, n$ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ $P(E) = 1, P(A_i) > 0 \quad \forall i$.
Dann lässt sich ein beliebiges Ereignis $B \subset E$ in der Form

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

darstellen, wobei die Ereignisse $B \cap A_i$ ($i = 1, \dots, n$) ebenfalls paarweise unvereinbar sind. Deshalb gilt nach **A III** für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

und wegen (4.3)

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i). \quad (4.6)$$

Theorem 4.1 (Satz über die totale Wahrscheinlichkeit)

Für paarweise unvereinbare Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n mit $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ gilt

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i).$$

Es seien die Voraussetzungen des Satzes über die totale Wahrscheinlichkeit erfüllt. Nach (4.3) ist

$$\begin{aligned} P(A_i \cap B) &= P(B) \cdot P(A_i/B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) \\ \implies P(A_i/B) &= \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)} \\ \stackrel{(4.6)}{\implies} P(A_i/B) &= \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Theorem 4.2 (Bayessche Formel)

Für paarweise unvereinbare Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n mit $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ gilt

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}.$$

Die BAYESSche Formel (4.7) dient zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit A_i unter der Bedingung B .

Bedeutung der BAYESSchen Formel: Ist bei Durchführung eines Versuchs das Ereignis B eingetreten, so kann man bei Kenntnis der Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ der Ereignisse A_i ($i = 1, \dots, n$) und der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B/A_i)$ des Ereignisses B unter den Bedingungen A_i mit Hilfe von Gleichung (4.7) die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A_i/B)$ der Ereignisse A_i unter der Bedingung B berechnen.

Da das Ereignis B schon eingetreten ist nennt man

$P(A_i/B)$ a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten (a-posteriori - später nach Eintreten von B),
 $P(A_i)$ a-priori-Wahrscheinlichkeiten (a-priori - von vornherein),

Beispiel 4.24 Von 3 gleichartigen Maschinen stellte die erste 20%, die zweite 30%, die dritte 50% der Gesamtproduktion her. Dabei verursacht die erste 5%, die zweite 4%, die dritte 2% Ausschuss (jeweils in ihrer eigenen Produktion). Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig gefundenes Ausschussstück von der ersten Maschine produziert wurde.

$zE A_i$ - Ware wurde von der i -ten Maschine produziert ($i=1,2,3$).

$$P(A_1) = \frac{20}{20 + 30 + 50} = 0,2, \quad P(A_2) = \frac{30}{20 + 30 + 50} = 0,3, \quad P(A_3) = \frac{50}{20 + 30 + 50} = 0,5,$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E,$$

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1, \quad P(A_i) > 0 \quad \forall i,$$

d.h., die Voraussetzungen zur Anwendung der BAYESSchen Formel sind erfüllt.

$zE B$ - Ereignis, ein Ausschussstück aus der gesamten Produktion herauszugreifen.

$zE B/A_i$ - Ereignis, ein Ausschussstück aus der Produktion der i -ten Maschine zu erhalten.

$$P(B/A_1) = 0,05 \text{ (5\%)}, \quad P(B/A_2) = 0,04 \text{ (4\%)}, \quad P(B/A_3) = 0,02 \text{ (2\%)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Gesucht: } P(A_1/B) &= \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P(B/A_i)} \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,5 \cdot 0,02} = \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,032} = 0,31. \end{aligned}$$

Wir berechnen noch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ausschussstück von der zweiten bzw. dritten Maschine stammt:

$$P(A_2/B) = \frac{0,3 \cdot 0,04}{0,032} = 0,38, \quad P(A_3/B) = \frac{0,5 \cdot 0,02}{0,032} = 0,31.$$

$$\text{Probe: } P(A_1/B) + P(A_2/B) + P(A_3/B) = 0,31 + 0,38 + 0,31 = 1.$$

4.2 Eindimensionale Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktionen

4.2.1 Diskrete und stetige Zufallsgrößen

Ziel: Quantifizierung von zE, d.h. Herstellung einer Zuordnung zwischen den zE und Teilmengen reeller Zahlen, denn bei vielen Zufallsexperimenten interessiert man sich nicht für das zE A selbst, sondern für eine reelle Zufallsgröße (Zufallsvariable) $X(A) \in \mathbb{R}$, die vom zE abhängt.

Definition 4.8 Es sei Ω die Menge aller Elementarereignisse. Eine auf Ω definierte Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Zufallsgröße** wenn für jede reelle Zahl x das Ereignis $A_x = \{A \in \Omega : X(A) < x\}$ zum Ereignisfeld \mathcal{A} gehört. Dabei heißt x Realisierung der Zufallsgröße X . Anstelle von $\{A \in \Omega : X(A) < x\} \in \mathcal{A}$ schreiben wir kurz $\{X < x\} \in \mathcal{A}$.

Definitionsbereich von X : $D(X) = \Omega$,

Wertebereich von X : $W(X) = \{x \mid X = x\} \subset \mathbb{R}$ (Menge aller möglichen Realisierungen von X).

Für das Ereignis $A_x = \{X < x\}$ existiert $P(A_x)$, da $A_x \in \mathcal{A}$. Analog gilt das für die Ereignisse $\{x_1 \leq X < x_2\}$ bzw. $\{X = x\}$.

Beispiel 4.25 zE $A = \{T_U \leq d \leq T_O\}$. Das zE A kann durch die Menge aller reellen Zahlen aus $[T_U, T_O]$ charakterisiert werden.

Eintreten von $A \iff$ Wellendurchmesser d fällt in das Intervall $[T_U, T_O]$.

Dem zE A wird somit eine Zufallsgröße zugeordnet, die, wenn A eintritt, zufällig einen Wert im Intervall $[T_U, T_O]$ annimmt: $A = \{x_1 \leq X \leq x_2\}$ $x_1 = T_U, x_2 = T_O$.

Beispiel 4.26 Messung eines ohmschen Widerstandes $R_U = 150\Omega$ $R_O = 170\Omega$.

zE $B = \{R_U \leq R \leq R_O\}$

Das zE kann durch die Menge aller reellen Zahlen aus $[R_U, R_O]$ charakterisiert werden.

Das Eintreten von B ist gleichbedeutend damit, dass der zu einem zufälligen Zeitpunkt gemessene Widerstand in das Intervall $[R_U, R_O]$ fällt.

Dem zE B wird somit eine Zufallsgröße zugeordnet, die, wenn B eintritt, zufällig einen Wert im Intervall $[R_U, R_O]$ annimmt: $B = \{x_1 \leq X \leq x_2\}$ $x_1 = R_U, x_2 = R_O$.

Beispiel 4.27 (Lieferposten) Untersuchung eines Lieferpostens auf Ausschuss

zE A - es wird ein defektes Stück herausgegriffen

zE \bar{A} - es wird ein brauchbares Stück herausgegriffen

Ordnet man A die reelle Zahl 1 und \bar{A} die Zahl 0 zu, so gilt

$$A = \{X = 1\} \quad \bar{A} = \{X = 0\}.$$

Endlich viele Versuchsausgänge bedeutet, der Zufallsgröße werden endlich viele Werte zugeordnet (X nimmt die Werte 0 und 1 an).

