

Vorlesungsskript Mathematik I.2 für die  
Bachelorstudiengänge  
BAINE, BAINM, BAP, BMEP, BSPE, BTK, CH

Verfasserin:  
HSD Dr. Sybille Handrock  
TU Chemnitz  
Fakultät für Mathematik  
e-mail: handrock@mathematik.tu-chemnitz.de

Sommersemester 2008

## Literatur

- [1] *Ansorge, R., Oberle, H.-J.*: Mathematik für Ingenieure, Bd. 1, Wiley-VCH, Weinheim, 2000.
- [2] *Burg, K., Haf, H., Wille, F.*: Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. 2, Teubner, Stuttgart, 2006.
- [3] *Dallmann, H., Elster, K. H.*: Einführung in die höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Bd. 1–2, Uni-TB GmbH, Stuttgart, 1991.
- [4] *Dietmaier, C.*: Mathematik für Wirtschaftsingenieure, Fachbuchverlag, Leipzig, 2005.
- [5] *Henze, N., Last, G.*: Mathematik für Wirtschaftsingenieure, Bd. 1–2, Vieweg, Braunschweig, 2005/2004.
- [6] *Luderer, B., Würker, U.*: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik, B.G. Teubner, Stuttgart, 2005.
- [7] *Nollau, V.*: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, B.G. Teubner, Stuttgart, 2006..

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Analytische Geometrie</b>	<b>1</b>
1.1 Vektoren in der Ebene und im Raum . . . . .	1
1.1.1 Skalare und Vektoren . . . . .	1
1.1.2 Produkte von Vektoren . . . . .	2
1.2 Geraden in der Ebene und im Raum . . . . .	6
1.2.1 Geradengleichungen (GG) . . . . .	6
1.2.2 Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden . . . . .	8
1.2.3 Anwendungen der GG . . . . .	8
1.3 Ebenen im Raum . . . . .	10
1.3.1 Ebenengleichungen (EG) . . . . .	10
1.3.2 Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen im Raum . . . . .	11
1.3.3 Anwendungen der EG . . . . .	12
1.4 Gerade und Ebene . . . . .	12
1.4.1 Die Hessesche Normalform (HNF) . . . . .	12
1.4.2 Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene . . . . .	13
1.4.3 Anwendungen der EG und GG . . . . .	14
<b>2 Lineare Algebra</b>	<b>15</b>
2.1 Vektorräume . . . . .	15
2.2 Matrizen und Determinanten . . . . .	17
2.2.1 Begriff der Matrix . . . . .	17
2.2.2 Rechenoperationen mit Matrizen . . . . .	19
2.2.3 Die Determinante einer quadratischen Matrix . . . . .	21
2.2.4 Der Rang einer Matrix . . . . .	23
2.2.5 Die inverse Matrix . . . . .	24
2.2.6 Spezielle Matrizen . . . . .	25
2.3 Lineare Gleichungssysteme . . . . .	26
2.3.1 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	26
2.3.2 Lösungsstruktur IGS . . . . .	28
2.3.3 Lösungsverfahren . . . . .	29
<b>3 Lineare Optimierung</b>	<b>34</b>
3.1 Aufgabenstellung und grafische Lösungsmöglichkeiten . . . . .	34
3.2 Die Normalform einer LOP . . . . .	36

3.3	Der Simplexalgorithmus zur Lösung von LOP . . . . .	38
3.3.1	Ermittlung einer Basisdarstellung . . . . .	38
3.3.2	Ein Simplexkriterium . . . . .	39
3.3.3	Das Simplexverfahren . . . . .	39
3.3.4	Ermittlung eines Simplextableaus . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Kurven und Flächen 2. Ordnung</b>	<b>42</b>
4.1	Matrizeigenwertprobleme . . . . .	42
4.2	Transformation quadratischer Formen . . . . .	45
4.3	Klassifikation von Kurven 2. Ordnung . . . . .	48
4.4	Klassifikation von Flächen 2. Ordnung . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen</b>	<b>50</b>
5.1	Definition und Darstellungsmöglichkeiten . . . . .	50
5.2	Grenzwerte und Stetigkeit . . . . .	51
5.3	Partielle Differenzierbarkeit . . . . .	52
5.4	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	53
5.5	Totale Differenzierbarkeit und totales Differenzial . . . . .	54
5.6	Extremwerte reeller Funktionen mehrerer reeller Variabler . . . . .	55
5.6.1	Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . . .	55
5.6.2	Die Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	57
5.6.3	Extremwerte unter Nebenbedingungen . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>61</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>65</b>

# 1 Analytische Geometrie

## 1.1 Vektoren in der Ebene und im Raum

### 1.1.1 Skalare und Vektoren

In der Naturwissenschaft und Technik unterscheiden wir skalare und vektorielle Größen.

Ein **Skalar** ist eine Größe, welche durch Angabe einer **reellen Maßzahl** bei festgelegter Maßeinheit bestimmt ist. Die Maßzahl gibt quantitative Merkmale des Skalars an, während die Maßeinheit auf qualitative Merkmale hinweist.

Beispiele für **Skalare**: Masse, Zeit, Temperatur, Energie.

Ein **Vektor** ist eine Größe, welche durch Angabe einer **nicht negativen Maßzahl** und einer **Richtung** bestimmt ist.

Beispiele für **Vektoren**: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Feldstärke.

Zur bequemen Ausführung von Operationen mit **Vektoren** betrachten wir ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung  $O$  und den Achsen  $x, y, z$ . Ein Punkt  $P_1$  im Raum besitzt dann die Koordinaten  $(x_1, y_1, z_1)$ . Wir schreiben  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  für die **Koordinaten** des **Punktes**  $P_1$ . Die von  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  nach  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  gerichtete Strecke  $\overline{P_1P_2}$  mit dem Anfangspunkt  $P_1$  und dem Endpunkt  $P_2$  definiert einen **Vektor**  $\overrightarrow{P_1P_2}$  im Raum. Die **Koordinaten** des **Vektors**  $\overrightarrow{P_1P_2}$  sind:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt unendlich viele **Vektoren**, die die **Koordinaten**  $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$  besitzen. Sie alle gehen durch Parallelverschiebung auseinander hervor und werden als gleich angesehen. Deshalb schreiben wir

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

und betrachten  $\overrightarrow{P_1P_2}$  als einen **Repräsentanten** von  $\mathbf{a}$ .

Analog gehen wir in einem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem vor. Ein **Vektor**  $\mathbf{a}$  in der Ebene besitzt nur zwei Koordinaten  $a_1$  und  $a_2$ .

### Definition 1.1 (Betrag eines Vektors, freier, gebundener Vektor)

1. **Betrag**  $|\mathbf{a}|$  des **Vektors**  $\mathbf{a}$  heißt die Länge der Strecke  $\overline{P_1P_2}$ , wobei  $\overrightarrow{P_1P_2}$  ein beliebiger **Repräsentant** von  $\mathbf{a}$  ist. Der **Betrag** eines **Vektors** ist ein **Skalar**, also eine Zahl.
2. Ein **Vektor** heißt **Einheitsvektor**, wenn er den **Betrag** 1 besitzt.
3. Ein **Vektor** heißt **Nullvektor** (Bezeichnung  $\Theta$ ), wenn  $P_1 = P_2$  ist. Sein **Betrag** ist gleich Null, seine **Richtung** unbestimmt.

4. Ein **Vektor** heißt **gebundener Vektor**, wenn sein Anfangspunkt ein fixierter Punkt des Raumes (oder der Ebene) ist. Physikalisch heißt das, es liegt ein fester Angriffspunkt vor.
5. Zwei **Vektoren** heißen **gleich**, wenn sie den gleichen **Betrag** und die gleiche **Richtung** besitzen.
6. Die Menge aller **Vektoren**, die man aus einem vorgegebenen **Vektor a** durch Parallelverschiebung erhält (alle zu **a** gleichen **Vektoren**) nennt man den zu **a** gehörigen **freien Vektor**.
7. Es sei in der Ebene bzw. im Raum ein Koordinatenursprung  $O$  festgelegt. Ein **gebundener Vektor** heißt **Ortsvektor**, wenn sein Anfangspunkt in  $O$  liegt.

### Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren:

Auf den Achsen eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems tragen wir die ein Rechtssystem bildenden **Einheitsvektoren**  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{k}$  mit dem Anfangspunkt in  $O$  ab. Dann heißt  $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$  Komponentendarstellung für den **Ortsvektor**  $\mathbf{r}_2$  des Punktes  $P_2$  und  $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  Komponentendarstellung für einen **freien Vektor a** bezüglich eines fixierten Koordinatensystems. Die entsprechenden Koordinatendarstellungen bezüglich eines fixierten Koordinatensystems lauten:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Die Rechenregeln für die **Addition** und die **Multiplikation mit einem Skalar** (d.h., mit einer reellen Zahl) sind die gleichen wie bei komplexen Zahlen. Das Konzept für Produkte von **Vektoren** ist jedoch völlig anders als für das Produkt komplexer Zahlen.

#### 1.1.2 Produkte von Vektoren

##### 1. Das Skalarprodukt (SK)

**Definition 1.2 SK** oder **inneres Produkt** zweier **Vektoren a** und **b** heißt der **Skalar**

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$$

mit  $\alpha = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Speziell heißt  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$  **Skalarquadrat**.

Ist  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  oder  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , so setzt man  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ . Ist  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , so gilt:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \text{ ist } \begin{cases} > 0, & \text{falls } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \\ = 0, & \text{falls } \alpha = \frac{\pi}{2} \\ < 0, & \text{falls } \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi. \end{cases}$$

#### Eigenschaften des SK

- (1)  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$  Das Zeichen  $\perp$  bedeutet, dass  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  **orthogonal** zueinander sind, d.h., sie stehen senkrecht aufeinander.
- (2)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  gleichgerichtet  $\implies \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$
- (3)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  entgegengesetzt gerichtet  $\implies \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$
- (4) Für  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  folgt aus Definition 1.2  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}|^2$ . Dann ist  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ .
- (5)  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
- (6)  $\langle (\mathbf{a} + \mathbf{b}), \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$
- (7)  $\langle (\lambda \mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, (\lambda \mathbf{b}) \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- (8) Das **SK** ist **nicht assoziativ**, da die Produkte  $\langle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \mathbf{c} \rangle$  und  $\langle \mathbf{a}, \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \rangle$  nicht definiert sind.
- (9) Für die **SK** der **Einheitsvektoren**  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{i}, \mathbf{i} \rangle &= \langle \mathbf{j}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{k}, \mathbf{k} \rangle = 1, \\ \langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle &= \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}, \mathbf{i} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{j}, \mathbf{i} \rangle &= \langle \mathbf{k}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{i}, \mathbf{k} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt für das **SK** zweier beliebiger **Vektoren** in Koordinatenschreibweise:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}, b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

**Beispiel 1.1** Eine konstante Kraft  $\mathbf{F}$  leistet längs ihrer Wirkungslinie auf einem Weg  $\mathbf{s}$  der Länge  $|\mathbf{s}|$  die Verschiebungsarbeit  $W$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

- (1) Die **Vektoren**  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{s}$  sind gleichgerichtet:  $W = |\mathbf{F}||\mathbf{s}| \stackrel{(2)}{=} \langle \mathbf{F}, \mathbf{s} \rangle$ .
- (2) Die **Vektoren**  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{s}$  bilden einen Winkel  $\alpha \neq 0$ .

Hier ist nur die Kraftkomponente  $\mathbf{F}_s$ , d.h. die Projektion von  $\mathbf{F}$  auf den Vektor  $\mathbf{s}$ , wirksam und zwar sind für  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  die **Vektoren**  $\mathbf{F}_s$  und  $\mathbf{s}$  gleichgerichtet und für  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  entgegengesetzt gerichtet. Für die Verschiebungsarbeit gilt

$$W = \begin{cases} |\mathbf{F}_s||\mathbf{s}| & \text{falls } \mathbf{F}_s \text{ und } \mathbf{s} \text{ gleichgerichtet,} \\ -|\mathbf{F}_s||\mathbf{s}| & \text{falls } \mathbf{F}_s \text{ und } \mathbf{s} \text{ entgegengesetzt gerichtet.} \end{cases}$$

Ist  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , so gilt  $|\mathbf{F}_s| = |\mathbf{F}| \cos \alpha$  und für  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  ist  $|\mathbf{F}_s| = |\mathbf{F}| \cos(\pi - \alpha) = -|\mathbf{F}| \cos \alpha$ .