Beispiel 4.28 (Würfel) Durch die Abbildung der 6 Elementarereignisse A_i ($i = 1, \dots, 6$) in die reelle Zahlenachse wird eine Zufallsgröße X definiert, die die Augenzahl bei einem Wurf beschreibt.

$A_i = \{X = i\}$ X nimmt die Werte 1, ..., 6 an.

Definition 4.9 Eine Zufallsgröße X heißt **diskret**, wenn sie endlich oder abzählbar-unendlich viele Werte annimmt. Ihr Wertebereich ist eine endliche oder abzählbar-unendliche Menge. Eine Zufallsgröße X heißt **stetig**, wenn sie jeden beliebigen Wert eines Intervalls der Zahlengeraden annehmen kann. Ihr Wertebereich ist nicht diskret.

Diskrete Zufallsgrößen: siehe Beispiele 4.27, 4.28.

Stetige Zufallsgrößen: siehe Beispiele 4.25, 4.26 und alle Messvorgänge in der Technik (Beobachtungs- und Messfehler).

4.2.2 Verteilungsfunktion für Zufallsgrößen

Eine Zufallsgröße X ist vollständig charakterisiert durch

1. ihren Wertebereich,
2. Kenntnis der Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(X = x_i)$ für **alle** Werte x_i , die die Zufallsgröße X annehmen kann.

Die zweite Bedingung ist für **stetige** Zufallsgrößen **nicht** erfüllbar, für diskrete Zufallsgrößen, die endlich viele Werte annehmen, ist diese Forderung i. Allg. erfüllbar.

Beispiel 4.29 (Lieferposten) $P(A) = P(X = 1) = p$ $P(\bar{A}) = P(X = 0) = 1 - p = q$
 p muss bekannt sein.

Definition 4.10 Die **Verteilungsfunktion** einer Zufallsgröße X ist definiert durch

$$F(x) = P(X < x) \quad x \in] - \infty, \infty[. \quad (4.8)$$

Die Beziehung (4.8) bedeutet: Der Wert der Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X an der Stelle x ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass (bei Ausführung eines Versuchs) X einen Wert unterhalb der Schranke x annimmt. Es gilt für $x_1 < x_2$:

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X < x_2) &= F(x_2) - F(x_1) \\ P(x_1 < X < x_2) &= F(x_2) - F(x_1 + 0) \\ P(x_1 < X \leq x_2) &= F(x_2 + 0) - F(x_1 + 0) \\ P(x_1 \leq X \leq x_2) &= F(x_2 + 0) - F(x_1). \end{aligned}$$

Beispiel 4.30 (Würfel)

Konstruktion der Verteilungsfunktion: Es gilt

$$A_i = \{X = i\} \quad W(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad P(A_i) = p_i = P(X = i) = \frac{1}{6} \quad (i = 1, \dots, 6).$$

$$F(x) = \sum_{i < x} p_i,$$

$$x \leq 1 \quad F(x) = P(X < x) = 0, \text{ denn } P(X < 1) = 0,$$

$$1 < x \leq 2 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = \frac{1}{6},$$

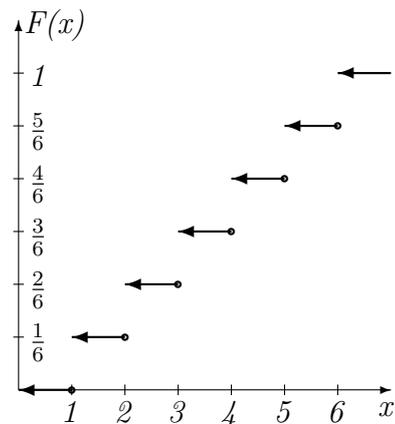
$$2 < x \leq 3 \quad F(x) = P(X < x) = P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\}) \stackrel{AIII}{=} P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$3 < x \leq 4 \quad F(x) = \sum_{i=1}^3 P(X = i) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$4 < x \leq 5 \quad F(x) = \sum_{i=1}^4 P(X = i) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$5 < x \leq 6 \quad F(x) = \sum_{i=1}^5 P(X = i) = \frac{5}{6},$$

$$x > 6 \quad F(x) = \sum_{i=1}^6 P(X = i) = 1.$$



Die Funktion $F(x)$ ist monoton wachsend, linksseitig stetig und besitzt den Wertebereich

$$W(F) = \left\{ 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1 \right\}$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgröße: X nehme die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ mit $P(X = x_i) = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$ an.

Aus Gleichung (4.8) folgt

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{i: x_i < x} p_i. \quad (4.9)$$

Die Summation erfolgt über alle Punkte x_i , die unterhalb der Schranke x liegen. Ferner gilt $0 \leq p_i \leq 1$. Die Verteilungsfunktion $F(x)$ besitzt folgende Eigenschaften:

1. $F(x)$ monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend,
2. $F(x)$ linksseitig stetig,
3. $F(x)$ Treppenfunktion, die in den Punkten x_i Sprünge der Höhe $p_i \quad (i = 1, 2, \dots)$ besitzt.

Ist die Anzahl der Sprungstellen endlich (etwa gleich n), so gilt: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$,

ist die Anzahl der Sprungstellen abzählbar-unendlich, so gilt: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Die (diskrete) **Verteilung** einer **diskreten** Zufallsgröße kann entweder durch die diskrete Verteilungsfunktion (4.9) oder durch Angabe der Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X = x_i) = p_i$ ($i = 1, 2, \dots$) charakterisiert werden.

Eigenschaften der Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgröße Die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgröße lässt sich darstellen durch

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (4.10)$$

Dabei ist $f(x)$ die **Wahrscheinlichkeitsdichte** oder **Dichte** von X , wobei $f(x) \geq 0$ und wenigstens stückweise stetig ist. Die Verteilungsfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

1. $F(x)$ monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend, stetig,
2. $W(F) =]0, 1[$ mit

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) &= F(-\infty) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(t) dt = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1. \end{aligned}$$

3. Falls $F(x)$ überall differenzierbar ist, so gilt:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x). \quad (4.11)$$

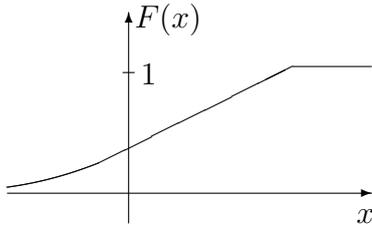
4. Für $x_1 < x_2$ gilt

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \leq X < x_2) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

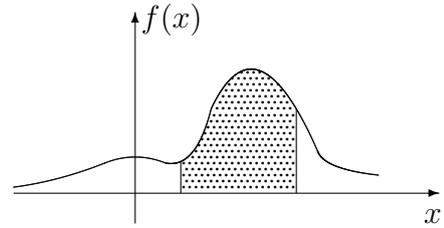
(4.12) gibt die Fläche unter der Kurve $f(x)$ zwischen den Abszissenwerten x_1 und x_2 an.