Außerdem ist  $W = |\mathbf{F}||\mathbf{s}|$  für  $\alpha = 0$  und  $W = -|\mathbf{F}||\mathbf{s}|$  für  $\alpha = \pi$ .

Somit gilt  $W = |\mathbf{F}||\mathbf{s}| \cos \alpha = \langle \mathbf{F}, \mathbf{s} \rangle$  für  $\alpha \in [0, \pi] \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2}$  und  $W = 0$  für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

## 2. Das Vektorprodukt (VP)

**Definition 1.3** VP zweier Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  im Raum heißt ein Vektor  $\mathbf{v}$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $|\mathbf{v}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha$ , mit  $\alpha = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,
2.  $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$  und  $\mathbf{v} \perp \mathbf{b}$ ,
3.  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}$  bilden in dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem**, falls  $|\mathbf{v}| \neq 0$ .

Bezeichnung:  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Der Betrag des VP  $|\mathbf{v}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  gibt den Flächeninhalt des von den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms  $B$  an, denn  $P(B) = g \cdot h = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  mit  $g = |\mathbf{a}|$  und  $h = |\mathbf{b}| \sin \alpha$ .

### Eigenschaften des VP

- (1)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \Theta \iff \mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind **kollinear**, d.h. gleich oder entgegengesetzt gerichtet.
- (2) Speziell ist  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \Theta$ .
- (3)  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \implies |\mathbf{v}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$
- (4)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ , d.h. das VP ist **nicht kommutativ**, sondern **alternativ**.
- (5)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
- (6)  $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- (7) Das VP ist **nicht assoziativ**. Die Produkte  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  und  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  existieren und sind jeweils wieder Vektoren. I.Allg. gilt aber die Gleichheit nicht.
- (8) Für die VP dreier aufeinander senkrecht stehender und ein Rechtssystem bildender **Einheitsvektoren**  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \Theta, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} &= \mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} &= \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} &= \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für das VP zweier beliebiger Vektoren in Koordinatenschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

**Beispiel 1.2** Ein starrer Körper  $K$  sei um eine feste Achse  $z$  drehbar, im Punkt  $P$  dieses Körpers greife eine Kraft  $\mathbf{F}$  an. Ferner sei  $\mathbf{a}$  ein Vektor mit dem Anfangspunkt in  $O$  und dem Endpunkt  $P$ , d.h.,  $|\mathbf{a}|$  ist der Abstand des Angriffspunktes von der Drehachse. Zu bestimmen ist das Drehmoment  $M$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1)  $\mathbf{F} \perp \mathbf{a}$ :  $M = |\mathbf{a}| |\mathbf{F}|$ .

(2)  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{a}$  bilden einen Winkel  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , d.h. es wird nur die zu  $\mathbf{a}$  orthogonale Komponente  $\mathbf{F}_n$  von  $\mathbf{F}$  bezüglich des Vektors  $\mathbf{a}$  wirksam:

$$M = |\mathbf{a}| |\mathbf{F}_n| = |\mathbf{a}| |\mathbf{F}| \sin \alpha.$$

Somit ist  $M = |\mathbf{a} \times \mathbf{F}|$ . Speziell gilt  $M = 0$  für  $\alpha = 0$ .

### 3. Das Spatprodukt (SP)

**Definition 1.4** SP der Vektoren  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  heißt das **SK** dieser Vektoren.

Bezeichnung:  $(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{c} \rangle$

Sei  $\tau = \angle(\mathbf{v}, \mathbf{c})$ ,  $0 \leq \tau \leq \pi$ . Ist  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , so gilt:

- Für  $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2}$  bilden  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ein **Rechtssystem** und es ist  $(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) > 0$ .
- Für  $\frac{\pi}{2} < \tau \leq \pi$  bilden  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  ein **Linkssystem** und es ist  $(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) < 0$ .

#### Eigenschaften des SP

- (1)  $(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  sind **komplanar**, d.h. sie liegen in einer Ebene.
- (2)  $\langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \rangle = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$     Vertauschungsgesetz
- (3)  $(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{a}) = (\mathbf{c} \mathbf{a} \mathbf{b})$     Bei zyklischer Vertauschung kein Vorzeichenwechsel.
- (4)  $(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c}) = -(\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a}) = -(\mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{b})$     Vorzeichenwechsel, da **VP alternativ**.
- (5)  $(\lambda \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = \lambda (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$
- (6)  $([\mathbf{a} + \mathbf{b}] \mathbf{c} \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{d}) + (\mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{d})$
- (7)  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \implies (\mathbf{a} \mathbf{a} \mathbf{c}) = 0$
- (8) Aus den Formeln des **SK** und des **VP** in Koordinatenschreibweise folgt für das **SP** in Koordinatenschreibweise:

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{c} \rangle &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3. \end{aligned}$$

**Beispiel 1.3** Eine Flüssigkeit fließe mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{c}$  durch eine Parallelogrammfläche, wobei das Parallelogramm von den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannt wird. Dann ist  $|\mathbf{v}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  die Maßzahl des Flächeninhaltes des Parallelogramms. Ferner sei  $\tau$  der Winkel zwischen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{c}$ . Gesucht ist die Flüssigkeitsmenge  $f$ , die pro Zeiteinheit durch die Parallelogrammfläche fließt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  spannen ein gerades Prisma auf, d.h.  $\tau = 0 \vee \tau = \pi$ .

Sei  $\tau = 0$  ( $\mathbf{v}, \mathbf{c}$  gleichgerichtet). Es ist

$$f = |\mathbf{v}||\mathbf{c}| \cos 0 = |\mathbf{v}||\mathbf{c}| = \langle \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) > 0.$$

Sei  $\tau = \pi$  ( $\mathbf{v}, \mathbf{c}$  entgegengesetzt gerichtet). Es ist

$$f = |\mathbf{v}||\mathbf{c}| \cos \pi = -|\mathbf{v}||\mathbf{c}| = \langle \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) < 0.$$

(2)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  spannen ein schiefes Prisma auf, d.h.  $0 < \tau < \pi$ . Dann ist nur die zur Parallelogrammfläche orthogonale Komponente  $\mathbf{c}_n$  von  $\mathbf{c}$  zu berücksichtigen.

Sei  $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ . Es ist, da  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{c}_n$  gleichgerichtet

$$f = |\mathbf{v}||\mathbf{c}_n| = |\mathbf{v}||\mathbf{c}| \cos \tau = \langle \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) > 0.$$

Sei  $\frac{\pi}{2} < \tau < \pi$ . Es ist, da  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{c}_n$  entgegengesetzt gerichtet

$$f = -|\mathbf{v}||\mathbf{c}_n| = -|\mathbf{v}||\mathbf{c}| \cos(\pi - \tau) = -|\mathbf{v}||\mathbf{c}|(-\cos \tau) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) < 0.$$

Für das Volumen  $V$  des geraden bzw. schiefen Prismas erhält man  $V = |f| = |(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})|$ . Speziell gilt  $f = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = 0$  für  $\tau = \frac{\pi}{2}$ . Ist  $\mathbf{c}$  ein beliebiger Vektor, so spricht man allgemein vom **Vektorfluss**  $(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$  des Vektors  $\mathbf{c}$  durch die von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannte Parallelogrammfläche in Richtung von  $\mathbf{c}$ . Bedeutet speziell  $\mathbf{c}$  eine Kraft oder die elektrische bzw. magnetische Feldstärke, so ist durch das **SP**  $(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$  der Kraft- bzw. Feldfluss in Richtung von  $\mathbf{c}$  durch die von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannte Parallelogrammfläche gegeben.

## 1.2 Geraden in der Ebene und im Raum

### 1.2.1 Geradengleichungen (GG)

Wir betrachten ein Koordinatensystem im Raum mit den Achsen  $x, y$  und  $z$ . Eine Gerade  $g$  ist eindeutig bestimmt durch **einen ihrer Punkte**  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  und ihre **Richtung** (gegeben durch  $\mathbf{w} \neq \Theta$ ) oder durch zwei ihrer Punkte  $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ . In unsere weiteren Betrachtungen schließen wir den Fall der Geraden in einer Ebene sofort mit ein, indem die dritte Koordinate der Punkte und Vektoren jeweils gleich 0 gesetzt wird.

#### 1. Parametergleichungen in Vektor- und Koordinatendarstellung

Für den **Ortsvektor**  $\mathbf{r}$  eines beliebigen Punktes  $P$  gelten die Beziehungen:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{w} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{Punktrichtungsgleichung (PRG)}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mu (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (\mu \in \mathbb{R}) \quad \text{Zweipunktgleichung (ZPG)}. \quad (1.2)$$

Die **Koordinatendarstellung** der Gleichungen (1.1) und (1.2) mit

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

lautet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

## 2. Parameterfreie Darstellungen

Aus (1.1) bzw. (1.2) erhält man eine parameterfreie Darstellung, indem man (1.1) **vektoriell** mit  $\mathbf{w}$  bzw. (1.2) **vektoriell** mit  $\mathbf{s} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$  multipliziert:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{w} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{w} + \lambda(\mathbf{w} \times \mathbf{w}) \implies (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{w} = \Theta, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s} + \mu(\mathbf{s} \times \mathbf{s}) \implies (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{s} = \Theta. \quad (1.6)$$

Die Gleichung (1.5) heißt im Raum auch **Plücker'sche Form der GG**. Die Koordinatenschreibweise von (1.5) bzw. (1.6) erhält man in der Form:

$$\begin{aligned} (y - y_1) w_3 &= (z - z_1) w_2 \\ (z - z_1) w_1 &= (x - x_1) w_3 \\ (x - x_1) w_2 &= (y - y_1) w_1, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} (y - y_1)(z_2 - z_1) &= (z - z_1)(y_2 - y_1) \\ (z - z_1)(x_2 - x_1) &= (x - x_1)(z_2 - z_1) \\ (x - x_1)(y_2 - y_1) &= (y - y_1)(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Falls alle Koordinaten der **Vektoren**  $\mathbf{w}$  bzw.  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  verschieden von Null sind, kann man (1.7) bzw. (1.8) in der **symmetrischen** oder **kanonischen Form** der **GG** schreiben:

$$\frac{x - x_1}{w_1} = \frac{y - y_1}{w_2} = \frac{z - z_1}{w_3}, \quad (1.9)$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (1.10)$$

## 3. Weitere Formen der Geradengleichung in der Ebene

Die Gleichungen (1.9) und (1.10) besitzen in der **Ebene** auch folgende Formen:

$$y = y_1 + \frac{w_2}{w_1}(x - x_1) \quad (\text{PRG}), \quad (1.11)$$

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (\text{ZPG}). \quad (1.12)$$

Aus (1.12) erhält man mit  $P_1 = (a, 0)$  und  $P_2 = (0, b)$  die **Achsenabschnittsgleichung**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (1.13)$$

Ferner liefert (1.11) mit  $m = \frac{w_2}{w_1}$  und  $b_1 = y_1 - m x_1$  die **Normalform** der Geradengleichung:

$$y = m x + b_1 \quad (1.14)$$

und (1.12) mit  $A = y_2 - y_1$ ,  $B = x_1 - x_2$ ,  $D = y_1 x_2 - x_1 y_2$  die **allgemeine Form** der Geradengleichung:

$$A x + B y + D = 0. \quad (1.15)$$

Dabei wird  $A^2 + B^2 > 0$  vorausgesetzt.

### 1.2.2 Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden

Zwischen zwei Geraden im Raum

$$g_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{w}_1 \quad g_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mu \mathbf{w}_2 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

können folgende Lagerelationen bestehen:

1. Die Geraden sind windschief, sie liegen also nicht in einer Ebene.
2. Die Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
3. Die Geraden sind parallel, aber nicht identisch.
4. Die Geraden sind identisch.

Offensichtlich treten in der Ebene nur die Lagebeziehungen 2. bis 4. auf.

**Theorem 1.1** *Es gilt:*

$$(1) \quad g_1, g_2 \text{ windschief} \iff (\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) = \langle \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \rangle \neq 0.$$

$$g_1, g_2 \text{ liegen in einer Ebene} \iff (\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) = 0.$$

$$(2) \quad g_1, g_2 \text{ schneiden sich} \iff (\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) = 0 \wedge \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 \neq \Theta.$$

$$(3) \quad g_1, g_2 \text{ parallel} \iff (\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) = 0 \wedge \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \Theta \wedge (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{w}_i \neq \Theta \quad (i = 1, 2).$$

$$(4) \quad g_1, g_2 \text{ identisch} \iff (\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) = 0 \wedge \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \Theta \wedge (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{w}_i = \Theta \quad (i = 1, 2).$$

### 1.2.3 Anwendungen der GG

1° **Bestimmung des Schnittpunktes  $S$  zweier Geraden  $g_1$  und  $g_2$ :**

Für den **Ortsvektor**  $\mathbf{r}_S$  von  $S$  gilt:

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_1 + \lambda_S \mathbf{w}_1 = \mathbf{r}_2 + \mu_S \mathbf{w}_2.$$

Für die **zwei** zu  $S = (x_S, y_S, z_S)$  gehörenden Parameterwerte  $\lambda_S$  und  $\mu_S$  ergibt sich im Raum ein System von **drei**, in der Ebene von **zwei** Gleichungen.

Besitzt es keine Lösung, so sind  $g_1, g_2$  windschief, falls  $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 \neq \Theta$ .

Besitzt es keine Lösung, so sind  $g_1, g_2$  parallel, falls  $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \Theta$ .

Besitzt es unendlich viele Lösungen, so sind  $g_1, g_2$  identisch.

Besitzt es genau eine Lösung, so schneiden sich  $g_1, g_2$  in einem Punkt.

### Beispiel 1.4

$$g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_S \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es ist  $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{k} \neq \Theta$ ,  $(\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) = 0$  und  $\begin{pmatrix} 4 \\ \lambda_S \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\mu_S \\ 6 \\ 3 - 3\mu_S \end{pmatrix}$ ,  
also  $\lambda_S = 6$ ,  $\mu_S = 1$  und  $S = (4, 6, 0)$ .

### 2° Abstand $d$ eines Punktes $P_0 \notin g$ von einer Geraden $g$ im Raum

Sei  $\mathbf{r}_0$  der Ortsvektor des Punktes  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Wir betrachten die **Plücker-  
sche Form der GG**  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{w}^0 = \Theta$  mit einem **Einheitsvektor**  $\mathbf{w}^0 = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ .  
Diese heißt dann **Plücker-  
sche Normalform**. Der Abstand  $d$  eines Punktes  $P_0$   
mit dem **Ortsvektor**  $\mathbf{r}_0$  von der Geraden  $g$  lässt sich mittels der **Plücker-  
schen Normalform der GG** berechnen: Mit  $\delta = \angle(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{w}^0)$  erhält man

$$d = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1| \sin \delta = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1| |\mathbf{w}^0| \sin \delta = |(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{w}^0| = \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{w}|}. \quad (1.16)$$

### Beispiel 1.5

$$g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:  $|\mathbf{w}^0| = 1$ . Sei  $P_0 = (0, 0, 0)$ . Dann ist  $d = |-\mathbf{r}_1 \times \mathbf{w}^0| = |-4\mathbf{k}| = 4$ .

### 3° Der Abstand $d$ zweier paralleler bzw. windschiefer Geraden

**Theorem 1.2** Sind  $g_1, g_2$  windschief, so existiert für jeden Vektor  $\mathbf{a}$  mit  $(\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 \mathbf{a}) \neq 0$  genau eine zu  $\mathbf{a}$  parallele Gerade  $g_0$ , die jede der Geraden  $g_1$  und  $g_2$  unter einem rechten Winkel schneidet, d.h., es existiert ein gemeinsames Lot von  $g_1$  und  $g_2$ . Die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_1 + \lambda_s \mathbf{w}_1$  und  $\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_2 + \lambda_t \mathbf{w}_2$  der Lotfußpunkte  $P_s$  und  $P_t$  erhält man aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_t \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle - \lambda_s \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle &= \langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \\ \lambda_t \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle - \lambda_s \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle &= \langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{w}_2 \rangle. \end{aligned}$$

**Theorem 1.3** Es gilt:

(1) Sind  $g_1, g_2$  **windschief**, so ist ihr kürzester Abstand

$$d = \frac{|(\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))|}{|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2|}.$$

(2) Sind  $g_1, g_2$  **parallel**, so ist ihr kürzester Abstand

$$d = |(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{w}_1^0| = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{w}_1|}{|\mathbf{w}_1|} = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{w}_2|}{|\mathbf{w}_2|} = |(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{w}_2^0|.$$

Als Spezialfall erhält man (1.16), indem man auf einer der beiden Geraden einen Punkt fixiert.

### Beispiel 1.6

$$g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

und  $(\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) = -68 \neq 0$ , d.h.  $g_1, g_2$  **windschief**. Außerdem ist  $|\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2| = 5\sqrt{3}$ , also  $d = 68(5\sqrt{3})^{-1}$ .

## 1.3 Ebenen im Raum

### 1.3.1 Ebenengleichungen (EG)

Eine Ebene  $E$  ist eindeutig bestimmt durch **einen ihrer Punkte**  $P_1$  und **zwei nicht kollineare Vektoren**  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  (mit dem gemeinsamen Anfangspunkt  $P_1$ ) oder durch **drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte**  $P_1, P_2, P_3$  mit  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

#### 1. Parametergleichungen in Vektor- und Koordinatendarstellung

Für den **Ortsvektor**  $\mathbf{r}$  eines beliebigen Punktes  $P \in E$  gelten die Beziehungen:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \text{ **Punkttrichtungsgleichung (PRG)**, (1.17)}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \mu (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \text{ **Dreipunktgleichung (DPG)**. (1.18)}$$

Man erhält mit (1.17), (1.18) **Parametergleichungen** der Ebene  $E$ . Da  $P_1, P_2, P_3$  gleichberechtigt sind, gibt es noch zwei äquivalente Darstellungen zu (1.18):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \lambda (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \mu (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_3 + \lambda (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \mu (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3).$$

Setzt man in (1.17)  $\lambda = \lambda_0$  ( $\mu_0$ ), so durchläuft  $P$  in  $E$  eine Gerade parallel zu  $\mathbf{v}$  ( $\mathbf{u}$ ).

Die **Koordinatendarstellung** der Gleichungen (1.17) und (1.18) mit

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

lautet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

## 2. Parameterfreie Darstellungen

Aus (1.17) bzw. (1.18) erhält man eine parameterfreie Darstellung, indem man (1.17) **skalar** mit  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  bzw. (1.18) **skalar** mit  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$  multipliziert:

$$((\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{u}\mathbf{v}) = 0, \quad (1.21)$$

$$((\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)) = 0. \quad (1.22)$$

Aus (1.22) erhält man mit  $P_1 = (a, 0, 0)$ ,  $P_2 = (0, b, 0)$  und  $P_3 = (0, 0, c)$  mit  $abc \neq 0$  die **Achsenabschnittsgleichung**:

$$\left( \begin{pmatrix} x - a \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (1.23)$$

Berechnet man in (1.22) das **SP** koordinatenweise und setzt die Koeffizienten bei  $x, y, z$  entsprechend gleich  $A, B, C$  sowie das Absolutglied gleich  $D$ , so erhält man die **allgemeine Form** der Ebenengleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1.24)$$

Dabei wird  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$  vorausgesetzt.

### 1.3.2 Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen im Raum

Zwischen zwei Ebenen im Raum

$$E_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \mu_1 \mathbf{v}_1 \quad E_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \mu_2 \mathbf{v}_2 \quad \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2)$$

können folgende Lagerelationen bestehen:

1. Die Ebenen schneiden sich in genau einer Geraden  $g$ .
2. Die Ebenen sind parallel, aber nicht identisch.
3. Die Ebenen sind identisch.

**Theorem 1.4** *Es gilt:*

- (1)  $E_1, E_2$  schneiden sich  $\iff \mathbf{w} := (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}_2) \neq \Theta$   
 (2)  $E_1, E_2$  parallel  $\iff \mathbf{w} = \Theta \wedge ((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) \neq 0 \wedge ((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2) \neq 0$   
 (3)  $E_1, E_2$  identisch  $\iff \mathbf{w} = \Theta \wedge ((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1) = ((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2) = 0$ .

### 1.3.3 Anwendungen der EG

1° **Ermittlung der Schnittgeraden** Sei  $E_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$       $E_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Falls das **lineare Gleichungssystem**

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

**lösbar** ist, so ist die Lösung **nicht eindeutig**. Die Menge der Lösungspunkte liefert die **Schnittgerade** der beiden **Ebenen**.

2° **Schnittwinkel  $\alpha$  zwischen zwei Ebenen** Mit  $E_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  und  $E_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  ist

$$\cos \alpha = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Das negative Vorzeichen liefert den  $\cos$  des Komplementärwinkels zu  $\pi$ .

## 1.4 Gerade und Ebene

### 1.4.1 Die Hessesche Normalform (HNF)

**Definition 1.5** *Ein Vektor  $\mathbf{n}$ , der die Bedingung*

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rangle = 0 \tag{1.25}$$

*erfüllt, wobei  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}_1$  die Ortsvektoren in den Parametergleichungen (1.17) bzw. (1.1) sind, heißt **Stellungs- oder Normalenvektor** der Ebene  $E$  im Raum bzw. der Geraden  $g$  in der Ebene. Ist die Ebenengleichung in der Form (1.17) gegeben, so erhält man einen **Normalenvektor** zur Ebene in der Form  $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . Es gibt immer zwei **Normalenvektoren**, die entgegengesetzt gerichtet sind, also  $-\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ . Wir wählen die Richtung so aus, dass  $\mathbf{n}$  stets vom Koordinatenursprung  $O$  zu  $E$  bzw. zu  $g$  gerichtet ist. Für  $O \in E$  bzw.  $O \in g$  wählen wir eine der beiden möglichen Richtungen.*

Da jede **Ebene** im Raum (jede **Gerade** in der Ebene) unendlich viele Darstellungen der Form (1.17) ((1.1)) besitzt, ist eine Normierung durch Einführung eines **Normaleneinheitsvektors**  $\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$  sinnvoll. Dieser erfüllt ebenfalls die Gleichung (1.25).

**Definition 1.6** Die Gleichung

$$\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rangle = 0 \quad (1.26)$$

heißt **Hessesche Normalform (HNF)** einer Ebene im Raum (einer Geraden in der Ebene).

Für eine Gerade im Raum existiert keine **HNF**, da unendlich viele **Vektoren** orthogonal zu ihr sind.

Eine **Koordinatendarstellung** der **HNF** findet man mit Hilfe von (1.24) ((1.15)). Wählt man nämlich  $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$  im Raum bzw.  $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$  in der Ebene, so erhält man  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle = Ax + By + Cz$  im Raum bzw.  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle = Ax + By$  in der Ebene. Wir setzen  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_1 \rangle = -D$ . Mit  $|\mathbf{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$  im Raum bzw.  $|\mathbf{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$  in der Ebene ergibt sich eine normierte **Koordinatendarstellung** von (1.26)

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad \left( \frac{Ax + By + D}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \right) \quad (1.27)$$

für eine Ebene im Raum (eine Gerade in der Ebene). Die jeweils entgegengesetzten **Normalenvektoren** sind  $-\mathbf{n} = -A\mathbf{i} - B\mathbf{j} - C\mathbf{k}$  im Raum und  $-\mathbf{n} = -A\mathbf{i} - B\mathbf{j}$  in der Ebene. Mit der Bezeichnung  $\frac{D}{|\mathbf{n}|} = -p$  ergibt sich aus (1.27) noch folgende Darstellung der **HNF**:

$$\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r} \rangle - p = 0. \quad (1.28)$$

Für jeden Punkt  $P \in E$  ( $P \in g$ ) mit dem **Ortsvektor**  $\mathbf{r}$  gilt  $0 \leq \angle(\mathbf{n}^0, \mathbf{r}) \leq \frac{\pi}{2}$ , also ist  $\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r} \rangle = p \geq 0$ . Außerdem gilt

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_1 \rangle = -D \iff \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_1 \rangle = -\frac{D}{|\mathbf{n}|} = p, \text{ also } p = \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_1 \rangle = |\mathbf{r}_1| \cos \alpha.$$

Somit gibt die nichtnegative Zahl  $p$  den **Abstand** des Koordinatenursprungs  $O$  von der Ebene  $E$  (der Geraden  $g$ ) an.