5. Für einen festen Wert a gilt:

$$\begin{aligned} P(X = a) &= \lim_{\Delta a \rightarrow +0} P(a \leq X < a + \Delta a) = \lim_{\Delta a \rightarrow +0} [F(a + \Delta a) - F(a)] \\ &= \lim_{\Delta a \rightarrow +0} \int_a^{a+\Delta a} f(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$



Verteilungsfunktion $F(x)$ einer stetigen Zufallsgröße



Dichte $f(x)$ einer stetigen Zufallsgröße

Die (stetige) **Verteilung** einer **stetigen** Zufallsgröße kann entweder durch ihre Verteilungsfunktion (4.10) oder durch ihre Dichte (4.11) charakterisiert werden.

4.2.3 Parameter von Zufallsgrößen

Bei vielen praktischen Problemen ist die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße nicht oder schwer bestimmbar. Die Verteilung lässt sich jedoch grob durch einige für sie charakteristische Größen, Parameter genannt, angeben.

Definition 4.11 (Erwartungswert)

Erwartungswert einer **diskreten** Zufallsgröße X , die die Werte x_i mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_i ($i = 1, 2, \dots$) annehmen kann, heißt die Zahl

$$\mu = EX = \sum_i x_i p_i. \quad (4.14)$$

Dies ist der gewichtete Mittelwert mit den Gewichten p_i aller Realisierungen x_i von X .

Nimmt X nur endlich viele, etwa n Werte an, so schreiben wir $\mu = EX = \sum_{i=1}^n x_i p_i$. Nimmt

X abzählbar-unendlich viele Werte an, so schreiben wir $\mu = EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$. Im letzten Fall existiert der Erwartungswert μ nur, wenn die unendliche Reihe absolut konvergiert, d.h. wenn $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$ ist.

Erwartungswert einer **stetigen** Zufallsgröße X mit der Dichte $f(x)$ heißt die Zahl

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (4.15)$$

Der Erwartungswert μ existiert nur, wenn das Integral (4.15) absolut konvergiert, d.h. wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ ist.

Bemerkung 4.1 Der Erwartungswert ist i. Allg. kein Wert der betrachteten Zufallsgröße. Das arithmetische Mittel $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ von n beobachteten Werten x_1, x_2, \dots, x_n ist ungefähr gleich dem Erwartungswert, wobei dies um so besser erfüllt wird, je größer n ist.

Bemerkung 4.2 Veranschaulicht man sich eine diskrete Zufallsgröße X , die die Werte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten p_i annimmt, als ein System von Punktmassen, das an den Stellen x_i die Massen p_i besitzt (und folglich die Gesamtmasse Eins hat), so entspricht dem Erwartungswert von X der Schwerpunkt des Punktmassensystems.

Bemerkung 4.3 Seien X_1, \dots, X_n **diskrete** Zufallsgrößen. Dann ist $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ebenfalls eine Zufallsgröße und es gilt:

$$ES_n = E(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n EX_i.$$

Es gilt auch $E(aX + b) = aEX + b$, denn nimmt die **diskrete** Zufallsgröße X die Werte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten p_i an, so nimmt die Zufallsgröße $Y = aX + b$ die Werte $y_i = ax_i + b$ ebenfalls mit den Wahrscheinlichkeiten p_i an. Folglich gilt:

$$E(aX + b) = EY = \sum_i y_i p_i = \sum_i (ax_i + b)p_i = a \sum_i x_i p_i + b \sum_i p_i = aEX + b.$$

Definition 4.12 (Streuung, Standardabweichung)

Streuung, Varianz oder Dispersion einer Zufallsgröße X heißt die Zahl

$$\sigma^2 = D^2X = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 = EX^2 - \mu^2.$$

Standardabweichung oder mittlere quadratische Abweichung einer Zufallsgröße X heißt die Zahl

$$\sigma = +\sqrt{D^2X}.$$

Für eine **diskrete** Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert μ , die die Werte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten p_i annimmt, erhält man

$$\sigma^2 = E(X - EX)^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i, \quad \sigma^2 = EX^2 - \mu^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \mu^2. \quad (4.16)$$

Dies ist der gewichtete Mittelwert der Quadrate der Abweichungen der Werte x_i vom Erwartungswert μ , wobei als Gewichte wieder die Einzelwahrscheinlichkeiten verwendet werden mit denen die x_i auftreten.

Für eine **stetige** Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert μ und der Dichte $f(x)$ erhält man

$$\sigma^2 = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, \quad \sigma^2 = EX^2 - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2. \quad (4.17)$$

Die **Streuung** σ^2 existiert nur, wenn die Reihen in (4.16) im Falle abzählbar-unendlich vieler Summanden und die Integrale in (4.17) absolut konvergieren.

Bemerkung 4.4 Veranschaulicht man sich eine diskrete Zufallsgröße X als ein System von Punktmassen mit dem Schwerpunkt EX , so entspricht der Streuung D^2X das Trägheitsmoment dieses Systems bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt.

Bemerkung 4.5 Verschiebungssatz: Aus (4.16) erhält man

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= D^2X = E[X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2] = EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 \\ &= EX^2 - (EX)^2 = EX^2 - \mu^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2 p_i - \mu^2.\end{aligned}$$

Es gilt auch $D^2(aX + b) = a^2 D^2X$, denn

$$\begin{aligned}D^2(aX + b) &= E(aX + b - E(aX + b))^2 = E(aX + b - aEX - b)^2 \\ &= E(a^2(X - EX)^2) = a^2 E(X - EX)^2 = a^2 D^2X.\end{aligned}$$

Beispiel 4.31 (Würfel) $x_i = i$, $p_i = \frac{1}{6}$ $i = 1, \dots, 6$. Dann ist

$$\mu = \sum_{i=1}^6 i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5,$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^6 x_i^2 p_i - \mu^2 = \sum_{i=1}^6 i^2 \frac{1}{6} - (3,5)^2 = \frac{1}{6}(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - (3,5)^2 = 2,916 \quad \sigma = 1,71.$$

Beispiel 4.32 (Lieferposten) $P(A) = P(X = 1) = p$, $P(\bar{A}) = P(X = 0) = 1 - p = q$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{i=1}^2 x_i p_i = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p, \\ \sigma^2 &= \sum_{i=1}^2 (x_i)^2 p_i - p^2 = 1^2 p + 0^2 (1 - p) - p^2 = p - p^2 = p \cdot q.\end{aligned}$$

Beispiel 4.33 Wir betrachten eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{für } x < 0 \vee x > 2 \end{cases}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \frac{x}{2} dx = \frac{4}{3}, \\ \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 = \int_0^2 x^2 \frac{x}{2} dx = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

4.3 Spezielle Verteilungen

4.3.1 Diskrete Verteilungen

1. Die diskrete gleichmäßige Verteilung

Definition 4.13 Nimmt die **diskrete** Zufallsgröße X die n verschiedenen Werte x_1 bis x_n mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten p_1 bis p_n an und ist

$$p_i = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, \dots, n, \text{ so heißt } X \text{ **gleichmäßig** verteilt.}$$

Verteilungsfunktion: $F(x) = \sum_{i < x} p_i$ mit Summation über alle ganzzahligen Werte

$i = 1, \dots, n$, die kleiner x sind.