## 1.4.2 Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene

Zwischen einer Ebene und einer Geraden im Raum

$$E : \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r} \rangle - p = 0 \quad g : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{w} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

können folgende Lagerrelationen bestehen:

1.  $g$  und  $E$  schneiden sich in einem Punkt  $S$ , dem **Durchstoßpunkt**.
2.  $g$  parallel zu  $E$ , aber nicht in  $E$  enthalten.
3.  $g$  ist in  $E$  enthalten.

**Theorem 1.5** Es gilt:

(1)  $g$  schneidet  $E \iff \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{w} \rangle \neq 0$ . Sei  $d$  der Abstand der Geraden von der Ebene. Dann ist  $d = 0$ .

(2)  $g$  parallel  $E \iff \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{w} \rangle = 0 \wedge \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_1 \rangle \neq p$ . Dann ist  $d = |\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_1 \rangle - p| > 0$ .

(3)  $g$  ist in  $E$  enthalten  $\iff \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{w} \rangle = 0 \wedge \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_1 \rangle = p$ . Dann ist  $d = 0$ .

### 1.4.3 Anwendungen der EG und GG

#### 1° Abstand $d$ eines Punktes von einer Ebene im Raum (einer Geraden in der Ebene)

Sei  $\mathbf{r}_0$  der Ortsvektors eines Punktes  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  im Raum. Dann ist

$$d = |\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_0 \rangle - p| = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \quad (1.29)$$

der Abstand  $d$  des Punktes  $P_0$  von der Ebene  $E$  im Raum. Besitzen  $\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_0 \rangle - p$  und  $D$  entgegengesetzte Vorzeichen, so liegen die Punkte  $P_0$  und der Koordinatenursprung  $O$  auf verschiedenen Seiten von  $E$ . Sind die Vorzeichen von  $\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_0 \rangle - p$  und  $D$  gleich, so liegen  $P_0$  und  $O$  auf derselben Seite von  $E$ . Ist  $\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_0 \rangle - p = 0$ , so liegt  $P_0$  in  $E$ .

Sei  $\mathbf{r}_0$  der Ortsvektors eines Punktes  $P_0 = (x_0, y_0)$  in der Ebene. Dann ist

$$d = |\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_0 \rangle - p| = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \quad (1.30)$$

der Abstand  $d$  des Punktes  $P_0$  von der Geraden  $g$  in der Ebene. Die obigen Überlegungen lassen sich übertragen.

**Beispiel 1.7** Bestimmen Sie den Abstand des Punktes  $P_0 = (6, 6, 6)$  von der Ebene mit der Gleichung  $2x + y + 2z - 9 = 0$ .

Mit  $\mathbf{n}^0 = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}_0 = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  und  $p = -\frac{D}{|\mathbf{n}|} = 3$  erhält man  $\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_0 \rangle - p = 7 > 0$ . Wegen  $D = -9$  liegen  $P_0$  und  $O$  auf verschiedenen Seiten von  $E$ . Für den Abstand erhält man  $d = |\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_0 \rangle - p| = 7$ .

#### 2° Berechnung des Ortsvektors des Durchstoßpunktes $S$

Sei  $g : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{w}$  E:  $\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r} \rangle - p = 0$ .

Einsetzen von  $\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_1 + \lambda_S \mathbf{w}$  in die Ebenengleichung liefert

$$\langle \mathbf{n}^0, (\mathbf{r}_1 + \lambda_S \mathbf{w}) \rangle = p \implies \lambda_S = \frac{p - \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_1 \rangle}{\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{w} \rangle} \implies \mathbf{r}_S = \mathbf{r}_1 + \frac{p - \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r}_1 \rangle}{\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{w} \rangle} \mathbf{w}.$$

#### 3° Berechnung des Schnittwinkels zwischen Gerade und Ebene

**Definition 1.7** Schnittwinkel  $\alpha$  mit  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  zwischen der Geraden  $g$  und der Ebene  $E$  heißt der Winkel zwischen  $g$  und ihrer Projektion  $g_E$  auf  $E$ .

Sei  $g : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{w}$  und  $E : \langle \mathbf{n}^0, \mathbf{r} \rangle - p = 0$ .

Setzen  $\mathbf{w}^0 = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ . Dann ist

$$\sin \alpha = |\langle \mathbf{n}^0, \mathbf{w}^0 \rangle| = \frac{|\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{w}|}.$$

**Beispiel 1.8** Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen der Geraden  $g : \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{w}$  mit  $\mathbf{r}_1 = -12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  und  $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  und der Ebene  $6x + 15y - 10z + 31 = 0$ .

Mit  $\mathbf{n} = 6\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ ,  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle = -3$ ,  $|\langle \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 19$  und  $|\mathbf{w}| = 7$  erhält man  $\sin \alpha = \frac{3}{133}$   $\alpha = 1.29^\circ$ .

## 2 Lineare Algebra

### 2.1 Vektorräume

**Definition 2.1 (Vektorraum, Unterraum, lineare Mannigfaltigkeit)**

1. Eine Menge  $L$  von Elementen beliebiger Natur, in der eine Addition  $(+)$  und eine Multiplikation mit einer reellen (komplexen) Zahl  $(\cdot)$  erklärt ist, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \text{für beliebige zwei } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L &\implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in L, \\ \text{für jedes } \mathbf{x} \in L \text{ und jedes } \alpha \in \mathbb{R} (\alpha \in \mathbb{C}) &\implies \alpha \cdot \mathbf{x} \in L, \end{aligned}$$

heißt **reeller linearer Raum (komplexer linearer Raum) oder Vektorraum**  $V = [L, +, \cdot]$ , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

I. Gesetze bezüglich der Addition

- 1° Für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$  gilt:  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ .
- 2° Für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$  gilt:  $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ .
- 3° Es existiert genau ein bezüglich der Addition neutrales Element  $\Theta$ , so dass für alle  $\mathbf{x} \in L$  gilt:  $\mathbf{x} + \Theta = \mathbf{x}$ . Das Element  $\Theta$  heißt **Nullvektor**.
- 4° Zu jedem  $\mathbf{x} \in L$  existiert ein bezüglich der Addition inverses Element  $(-\mathbf{x}) \in L$ , so dass  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \Theta$  gilt. Das Element  $(-\mathbf{x})$  heißt der zu  $\mathbf{x}$  entgegengesetzte Vektor.

II. Gesetze bezüglich der Multiplikation mit einer reellen Zahl

- 1° Für alle  $\mathbf{x} \in L$  und alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$  gilt:  $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ .
- 2° Für alle  $\mathbf{x} \in L$  gilt:  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

III. Distributivgesetze: Für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$  und alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$  gilt:

- 1°  $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
- 2°  $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

2. Eine Teilmenge  $U$  eines Vektorraumes  $V$  heißt **Unterraum** von  $V$ , falls gilt:

$$\begin{aligned} \text{für beliebige zwei } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U &\implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in U, \\ \text{für jedes } \mathbf{x} \in U \text{ und jedes } \alpha \in \mathbb{R} (\alpha \in \mathbb{C}) &\implies \alpha \cdot \mathbf{x} \in U. \end{aligned}$$

3. Eine Teilmenge  $W \subset V$  heißt **lineare Mannigfaltigkeit** in  $V$ , wenn ein Element  $\mathbf{x}_0 \in V$  und ein **Unterraum**  $U$  von  $V$  existieren, so dass gilt:

$$W = U + \mathbf{x}_0 = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{x}_0, \mathbf{u} \in U\}.$$

**Beispiel 2.1 (Vektorräume)**

- (1) Die Menge  $C[a, b]$  aller im Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktionen mit den Operationen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ist ein **Vektorraum**, den wir mit  $[C[a, b], +, \cdot]$  bezeichnen. Die Menge  $C^1[a, b]$  aller im Intervall  $[a, b]$  einmal stetig differenzierbaren Funktionen, d.h. aller in  $[a, b]$  differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen außerdem in  $[a, b]$  stetig sind, ist ein **Unterraum**  $[C^1[a, b], +, \cdot]$  des Vektorraumes  $[C[a, b], +, \cdot]$ .

(2) Sei  $\mathbb{R}^n$  die Menge aller geordneten n-Tupel

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

reeller Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit den Operationen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $[\mathbb{R}^n, +, \cdot]$  ein **Vektorraum**. Sei  $\tilde{\mathbb{R}}^n$  die Menge aller geordneten n-Tupel

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

reeller Zahlen  $0, x_2, \dots, x_n$ . Mit den obigen Operationen ist  $[\tilde{\mathbb{R}}^n, +, \cdot]$  ein **Unterraum** des Vektorraumes  $[\mathbb{R}^n, +, \cdot]$ .

Speziell erhält man für  $n = 1$  den **Vektorraum**  $[\mathbb{R}^1, +, \cdot]$  (dabei ist  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ) **aller reellen Zahlen**, für  $n = 2$  den **Vektorraum**  $[\mathbb{R}^2, +, \cdot]$  **aller geordneten Paare** reeller Zahlen und für  $n = 3$  den **Vektorraum**  $[\mathbb{R}^3, +, \cdot]$  **aller geordneten Tripel** reeller Zahlen.

Geraden (Ebenen) durch den Koordinatenursprung  $O$  sind **Unterräume**. Geraden (Ebenen), die nicht durch  $O$  hindurchgehen, sind **lineare Mannigfaltigkeiten**. Jedes **geordneten Paar** reeller Zahlen kann man als **Koordinatenschreibweise** eines **Vektors** bezüglich eines festen Koordinatensystems auffassen, was die Bezeichnung **Vektorraum** erklärt. Analoges gilt für  $n \geq 3$ . Wir verwenden im Weiteren anstelle der Bezeichnung  $[\mathbb{R}^n, +, \cdot]$  die Kurzbezeichnung  $\mathbb{R}^n$ , da die Operationen im  $\mathbb{R}^n$  bekannt sind.

**Definition 2.2** Ist  $S$  eine nichtleere Menge von Elementen eines **Vektorraumes**  $V$ , so heißt jeder Ausdruck der Gestalt  $r_1 \mathbf{x}^1 + r_2 \mathbf{x}^2 + \dots + r_l \mathbf{x}^l$  mit  $r_1, r_2, \dots, r_l \in \mathbb{R}$  und  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^l \in S$  eine **Linearkombination** von  $S$ .

**Definition 2.3** Die **Vektoren**  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$  ( $\mathbf{x}^i \in V \forall i$ ) heißen **linear unabhängig**, wenn es für die Gleichung  $r_1 \mathbf{x}^1 + r_2 \mathbf{x}^2 + \dots + r_k \mathbf{x}^k = \Theta$  nur die **triviale Lösung**  $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$  gibt, anderenfalls heißen sie **linear abhängig**.

**Beispiel 2.2 (lineare Unabhängigkeit, lineare Abhängigkeit)**

(1) Die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

sind **linear unabhängig** in  $[C[-1, 1], +, \cdot]$  und **linear abhängig** in  $[C[-1, 0], +, \cdot]$  bzw.  $[C[0, 1], +, \cdot]$ .

(2) Die Vektoren  $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}^2$ .

(3) Die Vektoren  $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig in  $\mathbb{R}^2$ .

### Definition 2.4 (Dimension, Basis)

1. Die maximale Anzahl  $m$  linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes  $V$  heißt **Dimension** von  $V$ . Besitzt  $V$  die Dimension  $m$ , so nennt man  $V$   $m$ -dimensional und schreibt  $\dim V = m$ .
2. Je  $m$  linear unabhängige Elemente  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^m$  eines  $m$ -dimensionalen Vektorraumes  $V$  nennt man eine **Basis** von  $V$ .

**Lemma 2.1** Bilden die Vektoren  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$  eine Basis des Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$ , so lässt sich jeder Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basisvektoren darstellen, d.h., es existieren Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , die eindeutig bestimmt sind und für die gilt  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{x}^i$ .

### Beispiel 2.3 (Dimension, Basis)

(1) In  $[C[0, 1], +, \cdot]$  ist jedes System von Potenzfunktionen

$$f_i(t) = t^i \quad (i = 0, 1, \dots, p, \quad p \in \mathbb{N} \text{ beliebig})$$

ein System linear unabhängiger Vektoren. Es existiert also keine maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren, d.h.  $\dim [C[0, 1], +, \cdot] = \infty$ .

(2) Die Vektoren  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  aus Beispiel 2.2 (2) bilden die sogenannte **kanonische Basis** in  $\mathbb{R}^2$ , während die Vektoren  $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2\}$  aus Beispiel 2.2 (3) in diesen Raum keine Basis bilden. Es gibt in jedem Vektorraum unendlich viele Basen, eine andere wäre z.B.  $\{\mathbf{i}, \mathbf{x}^1\}$ . Es gilt:  $\dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ .

## 2.2 Matrizen und Determinanten

### 2.2.1 Begriff der Matrix

#### Definition 2.5 (Rechteckmatrizen und quadratische Matrizen)

1. Ein System von  $m \cdot n$  Zahlen  $a_{ik}$ , die in einem rechteckigen Schema, bestehend aus  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten, angeordnet sind, heißt  $(m, n)$ -**Matrix**  $\mathbf{A}$  oder **Matrix vom Typ**  $(m, n)$ . Die Zahlen  $a_{ik}$  heißen **Elemente der Matrix**  $\mathbf{A}$ .

Bezeichnungen:  $\mathbf{A} := (a_{ik}) \quad (i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Ist  $m = n$ , so heißt  $\mathbf{A}$  **quadratische Matrix der Ordnung  $n$** .
3. Ist  $a_{ik} \in \mathbb{R}$  ( $a_{ik} \in \mathbb{C}$ ), so heißt  $\mathbf{A}$  **reellwertige (komplexwertige) Matrix**.
4. Zwei  $(m, n)$ -**Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$**  heißen **gleich**, wenn die einander entsprechenden Elemente gleich sind, d.h.  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \iff a_{ik} = b_{ik} \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n)$ .
5. Eine **Matrix vom Typ  $(1, n)$  ( $(m, 1)$ )**, die nur aus einer Zeile (Spalte) besteht, heißt **Zeilenvektor (Spaltenvektor)**.

Bezeichnungen:  $\mathbf{a}_i := (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$  -  $i$ -ter **Zeilenvektor**,

$$\mathbf{a}^k := \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \text{ - } k\text{-ter } \mathbf{Spaltenvektor}.$$

6. Die Elemente  $a_{ii}$ , die in der Diagonale einer **quadratischen Matrix** von links oben nach rechts unten stehen, heißen **Hauptdiagonalelemente**, die Elemente  $a_{i, n-i+1}$ , die in der Diagonale von rechts oben nach links unten stehen, heißen **Nebendiagonalelemente**. Auch bei **Matrizen vom Typ  $(m, n)$**  nennt man die Elemente  $a_{ii}$  ( $i = 1, \dots, \min(m, n)$ ) **Hauptdiagonalelemente**.

Im Weiteren betrachten wir nur **reellwertige Matrizen**. Eine **Matrix  $\mathbf{A}$**  lässt sich als eine Spalte von **Zeilenvektoren** (Zeile von **Spaltenvektoren**) darstellen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1 \ \mathbf{a}^2 \ \dots \ \mathbf{a}^n)).$$

**Beispiel 2.4**  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = (6 \ -1 \ 3) \quad \mathbf{a}_2 = (2 \ 0 \ -4)$

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

**Definition 2.6 (Nullmatrix, transponierte Matrix)**

1. Eine **Matrix vom Typ  $(m, n)$** , deren Elemente sämtlich Null sind, heißt  **$(m, n)$ -Nullmatrix  $\mathbf{O}$** .
2. **Transponierte  $\mathbf{A}^T$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  vom Typ  $(m, n)$**  heißt die **Matrix vom Typ  $(n, m)$** , die aus  $\mathbf{A}$  durch Vertauschen der Zeilen und Spalten hervorgeht:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Speziell entsteht  $\mathbf{A}^T$  bei einer **quadratischen Matrix** durch Spiegelung an der **Hauptdiagonalen**.

**Definition 2.7** Eine quadratische Matrix  $(a_{ik})$  der Ordnung  $n$  heißt

1. obere (untere) Dreiecksmatrix, wenn  $a_{ik} = 0$  für alle  $i > k$  ( $i < k$ ),
2. Diagonalmatrix, wenn  $a_{ik} = 0$  für alle  $i \neq k$ ,
3. Einheitsmatrix, wenn  $a_{ik} = \delta_{ik}$  gilt. Dabei bezeichnet  $\delta_{ik}$  das Kroneckersymbol

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k. \end{cases}$$

**Beispiel 2.5** (Transponierte)

(1)  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}_n^T = \mathbf{E}_n$ ,  $\mathbf{D}_n^T = \mathbf{D}_n$ , wenn  $\mathbf{E}_n$  ( $\mathbf{D}_n$ ) die Einheitsmatrix (Diagonalmatrix) der Ordnung  $n$  ist.

(2)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$   $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$   $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$   $\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

### 2.2.2 Rechenoperationen mit Matrizen

**Definition 2.8** (Summe, Produkt mit einer reellen Zahl, Produkt zweier Matrizen)

1. **Summe**  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  zweier  $(m, n)$ -Matrizen  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  und  $\mathbf{B} = (b_{ik})$  heißt die  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{C} = (c_{ik})$  mit den Elementen  $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$  ( $i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$ ).
2. **Produkt**  $\alpha \mathbf{A}$  der  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  mit der Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  heißt die  $(m, n)$ -Matrix mit den Elementen  $\alpha a_{ik}$  ( $i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$ ).
3. **Produkt**  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  der  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  mit der  $(n, p)$  Matrix  $\mathbf{B}$  heißt die  $(m, p)$ -Matrix  $\mathbf{C} = (c_{il})$ , für die gilt:

$$c_{il} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kl} \quad (i = 1, \dots, m; l = 1, \dots, p).$$

Unter Verwendung der Begriffe **Zeilen-** und **Spaltenvektor** erhält man das Element  $c_{il}$  als das **Skalarprodukt** des transponierten Zeilenvektors  $\mathbf{a}_i^T$  mit dem Spaltenvektor  $\mathbf{b}^l$  d.h.  $c_{il} = \langle \mathbf{a}_i^T, \mathbf{b}^l \rangle$  und

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}^1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}^p \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2^T, \mathbf{b}^1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2^T, \mathbf{b}^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_2^T, \mathbf{b}^p \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{a}_m^T, \mathbf{b}^1 \rangle & \langle \mathbf{a}_m^T, \mathbf{b}^2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{a}_m^T, \mathbf{b}^p \rangle \end{pmatrix}.$$

Zur praktischen Ausführung der **Matrixmultiplikation** und Kontrolle der Rechnungen ist das **Falksche Schema** mit **Spalten-** bzw. **Zeilensummenprobe** nützlich:

	<b>B</b>	$\sum_Z(\mathbf{B})$
<b>A</b>	<b>A · B</b>	$\sum_Z(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
$\sum_S(\mathbf{A})$	$\sum_S(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$	

**Spaltensummenprobe:** Man bildet die Spaltensummen  $\sum_S(\mathbf{A})$  der **Matrix**  $\mathbf{A}$ . Die entstehende zusätzliche Zeile wird mit  $\mathbf{B}$  multipliziert und liefert in der Produktmatrix ebenfalls eine zusätzliche Zeile, deren Elemente bei fehlerloser Rechnung mit den Spaltensummen der Produktmatrix  $\sum_S(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  zusammenfallen. (**Zeilensummenprobe** analog: Bildung der Zeilensummen  $\sum_Z(\mathbf{B})$ ,  $\mathbf{A}$  wird mit zusätzlicher Spalte multipliziert).

Die **Matrixmultiplikation** ist nur ausführbar, wenn die Spaltenanzahl von  $\mathbf{A}$  mit der Zeilenanzahl von  $\mathbf{B}$  übereinstimmt.

### Beispiel 2.6 (Operationen mit Matrizen)

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = 3\mathbf{A} - 4\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -15 & 12 & 11 \\ 9 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{B}$  existiert und ist eine  $(3, 2)$ -Matrix,  $\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{B}$  existiert jedoch nicht.

Es gilt aber für jede  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_n = \mathbf{A}$       $\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ .

$$(3) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die **Matrixmultiplikation** ist also i. Allg. **nicht kommutativ**.

$$(4) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{O}$  folgt also nicht notwendig  $\mathbf{A} = \mathbf{O}$  oder  $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ .

(5) In einem Betrieb werden aus den Rohstoffen  $R_1, R_2, R_3, R_4$  fünf Zwischenprodukte  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$  hergestellt. Aus den Zwischenprodukten werden schließlich drei Endprodukte  $E_1, E_2, E_3$  gefertigt. In den folgenden Tabellen sind die Rohstoff- bzw. Zwischenproduktverbrauchsnormen zur Produktion von  $Z_i$  bzw.  $E_i$  angegeben.

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$
$R_1$	0	1	1	1	2
$R_2$	5	0	1	2	1
$R_3$	1	1	1	1	0
$R_4$	0	2	0	1	0

	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$Z_1$	1	1	1
$Z_2$	1	2	0
$Z_3$	0	1	1
$Z_4$	4	1	1
$Z_5$	3	1	1

### Gozintograph der Verflechtungsbilanz

Wieviele Einheiten von  $R_1, R_2, R_3, R_4$  sind bereitzustellen, wenn im Betrieb 100 Einheiten von  $E_1$ , 200 Einheiten von  $E_2$  und 300 Einheiten von  $E_3$  hergestellt werden sollen? ( $R_1 = 3500, R_2 = 6100, R_3 = 2500, R_4 = 1900$ )

**Theorem 2.1** Die Menge  $L_{\mathbf{A}}$  aller  $(m, n)$ -Matrizen mit den in Definition 2.8 1. und 2. eingeführten Operationen der **Matrixaddition** (+) sowie der **Multiplikation** ( $\cdot$ ) einer **Matrix** mit einer reellen Zahl ist ein **Vektorraum**  $[L_{\mathbf{A}}, +, \cdot]$ .

**Lemma 2.2 (Eigenschaften der Matrixmultiplikation (falls diese ausführbar ist))**

(1)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$  Assoziativität

(2)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$      $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$  Distributivität

(3) Seien  $\mathbf{A}$  eine  $(m, n)$ -**Matrix** und  $\mathbf{O}$  eine **Nullmatrix** vom entsprechenden Typ. Dann erhält man bei Multiplikation mit einer  $(n, q)$ -**Nullmatrix** von rechts  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}$  eine  $(m, q)$ -**Nullmatrix** und bei Multiplikation mit einer  $(p, m)$ -**Nullmatrix** von links  $\mathbf{O} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$  eine  $(p, n)$ -**Nullmatrix**.

(4)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(5)  $(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T$      $\alpha \in \mathbb{R}$

(6)  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$

### 2.2.3 Die Determinante einer quadratischen Matrix

**Definition 2.9** Sei  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  eine **quadratische Matrix** der Ordnung  $n$ . **Determinante n-ter Ordnung** von  $\mathbf{A}$ , bezeichnet als

$$\det \mathbf{A} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

heißt eine Zahl, die der Matrix  $\mathbf{A}$  wie folgt zugeordnet wird:

1. Für  $n = 1$  setzen wir  $\det \mathbf{A} = a_{11}$ .
2. Für  $n = 2$  lautet die Berechnungsvorschrift: Produkt der Elemente der Hauptdiagonale minus Produkt der Elemente der Nebendiagonale. Man spricht von Zeilen, Spalten, Haupt- und Nebendiagonale einer **Determinante** und versteht darunter Zeilen, Spalten, Haupt- und Nebendiagonale der zugehörigen **Matrix**.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. Für  $n = 3$  wird die Determinante nach der Regel von **Sarrus** berechnet.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}.$$

4. Für  $n \geq 4$  wird die Determinante mit Hilfe eines Entwicklungssatzes berechnet.

**Beispiel 2.7 (Darstellung des VP und SP in Determinantenform)**

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Eine **Determinante**, bei der eine Zeile (Spalte) aus **Vektoren** besteht, nennt man auch **Vektordeterminante**.

**Definition 2.10 (Unterdeterminante, Adjunkte)**

1. Die durch Streichung der  $i$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte aus einer **Determinante**  $n$ -ter Ordnung entstehende **Determinante**  $(n - 1)$ -ter Ordnung heißt **Unterdeterminante**  $D_{ik}$  des Elementes  $a_{ik}$ .
2. Die vorzeichenbehaftete **Unterdeterminante**  $A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$  heißt **Adjunkte** oder **algebraisches Komplement** des Elementes  $a_{ik}$ .