Erwartungswert: $\mu = EX = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$

Streuung: $\sigma^2 = D^2X = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \frac{1}{n} - \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$

Beispiel 4.34 (Würfel): Verteilungsfunktion: vgl. Abschnitt 4.2.2 Beispiel 4.30, Erwartungswert, Streuung: vgl. Abschnitt 4.2.3 Beispiel 4.31.

2. Die Binominalverteilung (BERNOULLI-Verteilung)

Es wird eine Reihe von n gleichartigen voneinander **unabhängigen** Einzelversuchen betrachtet, wobei als Ergebnis eines Einzelversuchs lediglich das Ereignis A (mit Wahrscheinlichkeit p) oder \bar{A} (mit Wahrscheinlichkeit $1 - p = q$) eintreten kann.

Wir definieren eine diskrete Zufallsgröße X als Anzahl des Auftretens von A in n **unabhängig** voneinander durchgeführten Wiederholungen des betrachteten zufälligen Versuchs. **Unabhängig** bedeutet, das Ergebnis der nächsten Wiederholung hängt nicht von den vorherigen Ausführungen des Versuchs ab, d.h. p kann von Wiederholung zu Wiederholung als **konstant** angesehen werden. Die Ereignisse, die bei den verschiedenen Wiederholungen auftreten sind ebenfalls unabhängig, d.h., es gilt der Multiplikationssatz (siehe Abschnitt 4.1.5) Formel (4.5) für unabhängige Ereignisse.

Die diskrete Zufallsgröße X nimmt die ganzzahligen Werte $k = 0, 1, \dots, n$ an, je nachdem, ob das Ereignis A bei n Wiederholungen des Versuchs keinmal oder einmal oder zweimal usw. oder n -mal eintritt.

Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k) = p_k$ ($k = 0, \dots, n$) dafür, dass bei n Wiederholungen, das Ereignis A genau k -mal eintritt.

Für $n = 2$ (zwei Einzelversuche) sind p_0, p_1, p_2 zu ermitteln. Dabei sind die folgenden vier Ereignisse möglich:

1. $A_1 \cap A_2$,
2. $A_1 \cap \bar{A}_2$,

$$3. \overline{A_1} \cap A_2,$$

$$4. \overline{A_1} \cap \overline{A_2}.$$

Man kann zeigen: Sind die Ereignisse A_1 und A_2 voneinander unabhängig, so gilt dies auch für $\overline{A_1}$ und A_2 , A_2 und $\overline{A_2}$ sowie $\overline{A_1}$ und $\overline{A_2}$. Es ist

$$P(A_1) = P(A_2) = p \quad P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = q.$$

Die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse 1. bis 4. sind nach dem Multiplikationssatz

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p \cdot p = p^2,$$

$$P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) = p \cdot q, \quad P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = q \cdot p,$$

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = q^2.$$

Ferner gilt: $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = E$, wobei beliebige zwei der Ereignisse 1. bis 4. disjunkt sind. Aus A II und A III (siehe Abschnitt 4.1.3) folgt:

$$P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2})) =$$

$$P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = p^2 + 2pq + q^2 = P(E) = 1.$$

Für $n = 2$ erhält man

$$p_0 = P(X = 0) = q^2, \quad p_1 = P(X = 1) = 2pq, \quad p_2 = P(X = 2) = p^2 \text{ mit}$$

$$\sum_{k=0}^2 P(X = k) = (p + q)^2 = 1.$$

Für $n = 3$ erhält man:

$$p_0 = P(X = 0) = q^3, \quad p_1 = P(X = 1) = 3pq^2, \quad p_2 = P(X = 2) = 3p^2q,$$

$$p_3 = P(X = 3) = p^3 \text{ mit}$$

$$\sum_{k=0}^3 P(X = k) = (p + q)^3 = 1.$$

Allgemein erhält man für n Ziehungen:

$$p_0 = P(X = 0) = \binom{n}{0} q^n,$$

$$p_1 = P(X = 1) = \binom{n}{1} q^{n-1} p,$$

$$p_2 = P(X = 2) = \binom{n}{2} q^{n-2} p^2,$$

$$\dots p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} q^{n-k} p^k,$$

$$\dots p_n = P(X = n) = \binom{n}{n} p^n,$$

mit den Binominalkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

die Wahrscheinlichkeit $p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$, das bei n Wiederholungen genau k -mal das Ereignis A eintritt.

Definition 4.14 Nimmt die **diskrete** Zufallsgröße X die $n + 1$ verschiedenen Werte $0, 1, \dots, n$ (**endlich viele Werte**) mit den Wahrscheinlichkeiten p_0, p_1, \dots, p_n an und ist $p_k = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), so heißt X **binomialverteilt** mit den Parametern n und p .

$$\text{Verteilungsfunktion: } F(x) = \sum_{k < x} p_k = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \sum_{k < x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{für } 0 < x \leq n \\ 1 & \text{für } x > n \end{cases} .$$

Die Summation geht über alle ganzzahligen Werte $k = 0, \dots, n$, kleiner als x . Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n p_k &= \sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} p + \dots + \binom{n}{k} q^{n-k} p^k + \dots + \binom{n}{n-1} q p^{n-1} + p^n \\ &= (p + q)^n = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Erwartungswert: } \mu = EX = \sum_{k=0}^n k \cdot p_k = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np.$$

$$\text{Streuung: } \sigma^2 = D^2X = \sum_{k=0}^n k^2 p_k - (np)^2 = npq.$$

Das der **Binominalverteilung** zugrunde liegende Versuchsschema (n voneinander unabhängige Durchführungen eines Versuchs) heißt **BERNOULLI-Schema** (Jakob Bernoulli (1654-1705)).

Beispiel 4.35 (Lieferposten)

Es sei $P(A) = p$ $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ Dem Lieferposten entnimmt man nacheinander und **unabhängig** voneinander n Teile. Die Unabhängigkeit der Ereignisse kann man erreichen, indem man ein gezogenes Teil wieder in den Posten zurücklegt und gut durchmischt. Der durchschnittliche Ausschussprozentsatz betrage 3%. Dann ist $p = 0,03$ $q = 1 - p = 0,97$.

Gesucht: Wahrscheinlichkeit, unter diesen Teilen genau k ($k \leq n$) (höchstens k) defekte Teile zu erhalten. Speziell werden $n = 100$ Teile herausgegriffen.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den $n = 100$ Teilen **genau** $k = 3$ defekt sind?

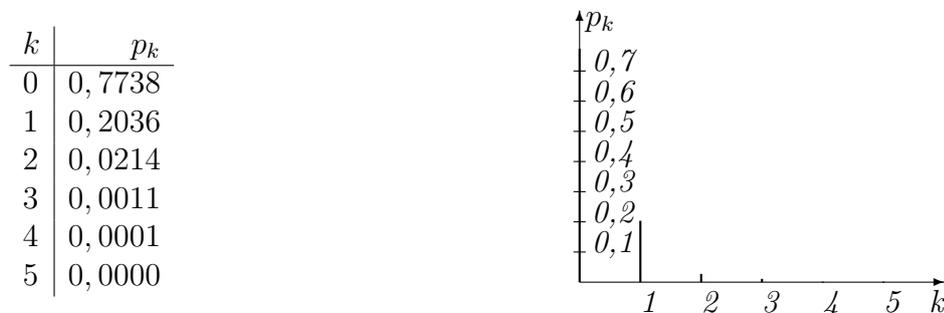
$$P(X = 3) = p_3 = \binom{100}{3} 0,03^3 \cdot 0,97^{100-3} = 0,2274.$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den $n = 100$ Teilen **höchstens** $k = 3$ defekt sind?