**Theorem 2.2 (Entwicklungssatz)** Eine **Determinante**  $n$ -ter Ordnung lässt sich nach den Elementen jeder Zeile sowie jeder Spalte entwickeln, wobei sich ihr Wert nicht ändert:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad i \in \{1, \dots, n\} \text{ Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile,}$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad k \in \{1, \dots, n\} \text{ Entwicklung nach der } k\text{-ten Spalte.}$$

**Lemma 2.3** Es seien  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  quadratische Matrizen der Ordnung  $n$  mit den Determinanten  $\det \mathbf{A}$ ,  $\det \mathbf{B}$ .

- (1)  $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$
- (2) Vertauscht man in  $\mathbf{A}$  zwei Zeilen (Spalten), so ändert sich in  $\det \mathbf{A}$  das Vorzeichen.
- (3) Die Zeilen (Spalten) von  $\mathbf{A}$  sind **linear abhängig** gdw  $\det \mathbf{A} = 0$ , speziell, wenn  $\mathbf{A}$  zwei proportionale Zeilen (Spalten) oder eine Nullzeile (Nullspalte) enthält, so ist  $\det \mathbf{A} = 0$ .
- (4) Addiert man zu einer Zeile (Spalte) von  $\mathbf{A}$  Vielfache der entsprechenden Elemente einer anderen Zeile (Spalte), so ändert sich der Wert der Determinante nicht.
- (5) Multipliziert man die Elemente einer Zeile (Spalte) von  $\mathbf{A}$  mit einem Faktor  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so wird  $\det \mathbf{A}$  mit  $\alpha$  multipliziert. Man beachte den Unterschied zu Matrizen.
- (6)  $\det \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$  und  $\det \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \det \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ . Die letzte Gleichung gilt auch wenn  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  ist.
- (7) Ist  $\mathbf{A}$  eine **Diagonalmatrix** bzw. eine **obere** oder **untere Dreiecksmatrix**, so gilt:  $\det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ . Man erhält das Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen.

**Beispiel 2.8**  $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 5 & 7 \\ 0 & -11 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 102.$

## 2.2.4 Der Rang einer Matrix

Bekanntlich lässt sich jede  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  durch eine Zeile von **Spaltenvektoren**  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 \dots \mathbf{a}^n)$  darstellen.

**Definition 2.11** Der Rang  $r(\mathbf{A})$  einer  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  ist gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren.

**Theorem 2.3** Es gilt:

- (1)  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$  Also ist der **Rang**  $r(\mathbf{A})$  auch gleich der Maximalzahl der **linear unabhängigen Zeilenvektoren** der Matrix  $\mathbf{A}$ .
- (2)  $r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$
- (3) der **Rang** einer Matrix  $\mathbf{A}$  ändert sich nicht nach Ausführung folgender elementarer Umformungen:
  - Vertauschen von zwei Zeilen (Spalten) von  $\mathbf{A}$ ,
  - Multiplikation einer Zeile (Spalte) von  $\mathbf{A}$  mit einer Zahl  $\lambda \neq 0$ ,
  - Addition des Vielfachen einer Zeile von  $\mathbf{A}$  zu einer anderen Zeile von  $\mathbf{A}$ ,
  - Addition des Vielfachen einer Spalte von  $\mathbf{A}$  zu einer anderen Spalte von  $\mathbf{A}$ .

**Berechnung des Ranges:**

Die Ausgangsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & a_{1(s+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & a_{2(s+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} & a_{s(s+1)} & \dots & a_{sn} \\ a_{(s+1)1} & a_{(s+1)2} & \dots & a_{(s+1)s} & a_{(s+1)(s+1)} & \dots & a_{(s+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} & a_{m(s+1)} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wird mittels elementarer Umformungen auf eine Trapezform

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} & b_{1(s+1)} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2s} & b_{2(s+1)} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{ss} & b_{s(s+1)} & \dots & b_{sn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht, wobei  $b_{ii} \neq 0$  ( $i = 1, \dots, s$ ) gilt, d.h. alle Elemente unterhalb der **Hauptdiagonalen** und alle Elemente der  $(s + 1)$ -ten bis zur  $m$ -ten Zeile verschwinden. Für jede von der **Nullmatrix** verschiedene **Matrix** ist dies möglich. Dann ist  $r(\mathbf{A}) = s$ .

Speziell entsteht für **quadratische Matrizen** der Ordnung  $n$  mit  $\det \mathbf{A} \neq 0$  eine **obere Dreiecksmatrix** mit von Null verschiedenen Elementen auf der Hauptdiagonale, deren **Rang** gleich  $n$  ist.

**Beispiel 2.9 (Rangbestimmung)** Für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -8 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

ergibt sich mittels elementarer Umformungen

$$r(\mathbf{A}) = r \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -8 & -7 & 4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

### 2.2.5 Die inverse Matrix

**Definition 2.12** Existiert zu einer quadratischen Matrix  $\mathbf{A}$  der Ordnung  $n$  eine Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  mit der Eigenschaft

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n,$$

so nennt man  $\mathbf{A}^{-1}$  die **inverse Matrix** von  $\mathbf{A}$ . Falls  $\mathbf{A}^{-1}$  existiert, so heißt  $\mathbf{A}$  **invertierbar**, falls nicht, heißt  $\mathbf{A}$  **nicht invertierbar**.

Wir setzen  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}$  und berechnen  $\mathbf{A}^{-1}$  aus der **Matrixgleichung**  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ .

**Beispiel 2.10** Die Lösung der Matrixgleichung  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_2$  führt bei gegebener Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

auf die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 3x_{11} - 3x_{21} &= 1 & \wedge & & 3x_{12} - 3x_{22} &= 0 \\ -x_{11} + x_{21} &= 0 & & & -x_{12} + x_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Beide Gleichungssysteme sind nicht lösbar. Folglich ist  $\mathbf{A}$  **nicht invertierbar**.

**Theorem 2.4** Eine quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  der Ordnung  $n$  besitzt genau dann eine inverse Matrix, wenn  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . In diesem Falle ist  $\mathbf{A}^{-1}$  die eindeutige Lösung der Matrixgleichung  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ .

**Das Gauß-Jordan-Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix** Sei  $\mathbf{A}$  invertierbar. Wie aus Beispiel 2.10 ersichtlich, führt die Lösung der Matrixgleichung  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$  auf lineare Gleichungssysteme, die wir gleichzeitig lösen. Dazu wird ein **Anfangstableau** der Form  $\boxed{\mathbf{A} \mid \mathbf{E}_n}$  mittels elementarer Umformungen auf ein **Endtableau** der Form  $\boxed{\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1}}$  gebracht, aus dem man  $\mathbf{A}^{-1}$  ablesen kann.

**Beispiel 2.11 (n = 2)**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det \mathbf{A} = 2 \neq 0$$

	$\mathbf{A}$	$\mathbf{E}_2$	Umformungen
Anfangstableau	$\begin{matrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \text{I} \cdot \frac{1}{2} \longrightarrow 1 \\ \text{I} \cdot \frac{3}{2} + \text{II} \longrightarrow 2 \end{matrix}$
$\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{matrix}$	$\text{II} + \text{I} \longrightarrow 1$
Endtableau	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{matrix}$	
	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{A}^{-1}$	

Es ist also  $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_2$ .

## 2.2.6 Spezielle Matrizen

**Definition 2.13** Eine quadratische Matrix  $(a_{ik})$  der Ordnung  $n$  heißt

1. **symmetrisch**, wenn  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ , d.h.  $a_{ik} = a_{ki}$  für  $i, k = 1, \dots, n$ ,
2. **schiefssymmetrisch**, wenn  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ , d.h.  $a_{ik} = -a_{ki}$  für  $i, k = 1, \dots, n$ , d.h.  $a_{ii} = 0$  für  $i, k = 1, \dots, n$ ,
3. **orthogonal**, wenn  $\mathbf{A}$  invertierbar und  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ .

**Beispiel 2.12** (symmetrische, schiefssymmetrische, orthogonale Matrizen)

- (1) **symmetrische Matrix**  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
- (2) **schiefssymmetrische Matrix**  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
- (3) **orthogonale Matrix**  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

**Theorem 2.5** Es gilt:

- (1) Für jede Matrix sind  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$  und  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  symmetrische Matrizen.
- (2) Jede quadratische Matrix lässt sich in eine Summe aus einer symmetrischen und einer schiefssymmetrischen Matrix zerlegen:  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$ .



zusammen mit dem **homogenen IGS**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Durch (2.2) und (2.3) sind jeweils zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  in der Ebene festgelegt.

1. Sei (2.2) **unlösbar** (überbestimmtes System), dann sind  $g_1$  und  $g_2$  parallel zueinander, wobei  $g_1 \neq g_2$  gilt.
2. Ist (2.2) **lösbar**, so gibt es zwei Fälle:
  - (1) (2.2) besitzt **genau eine Lösung** (bestimmtes System), dann besitzen  $g_1$  und  $g_2$  genau einen Schnittpunkt,
  - (2) (2.2) besitzt **unendlich viele Lösungen** (unterbestimmtes System), dann fallen  $g_1$  und  $g_2$  zusammen:  $g_1 \equiv g_2$ . Die Lösungsmenge bildet eine **lineare Mannigfaltigkeit** in  $\mathbb{R}^2$ .
3. (2.3) ist **stets lösbar** und es gibt zwei Fälle:
  - (1) (2.3) besitzt nur die **triviale Lösung**, dann schneiden sich  $g_1$  und  $g_2$  im Nullpunkt,
  - (2) (2.3) besitzt **unendlich viele nichttriviale Lösungen**, dann fallen  $g_1$  und  $g_2$  zusammen. Die Lösungsmenge bildet einen **Unterraum** von  $\mathbb{R}^2$ .

**Ziel:** Untersuchung von **IGS** mit  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $m > n$ ,  $m = n$  oder  $m < n$ .

Im Weiteren betrachten wir das **inhomogene IGS**

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{2.4}$$

zusammen mit dem zugehörigen **homogenen IGS**

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.5}$$

und die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  zusammen mit der erweiterten Koeffizientenmatrix  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & y_m \end{pmatrix}.$$

### Theorem 2.6 (Inhomogene IGS)

- (1)  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  ist lösbar  $\iff r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$ .
- (2)  $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{B}) \iff \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  ist unlösbar.
- (3) Es gelte  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$  (d.h. das IGS ist lösbar). Setzen  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}) = r$ .

$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  besitzt genau eine Lösung  $\iff r = n$  ( $n$  Anzahl der Variablen),

$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  ist nicht eindeutig lösbar  $\iff r < n$ .



**Lemma 2.4** Die Menge der Lösungsvektoren des IGS (2.5) bildet einen Unterraum  $L^h$  des Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$  wobei  $\dim L^h = n - r$  gilt.

**Definition 2.15** (Fundamentalsystem, allgemeine Lösung des homogenen IGS)

1. Jede Basis des  $(n - r)$ -dimensionalen Unterraumes  $L^h$  heißt ein **Fundamentalsystem** von (2.5).
2. Bilden die Lösungen  $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^{n-r}$  ein **Fundamentalsystem** von (2.5), so heißt  $\mathbf{x}_a^h = c_1 \mathbf{b}^1 + c_2 \mathbf{b}^2 + \dots + c_{n-r} \mathbf{b}^{n-r}$  mit beliebigen Konstanten  $c_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n - r$ ) die **allgemeine Lösung** des homogenen IGS (2.5).

**Theorem 2.8** (Lösungsstruktur unter Verwendung des Begriffs allgemeine Lösung)

- (1) Die allgemeine Lösung von (2.5) bildet einen Unterraum der Dimension  $n - r$  des Vektorraumes  $\mathbb{R}^n$ . Jede Lösung von (2.5) lässt sich als Linearkombination eines beliebigen Fundamentalsystems von (2.5) darstellen.
- (2) Die allgemeine Lösung eines lösbaren inhomogenen IGS der Form (2.4) bildet eine **lineare Mannigfaltigkeit** in  $\mathbb{R}^n$ , d.h., sie setzt sich additiv zusammen aus einer speziellen Lösung  $\mathbf{x}_s^{inh}$  von (2.4) und der allgemeinen Lösung  $\mathbf{x}_a^h$  des zugehörigen homogenen IGS (2.5).