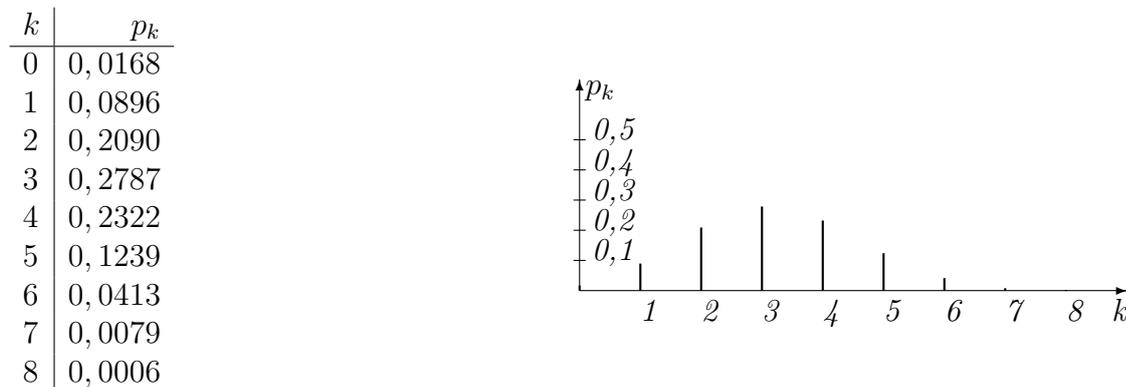
$$\begin{aligned}
 P(X \leq 3) &= \sum_{k=0}^3 P(X = k) = \sum_{k=0}^3 p_3 = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\
 &= \binom{100}{0} 0,03^0 \cdot 0,97^{100} + \binom{100}{1} 0,03^1 \cdot 0,97^{99} + \binom{100}{2} 0,03^2 \cdot 0,97^{98} + \binom{100}{3} 0,03^3 \cdot 0,97^{97} \\
 &= 0,0475 + 0,1470 + 0,2251 + 0,2274 = 0,6470, \\
 \mu &= 100 \cdot 0,03 = 3, \quad \sigma^2 = 100 \cdot 0,03 \cdot 0,97 = 2,91, \quad \sigma = 1,71.
 \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion einer binominal verteilten Zufallsgröße ist eine Treppenfunktion mit Sprüngen an den Stellen $0, 1, \dots, n$. Zur Charakterisierung einer Binominalfunktion ist jedoch folgende grafische Darstellung üblich:

Beispiel 4.36 $n = 5$ $p = 0,05$



Beispiel 4.37 $n = 8$ $p = 0,40$



Die Binominalverteilung ist i. Allg. asymmetrisch. Sie wird um so symmetrischer, je größer n ist bzw. je mehr sich p dem Wert $0,50$ nähert.

Ist p_k bekannt, so kann die Berechnung von p_{k+1} nach der Rekursionsformel

$$p_{k+1} = \frac{(n-k) \cdot p}{(k+1) \cdot q} p_k \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

mit $p_0 = q^n$ durchgeführt werden.

Beispiel 4.38 $n = 5$ $p = 0,05$

$$p_0 = 0,95^5 = 0,7738, p_1 = \frac{5 \cdot 0,05}{1 \cdot 0,95} \cdot 0,7738 = 0,2036, \dots, p_5 = \frac{1 \cdot 0,05}{5 \cdot 0,95} \cdot 0,0001 = 0,0000.$$

Beispiel 4.39 Die absolute Häufigkeit $H_n(A)$ des Ereignisses A in n unabhängigen Versuchen ist eine binomialverteilte Zufallsgröße mit $\mu = EH_n(A) = np$ und $\sigma^2 = D^2H_n(A) = npq$. Zwischen der absoluten Häufigkeit $H_n(A)$ und der relativen Häufigkeit $h_n(A)$ besteht der Zusammenhang $h_n(A) = \frac{H_n(A)}{n}$.

Dann folgt aus den Bemerkungen 4.3 und 4.5 mit $a = \frac{1}{n}$ und $b = 0$

$$Eh_n(A) = E\left(\frac{H_n(A)}{n}\right) = \frac{1}{n}EH_n(A) = \frac{1}{n}np = p = P(A),$$

$$D^2h_n(A) = D^2\left(\frac{H_n(A)}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D^2H_n(A) = \frac{1}{n^2}npq = \frac{pq}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

3. Die POISSON-Verteilung

Definition 4.15 Nimmt die **diskrete** Zufallsgröße X die Werte $k = 0, 1, 2, \dots$ (**abzählbar unendlich viele Werte**) mit den Wahrscheinlichkeiten $p_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ an und ist $p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), so heißt X **POISSON-verteilt** mit dem Parameter $\lambda > 0$.

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \sum_{k < x} P(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \sum_{k < x} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

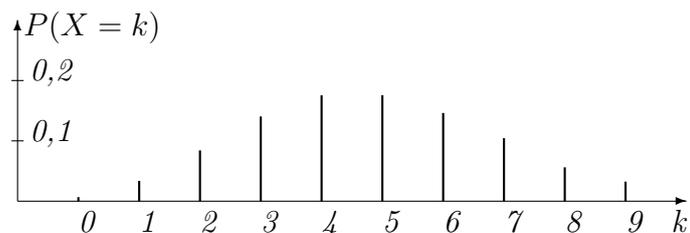
Dabei gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$.

Erwartungswert: $\mu = EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda$.

Streuung: $\sigma^2 = D^2X = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda$.

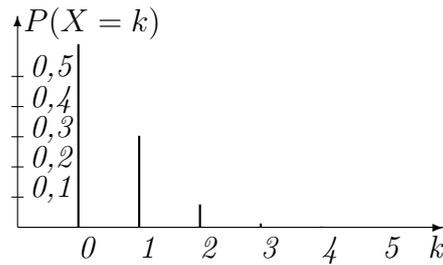
Beispiel 4.40 $\lambda = 5$

k	p_k
0	0,0067
1	0,0337
2	0,0842
3	0,1404
4	0,1755
5	0,1755
6	0,1462
7	0,1044



Beispiel 4.41 $\lambda = 0,5$

k	p_k
0	0,6065
1	0,3033
2	0,0758
3	0,0126
4	0,0016
5	0,0002



Beispiel 4.42 Die Anzahl der in einer automatischen Telefonzentrale innerhalb einer bestimmten Zeitspanne (etwa 1 Minute) registrierten Gespräche kann als POISSON-verteilt angesehen werden. $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Minute genau k Gespräche ankommen, wenn die Anzahl der ankommenden Gespräche je Minute im Durchschnitt λ beträgt. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Telefonzentrale höchstens zwei Anrufe je Minute registriert werden, wenn im Durchschnitt 240 Anrufe pro Stunde erfolgen. Wegen $\mu = \lambda$ setzt man $\lambda = \frac{240}{60} = 4$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\sum_{k=0}^2 P(X = k) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} + \frac{4^1}{1!}e^{-4} + \frac{4^2}{2!}e^{-4} = 0,0183 + 0,0733 + 0,1465 = 0,2381.$$

Zusammenhang zwischen Binominalverteilung und POISSON-Verteilung

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ np = \lambda}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{4.18}$$

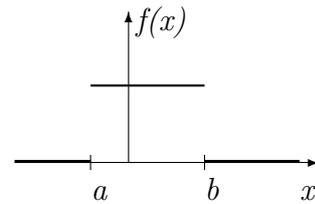
Dies ist der POISSONSche Grenzwertsatz. Die POISSON-Verteilung geht aus der **Binomialverteilung** hervor, wenn n gegen unendlich strebt, derart, dass $np = \lambda$ konstant bleibt. Für $n \gg 1$ und $p \ll 1$ gilt $p_k^B = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p_k^P$. Da in (4.18) wegen $n \rightarrow \infty$ und $np = \lambda$ konstant, die Wahrscheinlichkeit p des untersuchten Ereignisses sehr klein wird, nennt man die POISSON-Verteilung auch die Verteilung der seltenen Ereignisse (Anwendung in der statistischen Qualitätskontrolle).

4.3.2 Stetige Verteilungen

1. Die stetige gleichmäßige Verteilung

Definition 4.16 Nimmt die stetige Zufallsgröße X alle Werte aus dem Intervall $[a, b]$ ($a < b$) an, so heißt X **gleichmäßig** verteilt (auch **Rechteckverteilt**), wenn für ihre Dichte gilt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{für } x < a \vee x > b \end{cases}.$$



Verteilungsfunktion:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x \geq b \end{cases}.$$

Erwartungswert:
$$\mu = EX = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Streuung:
$$\sigma^2 = D^2X = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Beispiel 4.43 Geometrische Wahrscheinlichkeit

Im Intervall $[a, b]$ werde ein Punkt eingetragen. Wir definieren eine Zufallsgröße X , die als Wert x diejenige Zahl aus $[a, b]$ annimmt, welche mit dem eingetragenen Punkt zusammenfällt.

Für $x < a$ ist $F(x) = P(X < x) = 0$.

Für $x \in [a, b]$ bedeutet $X < x$, dass der Punkt in das Intervall $[a, b]$ fällt. Für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ergibt sich $F(x) = P(X < x) \sim x - a \implies F(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

Für $x > b$ gilt $F(x) = P(X < x) = P(X < b) + P(b < X < x) = 1$.

Die betrachtete **stetige** Zufallsgröße ist **gleichmäßig verteilt**.

2. Die Normalverteilung (GAUSSsche Verteilung)

Definition 4.17 Nimmt die **stetige** Zufallsgröße alle Werte aus dem Intervall $]-\infty, \infty[$ an, so heißt X **normal** verteilt, wenn für ihre Dichte gilt:

$$\varphi(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty.$$

Dabei sind μ und σ die Parameter der Normalverteilung.

Schreibweise: $X \in N(\mu, \sigma^2)$ (lies: Die Zufallsgröße X ist normal verteilt mit den Parametern μ und σ^2).

Verteilungsfunktion:
$$\Phi(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Die Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \mu, \sigma^2) dx = 1$ ist erfüllt ist (vgl. Abschnitt 4.2.2).

Erwartungswert: $\mu = EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$

Streuung: $\sigma^2 = D^2X = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$

Untersuchung der Dichtefunktion $\varphi(x, \mu, \sigma^2)$:

1. $D(\varphi) = \mathbb{R}$, Schnittpunkt mit der y -Achse: $\varphi(0, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}},$

2. $\varphi'(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma^2} \right) = 0 \implies$

Maximum bei $x = \mu$, $\varphi_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad W(\varphi) = \left] 0, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right[$,

3. $\varphi''(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(\left(\frac{-(x-\mu)}{\sigma^2} \right)^2 - \frac{1}{\sigma^2} \right) = 0 \implies$

Wendepunkte bei $x_1 = \mu - \sigma, x_2 = \mu + \sigma,$

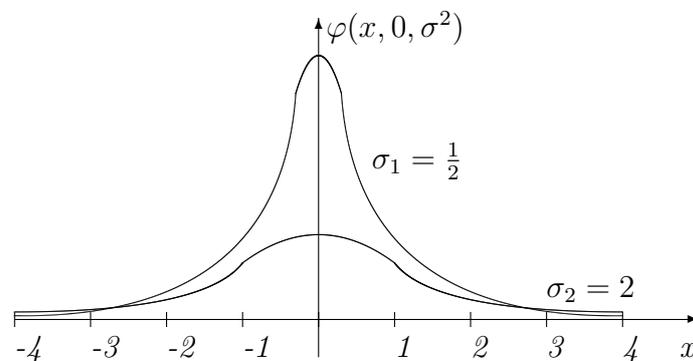
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x, \mu, \sigma^2) = 0,$

5. $\varphi(x, \mu, \sigma^2) > 0$ für jeden endlichen Wert $x \implies$ keine NS, keine Polstellen,

6. $\varphi(x, \mu, \sigma^2)$ symmetrisch zu $x = \mu$, d.h. es gilt: $\varphi(-(x-\mu)) = \varphi(x-\mu).$

Der Graph dieser Funktion heißt GAUSSsche Glockenkurve oder Fehlerkurve.

Beispiel 4.44 $\mu = 0, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu = 0, \quad \sigma_2 = 2$

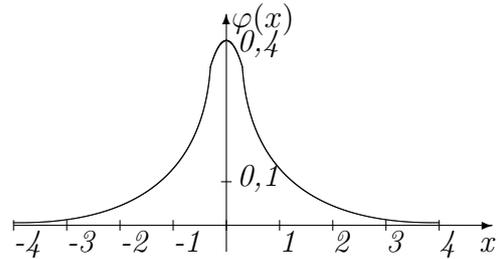


Die Fehlerkurve ist um so höher und steiler, je kleiner σ ist.

Beispiel 4.45 Dichtefunktion $\varphi(x)$ und Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung mit $\mu = 0$ $\sigma = 1$ $X \in N(0, 1)$.

$$\varphi(x, 0, 1) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x) \\ \implies \varphi(-x) &= \varphi(x). \end{aligned}$$



$$\Phi(x, 0, 1) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

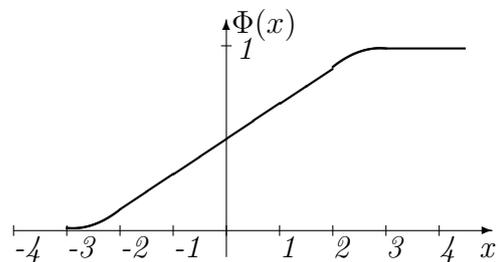
$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad t = -z$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{+x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^x \right] = 1 - \Phi(x)$$

$$\implies \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$



Theorem 4.3 Ist $X \in N(\mu, \sigma^2)$, so ist $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \in N(0, 1)$ (Sprechweise: Ist X normalverteilt mit μ, σ , so ist Z normalverteilt mit $0, 1$). Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad (4.19)$$

$$\Phi(x, \mu, \sigma^2) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right). \quad (4.20)$$

Beispiel 4.46 Die Zufallsgröße X sei die Streckgrenze einer bestimmten Stahlsorte, $X \in N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 310 \frac{N}{mm^2}$ und der Standardabweichung $\sigma = 32 \frac{N}{mm^2}$.