**Beispiel 2.14** Wir betrachten das homogene IGS aus Beispiel 2.13. Wegen  $n = 4$  und  $r = 2$  gilt  $\dim L^h = 2$ , d.h., je zwei linear unabhängige Lösungsvektoren bilden ein Fundamentalsystem des homogenen IGS. Dann gilt nach Theorem 2.8 (1):

$$\mathbf{x}_a^h = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun ein inhomogenes System zu diesem homogenen System mit einer rechten Seite  $\mathbf{y}^T = (1 \ 0 \ 1)$ . Dann gilt nach Theorem 2.8 (2):

$$\mathbf{x}_a^{inh} = \mathbf{x}_s^{inh} + \mathbf{x}_a^h = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.3 Lösungsverfahren

Wir unterscheiden exakte Verfahren (endlich viele Schritte führen zur exakten Lösung) und Iterationsverfahren (unendlich viele Schritte führen zur exakten Lösung, da nur endlich viele Schritte durchführbar sind, erhält man eine Näherungslösung). Wir diskutieren zwei exakte Verfahren: den **Gauß-Algorithmus** und das **Austauschverfahren**.

Iterationsverfahren zur Lösung von IGS werden bei der numerischen Lösung verwendet.

**Der Gauß-Algorithmus** Er ist für beliebige  $(m,n)$  - **IGS**  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  anwendbar, wobei die Frage der **Lösbarkeit** automatisch geklärt wird. Das **IGS** wird mittels elementarer Umformungen der Matrix  $\mathbf{A}$ , die  $r(\mathbf{A})$  nicht ändern, in das sogenannte gestaffelte **IGS** überführt.

1° **LGS eindeutig lösbar**

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{y}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{y}_2 \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{nn}x_n &= \tilde{y}_n. \end{aligned}$$

Sei  $\tilde{a}_{ii} \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Dann gilt  $r(\tilde{\mathbf{A}}) = r(\tilde{\mathbf{B}}) = n$ . Das gestaffelte System ist nach Theorem 2.6 **eindeutig lösbar** und somit auch  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

2° **LGS lösbar, aber nicht eindeutig lösbar**

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r + \tilde{a}_{1(r+1)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{y}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2r}x_r + \tilde{a}_{2(r+2)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{y}_2 \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{rr}x_r + \tilde{a}_{r(r+1)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n &= \tilde{y}_r. \end{aligned}$$

Sei  $\tilde{a}_{ii} \neq 0$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Dann gilt  $r(\tilde{\mathbf{A}}) = r(\tilde{\mathbf{B}}) = r < n$ . Das gestaffelte System ist nach Theorem 2.6 **nicht eindeutig lösbar** und somit auch  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

3° **LGS unlösbar**

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r + \tilde{a}_{1(r+1)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{y}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \dots + \tilde{a}_{2r}x_r + \tilde{a}_{2(r+2)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{y}_2 \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{rr}x_r + \tilde{a}_{r(r+1)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n &= \tilde{y}_r \\ 0 &= \tilde{y}_{r+1} \neq 0 \\ &\vdots \\ 0 &= \tilde{y}_m \neq 0. \end{aligned}$$

Hier gilt  $r(\tilde{\mathbf{A}}) \neq r(\tilde{\mathbf{B}})$ . Das gestaffelte System ist nach Theorem 2.6 **unlösbar**, und somit auch  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Die Lösungsmenge der letzten  $m - r$  Gleichungen ist leer.

**Bemerkung 2.1** Die oberen Dreiecksmatrizen  $\tilde{\mathbf{A}}$  der Ordnung  $n$  bzw.  $r$  kann man ähnlich wie beim **Gauß-Jordan-Verfahren** (vgl. Beispiel 2.11) durch weitere elementare Umformungen auf **Einheitsmatrizen** der Ordnung  $n$  bzw.  $r$  bringen.

**Beispiel 2.15 (Gauß-Algorithmus)**

(1) LGS eindeutig lösbar

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 & = & 6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 14 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & -3 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 & = & 6 \\ 5x_2 - 20x_3 & = & -50 \\ -10x_3 & = & -30 \end{array}$$

Die eindeutige Lösung lautet:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3.$$

(2) LGS lösbar, aber nicht eindeutig lösbar

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 & = & 4 \\ x_1 + 3x_2 & + & 4x_4 = 2 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_1 & + & x_4 = 2/3 \\ x_2 & + & x_4 = 4/9 \\ x_3 & - & x_4 = -1/9 \end{array}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$\mathbf{x}_a^{inh} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/9 \\ -1/9 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) LGS unlösbar

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ -x_1 - x_2 & + & x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 & = & 5 \\ & & 0 = 4 \end{array}$$

Die letzte Gleichung des gestaffelten Systems ist nicht erfüllbar.

**Das Austauschverfahren (AV)** Das inhomogene IGS (2.4) mit einer Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  von Typ  $(m, n)$  sei lösbar. Dem IGS  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  ordnen wir das System linearer Funktionen

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{y} \tag{2.6}$$

zu. Für  $m = n = 1$  erhält man die Gleichung einer Geraden:  $u = ax - y$ . Es gilt:  $x = x_0$  ist Lösung der Gleichung  $ax = y$  gdw  $u = 0$ . Analoge Überlegungen sind auch für  $m > 1, n > 1$  richtig. Wir schreiben (2.6) in Form eines **Anfangstableaus**  $T_0$  in Matrixschreibweise

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline T_0 & \mathbf{x}^T & \\ \hline \mathbf{u} & \mathbf{A} & -\mathbf{y} \\ \hline \end{array} \tag{2.7}$$

bzw. in Koordinatenschreibweise

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline T_0 & x_1 & \dots & x_{k-1} & x_k & x_{k+1} & \dots & x_n & \\ \hline u_1 & a_{11} & \dots & a_{1(k-1)} & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} & -y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{i-1} & a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)k} & a_{(i-1)(k+1)} & \dots & a_{(i-1)n} & -y_{(i-1)} \\ u_i & a_{i1} & \dots & a_{i(k-1)} & a_{ik} & a_{i(k+1)} & \dots & a_{in} & -y_i \\ u_{i+1} & a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)k} & a_{(i+1)(k+1)} & \dots & a_{(i+1)n} & -y_{(i+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_m & a_{m1} & \dots & a_{m(k-1)} & a_{mk} & a_{m(k+1)} & \dots & a_{mn} & -y_m \\ \hline \end{array} \tag{2.8}$$

Dabei bezeichnen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die unabhängigen und  $u_1, u_2, \dots, u_m$  die abhängigen Variablen. Sei  $a_{ik} \neq 0$ . Die Variablen  $u_i$  und  $x_k$  werden nun wie folgt ausgetauscht: Im neuen Tableau  $T_1$  taucht die  $k$ -te Spalte des vorhergehenden Tableaus nicht mehr als Spalte auf, sondern (mit umgeformten Koeffizienten) auf dem Platz der  $i$ -ten Zeile, während die  $i$ -te Zeile (mit umgeformten Koeffizienten) auf den Platz der  $k$ -ten Spalte rückt. Das Tableau  $T_1$  hat folglich die Gestalt:

$T_1$	$x_1$	$\dots$	$x_{k-1}$	$u_i$	$x_{k+1}$	$\dots$	$x_n$	
$u_1$	$\tilde{a}_{11}$	$\dots$	$\tilde{a}_{1(k-1)}$	$\tilde{a}_{1k}$	$\tilde{a}_{1(k+1)}$	$\dots$	$\tilde{a}_{1n}$	$\tilde{y}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$u_{i-1}$	$\tilde{a}_{(i-1)1}$	$\dots$	$\tilde{a}_{(i-1)(k-1)}$	$\tilde{a}_{(i-1)k}$	$\tilde{a}_{(i-1)(k+1)}$	$\dots$	$\tilde{a}_{(i-1)n}$	$\tilde{y}_{(i-1)}$
$x_k$	$\tilde{a}_{i1}$	$\dots$	$\tilde{a}_{i(k-1)}$	$\tilde{a}_{ik}$	$\tilde{a}_{i(k+1)}$	$\dots$	$\tilde{a}_{in}$	$\tilde{y}_i$
$u_{i+1}$	$\tilde{a}_{(i+1)1}$	$\dots$	$\tilde{a}_{(i+1)(k-1)}$	$\tilde{a}_{(i+1)k}$	$\tilde{a}_{(i+1)(k+1)}$	$\dots$	$\tilde{a}_{(i+1)n}$	$\tilde{y}_{(i+1)}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$u_m$	$\tilde{a}_{m1}$	$\dots$	$\tilde{a}_{m(k-1)}$	$\tilde{a}_{mk}$	$\tilde{a}_{m(k+1)}$	$\dots$	$\tilde{a}_{mn}$	$\tilde{y}_m$

(2.9)

Ein solcher Variablentausch ist immer möglich, wenn das Element  $a_{ik}$ , im Schnittpunkt der  $i$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte, verschieden von Null ist. Nach dem Tausch ist  $u_i$  unabhängige Variable und  $x_k$  abhängige Variable.

Das Element  $a_{ik} \neq 0$  heißt **Pivotelement**, die Zeile  $(a_{i1} \dots a_{i(k-1)} a_{i(k+1)} \dots a_{in} (-y_i))$  (Spalte  $(a_{1k} \dots a_{(i-1)k} a_{(i+1)k} \dots a_{mk})^T$ ), in der dieses Element enthalten ist, heißt **Pivotzeile (Pivotspalte)**. Die Koeffizienten  $\tilde{a}_{ik}$  ( $i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$ ) und die rechten Seiten  $\tilde{y}_{mi}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) im Tableau  $T_1$  werden mittels der Austauschregeln berechnet:

$$\begin{aligned}
 R_1 : \tilde{a}_{ik} &= \frac{1}{a_{ik}} && \left( \text{neuer Pivotplatz} = \frac{1}{\text{Pivotelement}} \right) \\
 R_2 : \tilde{a}_{il} &= \frac{a_{il}}{-a_{ik}} \quad (l \neq k) & \quad \tilde{y}_i &= \frac{(-y_i)}{-a_{ik}} && \left( \text{neue Pivotzeile} = \frac{\text{alte Pivotzeile}}{-\text{Pivotelement}} \right) \\
 R_3 : \tilde{a}_{jk} &= \frac{a_{jk}}{a_{ik}} \quad (j \neq i) && \left( \text{neue Pivotspalte} = \frac{\text{alte Pivotspalte}}{\text{Pivotelement}} \right) \\
 R_4 : \tilde{a}_{jl} &= a_{jl} - \frac{a_{jk}}{a_{ik}} a_{il} \quad (j \neq i, l \neq k) & \quad \tilde{y}_j &= (-y_j) - \frac{a_{jk}}{a_{ik}} (-y_i) && \text{(Rechteckregel)}.
 \end{aligned}$$

Für die Berechnung des neuen Koeffizienten  $\tilde{a}_{jl}$  ( $j \neq i, l \neq k$ ) benötigt man also nur den alten Koeffizienten  $a_{jl}$ , das **Pivotelement**  $a_{ik}$ , das Element  $a_{jk}$  aus der **Pivotspalte** sowie das Element  $a_{il}$  aus der **Pivotzeile**. Diese vier Elemente bilden die Eckpunkte eines Rechtecks, daher die Bezeichnung Rechteckregel.

$T_0$	$x_1$	$\dots$	$x_k$	$\dots$	$x_l$	$\dots$	$x_n$	
$u_1$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1k}$	$\dots$	$a_{1l}$	$\dots$	$a_{1n}$	$-y_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$u_j$	$a_{j1}$	$\dots$	$a_{jk}$	$\dots$	$a_{jl}$	$\dots$	$a_{jn}$	$-y_j$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$u_i$	$a_{i1}$	$\dots$	$a_{ik}$	$\dots$	$a_{il}$	$\dots$	$a_{in}$	$-y_i$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$u_m$	$a_{m1}$	$\dots$	$a_{mk}$	$\dots$	$a_{ml}$	$\dots$	$a_{mn}$	$-y_m$

Die Regeln  $R_1 - R_4$  erhält man, indem man nach Wahl des **Pivotelementes** die  $i$ -te Gleichung nach  $x_k$  auflöst und den Wert für  $x_k$  in alle anderen Gleichungen einsetzt.

Nach Durchführung aller möglichen Austauschschritte und bei Streichung von Zeilen, die ausschließlich Nullen enthalten, ergibt sich im Falle eines lösbaren **IGS** ein Tableau folgender Struktur:

1° Alle  $u_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) lassen sich gegen gewisse  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) austauschen, d.h. alle  $u_i$  sind jetzt unabhängige Variable und können beliebige Werte annehmen. Setzt man speziell  $u_1 = u_2 = \dots = u_m = 0$ , so lässt sich aus dem Endtableau eine Darstellung der **allgemeinen Lösung** des **IGS** ablesen.