Gesucht: Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Streckgrenze im Intervall $[290, 320]$ liegt.

$$\begin{aligned} P(290 \leq X \leq 320) &= P\left(\frac{290 - 310}{32} \leq \frac{X - 310}{32} \leq \frac{320 - 310}{32}\right) \\ &= P(-0,63 \leq Z \leq 0,31) \end{aligned}$$

mit $Z \in N(0, 1)$. Die Zufallsgröße Z besitzt die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$. Da die Verteilungsfunktion Φ stetig ist, gilt nach Abschnitt 4.2.2:

$$\begin{aligned} P(-0,63 \leq Z \leq 0,31) &= \Phi(0,31) - \Phi(-0,63) \\ &= \Phi(0,31) - (1 - \Phi(0,63)) = 0,62 - 1 + 0,74 = 0,36. \end{aligned}$$

Die Streckgrenze der untersuchten Stahlsorte liegt mit der Wahrscheinlichkeit von 0,36 zwischen den Werten $290 \frac{N}{mm^2}$ und $320 \frac{N}{mm^2}$.

Beispiel 4.47 Die Zufallsgröße X sei der Beobachtungsfehler bei einer Längenmessung, $X \in N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 5\text{cm}$ und der Standardabweichung $\sigma = 8\text{cm}$.

Gesucht: Wahrscheinlichkeit dafür, dass der gemessene Wert um mehr als 10 cm vom wahren Wert abweicht.

$$\begin{aligned} P(|X| > 10) &= 1 - P(|X| \leq 10) = 1 - P(-10 \leq X \leq 10) \\ &= 1 - P\left(\frac{-10 - 5}{8} \leq Z \leq \frac{10 - 5}{8}\right) = 1 - P(-1,88 \leq Z \leq 0,63) \end{aligned}$$

mit $Z \in N(0, 1)$. Die Zufallsgröße Z besitzt die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$. Nach (4.12) in Abschnitt 4.2.2 gilt:

$$\begin{aligned} 1 - P(-1,88 \leq Z \leq 0,63) &= 1 - (\Phi(0,63) - \Phi(-1,88)) \\ &= 1 - (\Phi(0,63) - (1 - \Phi(1,88))) \\ &= 2 - \Phi(0,63) - \Phi(1,88) \\ &= 2 - 0,74 - 0,97 = 0,29. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der gemessene Wert um mehr als 10 cm vom wahren Wert abweicht, beträgt 0,29.

Bedeutung der Normalverteilung in der Statistik:

Gegeben: $X \in N(\mu, \sigma^2)$.

Gesucht: $P(|X - \mu| < \kappa\sigma)$

mit κ beliebig, reell. Aus (4.12) und (4.13) in Abschnitt 4.2.2 folgt:

$$P(|X - \mu| < \kappa\sigma) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < \kappa\right) = P\left(-\kappa < \frac{X - \mu}{\sigma} < +\kappa\right) = P(-\kappa < Z < \kappa)$$

$$\text{mit } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \in N(0, 1) \text{ und } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Daraus folgt:

$$P(-\kappa < Z < \kappa) = \Phi(\kappa) - \Phi(-\kappa) = \Phi(\kappa) - [1 - \Phi(\kappa)] = 2\Phi(\kappa) - 1$$

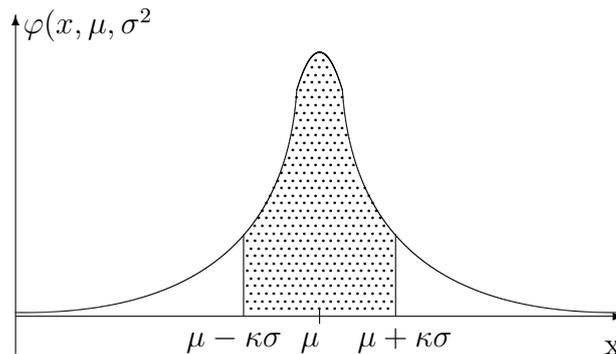
und somit

$$P(|X - \mu| < \kappa\sigma) = \Phi(\kappa) - \Phi(-\kappa) = 2\Phi(\kappa) - 1. \quad (4.21)$$

Geometrisch gibt (4.21) wegen

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| < \kappa\sigma) &= P(\mu - \kappa\sigma < X < \mu + \kappa\sigma) = \Phi(\mu + \kappa\sigma) - \Phi(\mu - \kappa\sigma) \\ &= \int_{\mu - \kappa\sigma}^{\mu + \kappa\sigma} \varphi(x, \mu, \sigma^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mu - \kappa\sigma}^{\mu + \kappa\sigma} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$

den Anteil der unter der Glockenkurve gelegenen Gesamtfläche innerhalb der Abzissenwerte $\mu - \kappa\sigma$ und $\mu + \kappa\sigma$ an.



Spezialfälle:

1. $\kappa = 1$ $P(|X - \mu| < \sigma) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,84135 - 1 = 0,6827 \Rightarrow$ im Intervall $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ liegen 68,27% der Gesamtfläche unter der Glockenkurve.
2. $\kappa = 2$ $P(|X - \mu| < 2\sigma) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0,97725 - 1 = 0,9545 \Rightarrow$ im Intervall $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ liegen 95,45% der Gesamtfläche unter der Glockenkurve.
3. $\kappa = 3$ $P(|X - \mu| < 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0,99865 - 1 = 0,9973 \Rightarrow$ im Intervall $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ liegen 99,73% der Gesamtfläche unter der Glockenkurve (3 σ -Regel).

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Zufallsgröße X um weniger als 3σ von μ unterscheidet, beträgt 0,9973, d.h. fast 1. Es gilt also mit einer Sicherheit von 99,73%, d.h. es ist fast sicher, dass $X \in N(\mu, \sigma^2)$ nur Werte innerhalb von $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ annimmt. Von 1000 Realisierungen der Zufallsgröße X gehören im Mittel 997 dem Intervall $]\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma[$ an.

Wenn $x \notin (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$, dann tritt eine von zwei Möglichkeiten ein:

1. $X \in N(\mu, \sigma^2)$, es liegt ein seltenes Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit von 0.0027 vor, es tritt nur in 27 von 10^5 Fällen ein.
2. X ist nicht normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Streuung σ^2 , sie hat z.B. einen anderen Erwartungswert oder genügt einer anderen Verteilungsfunktion.

Bei Prüfverfahren in der mathematischen Statistik trifft man stets die 2. Entscheidung und begeht dabei in 0,27% aller Fälle einen Fehler. Ist die Zufallsgröße X **überhaupt nicht** normalverteilt, so verwendet man die für eine **beliebige** Verteilung gültige Abschätzung

$$P(|X - \mu| < \kappa\sigma) > 1 - \frac{1}{\kappa^2}. \quad (4.22)$$

Für $\kappa = 3$ erhält man aus (4.22): $P(|X - \mu| < 3\sigma) > 1 - \frac{1}{9} = 0,8\bar{8}$

Es folgt die schwächere dafür aber für jede beliebige Verteilung zutreffende Aussage, dass innerhalb von $]\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma[$ mindestens 89% aller Werte von X liegen.

Bei häufiger Wiederholung von Messungen ein und desselben Gegenstandes streuen die Messwerte, d.h. die Messwerte weisen Abweichungen von einem bestimmten wahren Wert (Soll-oder Mittelwert) auf.

Ursachen:

Systematische Fehler - behebbar (Änderung der Justierung des Messgerätes).

Zufällige Fehler - nicht ausschaltbar (Temperaturschwankungen, Erschütterungen).

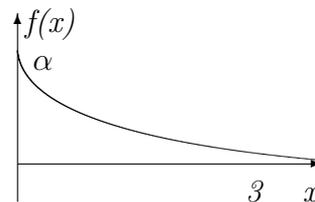
Fassen wir die Messungen einer Größe als Versuch auf und definieren die Zufallsgröße X als das Messergebnis, so ist in vielen Fällen, in denen die zufälligen Fehler durch **additive** Überlagerung einer großen Anzahl voneinander unabhängiger, zufälliger Effekte entstehen, wobei jeder dieser Effekte nur einen unbedeutenden Einfluss auf den zufälligen Gesamtfehler hat, diese Zufallsgröße normalverteilt. Die zugehörige Dichtefunktion hat die Gestalt der Fehlerkurve.

Aber: Es gibt eine Reihe praktischer Messprobleme, für die die Normalverteilung ungeeignet ist. z.B. Messung einer lichten Weite an einem Werkstück.

3. Die Exponentialverteilung

Definition 4.18 Die **stetige** Zufallsgröße X , die alle Werte aus dem Intervall $]-\infty, \infty[$ annehmen kann, genügt der **Exponentialverteilung** mit dem Parameter $a > 0$, wenn ihre Dichte gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



Verteilungsfunktion: $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

Erwartungswert: $\mu = EX = \int_0^{\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} = \frac{1}{\alpha}$.

Streuung: $\sigma^2 = D^2X = \int_0^{\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$.

I. Allg. sind Zeitmessungen in guter Näherung exponentialverteilt. Die Zufallsvariable T ist die Zeitdauer bis zum Ausfall eines Bauteils bzw. bis zum Eintreten eines Ereignisses.

Beispiel 4.48 Die Zeit T (in Stunden), die zur Reparatur eines Autos erforderlich ist, genüge der Exponentialverteilung mit $\alpha = 0,25$ (in Stunden^{-1}).

Gesucht: Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reparaturzeit für ein Fahrzeug weniger als 6 Stunden beträgt. Wieviel Stunden werden im Durchschnitt zur Reparatur eines Fahrzeugs gebraucht?

$$P(T < 6) = F(6) = 1 - e^{-0,25 \cdot 6} = 1 - 0,223 = 0,777,$$

$$\mu = ET = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,25} = 4.$$

Im Durchschnitt werden 4 Stunden Reparaturzeit benötigt.

Beispiel 4.49 Die Zeitdauer T eines Telefongesprächs (in min) genüge der Exponentialverteilung mit $\alpha = 0,25$ (in min^{-1}).

Gesucht: Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gespräch weniger als 6 Minuten dauert. Wieviel Minuten dauert im Durchschnitt ein Gespräch?

$$P(T < 6) = F(6) = 1 - e^{-0,25 \cdot 6} = 1 - 0,223 = 0,777,$$

$$\mu = ET = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,25} = 4.$$

Im Durchschnitt dauert ein Gespräch 4 min.

Index

- N, 16
- Abkühlgeschwindigkeit, 10
- Abkühlvorgang, 5
- Anfangsbedingungen, 23
- Anfangsdaten, 12
- Anfangswert der unabhängigen Variablen, 12
- Anfangswerte der Lösung, 12
- Anfangswertproblem, 23
- Bayessche Formel, 45
- Beschleunigung, 1
- Bewegung,
 - geradlinige gleichförmige, 1
- Binomialkoeffizienten, 38
- Binominalverteilung, 53
- charakteristische Gleichung, 16
- charakteristisches Polynom, 15
- Differenzialgleichung,
 - gewöhnliche, 1
 - lineare,
 - 1. Ordnung, 8
 - 2. Ordnung, 24
 - homogene, 8, 11
 - inhomogene, 8, 11
 - mit trennbaren Variablen, 7
- Eigenschwingung, 19
- Eigenschwingung,
 - gedämpfte, 20
 - ungedämpfte, 20
- Elementarereignis, 36
- Ereignisfeld, 36
- Erwartungswert, 50
- Exponentialverteilung, 64
- Geschwindigkeit, 1
- Gleichungssystem,
 - lineares, 14
 - lineares algebraisches, 24
- Häufigkeit
 - absolute, 39
 - relative, 39
- Integral,
 - unbestimmtes, 1
- Integrationskonstante, 1
- Isoklinen, 6
- Kurvenschar, 1
 - einparametrische, 2
 - zweiparametrische, 24
- Lösung, 2, 11
- Lösung,
 - allgemeine, 11
 - im erweiterten Sinne, 4
 - nichttriviale, 20
 - partikuläre, 11
 - spezielle, 11
 - triviale, 20
- Lösungskurve, 3
- Methode der Störgliedansätze, 17
- Methode der Variablenentrennung, 7
- Modellierung, 5
- Normalverteilung, 59
- Poisson-Verteilung, 57
- Randbedingungen, 23
- Randwertproblem, 24
- Resonanz, 23
- Richtungselement, 6
- Richtungsfeld, 6
- Schwebung, 23
- Schwingung,
 - elektrische, 19
 - erzwungene, 19
 - gedämpfte, 19
 - mechanische, 19
 - ungedämpfte, 19
 - ungedämpfte erzwungene, 21
- Störglied,
 - stetiges, 8
- Stammfunktion, 1
- Standardabweichung, 51
- Störglied,
 - unstetiges, 3

Streuung, 51

Umkehrfunktion, 2, 3

Variation der Konstanten, 9

Vermischungsprozesse, 5

Verteilung, 53

- diskrete, 53
 - gleichmäßige, 53
- stetige, 58
 - gleichmäßige, 58

Verteilungsfunktion, 46

Wahrscheinlichkeit, 33

- axiomatische Definition, 40
- bedingte, 42
- Definition mittels relativer Häufigkeit, 39
- geometrische Definition, 38
- klassische Definition, 38
- totale, 44

Wahrscheinlichkeitsdichte, 49

Wronskische Determinante, 12, 27

Zufallsexperiment, 33

Zufallsgröße

- diskrete, 46
- eindimensionale, 46
- stetige, 46