2° Mindestens ein  $u_i$  ist nicht mehr gegen ein  $x_k$  austauschbar. Dann kann man wenigstens eine Abhängigkeitsbeziehung

$$u_i = c_1 u_{i_1} + \dots + c_s u_{i_s} \quad (2.10)$$

ablesen, wobei die rechte Seite von (2.10) höchstens die ausgetauschten  $u_j$  enthält. Diese sind nach dem Austausch unabhängige Variable und können gleich Null gesetzt werden. Dann ist in (2.10) auch  $u_i = 0$  und aus dem Endtableau lässt sich wieder eine Darstellung der **allgemeinen Lösung** des **IGS** ablesen.

Oft benötigt man das sogenannte **Austauschverfahren mit Spaltenteilung (AVS)**. Die Ausführung geschieht wie beim **AV**, jedoch wird im neuen Tableau die neue **Pivotspalte** weggelassen. Dies ist nur dann möglich, wenn die ausgetauschte Variable  $u_i$  über der neuen (weggelassenen) **Pivotspalte** eine unabhängige Variable ist, also gleich Null gesetzt werden kann.

**Beispiel 2.16** Wir betrachten das **IGS** aus Beispiel 2.15 (1).

**Lösung mittels AV:**

$T_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$u_1$	4	1	0	-6
$u_2$	1	-1	5	-14
$u_3$	2	2	-3	3

 $\longrightarrow$ 

$T_1$	$u_1$	$x_2$	$x_3$	
$x_1$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
$u_2$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	5	$-\frac{25}{2}$
$u_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-3	6

 $\longrightarrow$ 

$T_2$	$u_1$	$u_2$	$x_3$	
$x_1$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	-1	4
$x_2$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	4	-10
$u_3$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	3	-9

 $\longrightarrow$ 

$T_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
$x_1$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	1
$x_2$	$-\frac{13}{15}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$	2
$x_3$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	3

Setzt man  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ , so folgt aus  $T_3$  die eindeutige Lösung  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ .

**Lösung mittels AVS:** Ausgehend vom Tableau  $T_0$  erhält man

$T_1$	$x_2$	$x_3$	
$x_1$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
$u_2$	$-\frac{5}{4}$	5	$-\frac{25}{2}$
$u_3$	$\frac{3}{2}$	-3	6

 $\longrightarrow$ 

$T_2$	$x_3$	
$x_1$	-1	4
$x_2$	4	-10
$u_3$	3	-9

 $\longrightarrow$ 

$T_3$	
$x_1$	1
$x_2$	2
$x_3$	3

Aus dem Tableau  $T_3$  kann man wieder die Lösung ablesen.



Gefragt ist nach der **optimalen Produktionsstrategie**, d.h. wieviele ME des Endproduktes nach jedem der beiden Verfahren produziert werden müssen, um insgesamt die maximale Menge des Endproduktes herzustellen und gleichzeitig die Restriktionen über die verfügbaren Mengen der Ausgangskomponenten einzuhalten.

Bezeichnet man mit  $x_1$  bzw.  $x_2$  die ME von E, die gemäß  $V_1$  bzw.  $V_2$  produziert werden, so ergibt sich folgendes **LOP**:

$$z = x_1 + x_2 \longrightarrow \max \quad (3.4)$$

unter den **LNB**

$$\begin{aligned} 0.4 x_1 + 2.0 x_2 &\leq 26 \\ 2.0 x_1 + 1.0 x_2 &\leq 40 \\ &+ 2.0 x_2 \leq 24 \end{aligned} \quad (3.5)$$

und den **NNB**

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (3.6)$$

Die **NNB** garantieren, dass die Lösung in einem praktisch sinnvollen Bereich gesucht wird.

Die Menge aller Punkte  $P = (x_1, x_2)$ , deren Koordinaten den Bedingungen (3.5) und (3.6) genügen, ergibt den **ZB**. Jeder Punkt des **ZB** liefert eine **zulässige Lösung**. So erfüllt z.B. der Punkt  $S_2 = (10, 5)$ , d.h. die Produktion von  $x_1 = 10$  ME des Produkts nach  $V_1$  und von  $x_2 = 5$  ME nach  $V_2$ , die Ungleichungen (3.5) und (3.6) und ist folglich zulässig. Diese Lösung schöpft aber die Grenzen der Ressourcen längst nicht aus und ist deshalb sicher nicht optimal.

Die **Zielfunktion**:  $z = x_1 + x_2$  ist im vorliegenden Falle eine Ebene, deren Höhenlinien den Gleichungen  $x_1 + x_2 = C$  ( $C = \text{const.}$ ) genügen, d.h., die Höhenlinien sind die Geraden  $x_2 = -x_1 + C$ . Folglich findet man hier auf grafischen Wege die **optimale Lösung** im Schnittpunkt  $S_2 = (15, 10)$  der Geraden  $x_2 = -0.2 x_1 + 13$  und  $x_2 = -2 x_1 + 40$  mit  $z_{\text{opt}} = 25$ .

Es sind also  $x_1 = 15$  ME gemäß Verfahren  $V_1$  und  $x_2 = 10$  ME gemäß Verfahren  $V_2$  herzustellen, damit die Gesamtproduktion von E maximal wird.

(2) Wir betrachten das **LOP**:

$$z = 2 x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$

unter den **LNB**

$$\begin{aligned} 0.4 x_1 + 2.0 x_2 &\leq 26 \\ 2.0 x_1 + 1.0 x_2 &\leq 40 \\ &2.0 x_2 \leq 24 \end{aligned}$$

und den **NNB**

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

In diesem Falle ist das **LOP** nicht eindeutig lösbar, denn für alle  $\{(x_1, x_2) \mid 15 \leq x_1 \leq 20 \wedge x_2 = 40 - 2x_1\}$  ist  $z_{\text{max}} = 40$ .

(3) Wir betrachten das **LOP**:

$$z = x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$



Dabei bezeichnen

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Jedes **LOP** ist unter Benutzung folgender Regeln in die zugehörige **NLOP** überführbar:

- 1° Ist  $x_i \geq a_i$  für gewisse  $i$ , so gilt  $x'_i = x_i - a_i \geq 0$  und man kann mittels der Transformation  $x_i = x'_i + a_i$  zu neuen Koordinaten  $x'_i$  übergehen.
- 2° Ist  $z \rightarrow \max$  als Aufgabenstellung gegeben, so substituiert man  $z^* = -z \rightarrow \min$ .
- 3° Ungleichungen im System (3.2) werden mit Hilfe von **Schlupfvariablen** in Gleichungsform überführt. Ist z.B.  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \leq \alpha$  (bzw.  $\geq \beta$ ), so erhält man durch Einführung der **Schlupfvariablen**  $\gamma \geq 0$  (bzw.  $\delta \geq 0$ ) die Gleichung  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \gamma = \alpha$  (bzw.  $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n - \delta = \beta$ ).
- 4° Falls das **LOP** eine **freie Variable**  $x_k$  enthält (d.h.  $x_k$  unterliegt nicht der Restriktion  $x_k \geq 0$ ), so wird sie als Differenz zweier **gebundener Variabler**  $v_k \geq 0, w_k \geq 0$  dargestellt:  $x_k = v_k - w_k$ .

Für die so erhaltenene **NLOP** gelten folgende Äquivalenzaussagen:

- Die **NLOP** ist genau dann lösbar, wenn das zugehörige **LOP** lösbar ist.
- Jede Lösung der **NLOP** liefert eine Lösung des zugehörigen **LOP**, in der die eingeführten **Schlupfvariablen** unberücksichtigt bleiben.

Ökonomisch stellen die Werte der **Schlupfvariablen** für jedes zulässige  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  die nicht ausgenutzten Ressourcen dar.

**Beispiel 3.2** Aus dem **LOP**  $z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4 \rightarrow \max$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ -x_3 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

erhält man nach Anwendung der Überführungsregeln

$$2^\circ \quad z^* = -3x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 \rightarrow \min$$

$$3^\circ \quad \begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 & + & x_4 & = 8 & (x_4 \geq 0) \\ & - & x_3 & + & x_5 & = 4 & (x_5 \geq 0) \end{array} \quad (x_4, x_5 \text{ Schlupfvariable})$$

$$4^\circ \quad x_2 = x_6 - x_7 \quad (x_6 \geq 0, x_7 \geq 0), \quad x_2 \text{ freie Variable}$$

und somit das zugehörige **NLOP**

$$\begin{aligned} z^* = -3x_1 + (x_6 - x_7) - 2x_3 - 4 &= -3x_1 - 2x_3 + x_6 - x_7 - 4 \rightarrow \min \\ x_1 &+ x_4 &+ 2x_6 - 2x_7 &= 8 \\ -x_3 &+ x_5 &&= 4 \\ x_i &\geq 0 & (i = 1, 3, 4, 5, 6, 7). \end{aligned}$$

### 3.3 Der Simplexalgorithmus zur Lösung von LOP

#### 3.3.1 Ermittlung einer Basisdarstellung

Gegeben sei ein **NLOP**. Dem **IGS** (3.7) ordnen wir ein System linearer Funktionen der Form (2.6) zu. Das **IGS** (3.7) sei lösbar.

Mittels des **AVS** ergibt sich nach Durchführung aller möglichen Austauschschritte und bei Streichung von Zeilen, die ausschließlich Nullen enthalten, aus dem Anfangstableau (2.7) ein Tableau folgender Struktur:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 B_0 & x_{r_1} & \dots & x_{r_q} & \\
 \hline
 x_{l_1} & b_{11} & \dots & b_{1q} & b_1 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 x_{l_p} & b_{p1} & \dots & b_{pq} & b_p
 \end{array} \cdot \quad (3.8)$$

In der ersten Spalte des umgeformten Tableaus stehen nun die neuen abhängigen Variablen (**Basisvariablen**)  $x_{l_1}, \dots, x_{l_p}$  und in der ersten Zeile die neuen unabhängigen Variablen (**Nichtbasisvariablen**)  $x_{r_1}, \dots, x_{r_q}$ . Die **Nichtbasisvariablen** entsprechen den in der **allgemeinen Lösung** des **IGS** (3.7) frei wählbaren Variablen. Dabei gilt  $p + q = n$ . Man nennt (3.8) eine **Basisdarstellung**  $B_0$  von (3.7) und  $\{x_{l_1}, \dots, x_{l_p}\}$  eine **Basis** von (3.7). Eine spezielle Lösung, bei der die **Nichtbasisvariablen**  $x_{r_1}, \dots, x_{r_q}$  gleich Null gesetzt werden, heißt eine **Basislösung (BL)** von (3.7), d.h.

$$\begin{aligned}
 x_{l_1} &= b_1, & x_{l_2} &= b_2, & \dots &, & x_{l_p} &= b_p, \\
 x_{r_1} &= 0, & x_{r_2} &= 0, & \dots &, & x_{r_q} &= 0
 \end{aligned}$$

ist eine solche. Will man andere **Basislösungen** haben, so formt man das **IGS** mittels des **AV** (ohne Spaltentilgung) derart um, dass gewisse **Basisvariable** in **Nichtbasisvariable** umgewandelt werden und umgekehrt (**Basistausch**).

#### Eigenschaften von Basisdarstellungen

1. Fasst man die **Basisvariablen** zu einem  $p$ -dimensionalen Vektor  $\tilde{\mathbf{x}}$  und die **Nichtbasisvariablen** zu einem  $q$ -dimensionalen Vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  zusammen, so besitzt eine **Basisdarstellung** die Form  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$  mit

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

Die **Basisdarstellung** (3.8) hat dann in Kurzform die Gestalt:

$$\begin{array}{c|cc}
 B_0 & \hat{\mathbf{x}}^T & \\
 \hline
 \tilde{\mathbf{x}} & \mathbf{B} & \mathbf{b}
 \end{array} \cdot$$

2. Eine **Basisdarstellung**  $B_0$  existiert genau dann, wenn (3.7) lösbar ist.
3. Eine **Basis** des **NLOP** heißt **zulässig**, wenn in (3.8) gilt:  $b_1 \geq 0, \dots, b_p \geq 0$ . Dann ist  $\mathbf{x}_0$  mit  $x_{l_1} = b_1, \dots, x_{l_p} = b_p$  und  $x_{r_1} = 0, \dots, x_{r_q} = 0$  eine **zulässige Lösung**, da sowohl (3.7) als auch (3.3) erfüllt sind. In diesem Falle nennt man (3.8) **zulässige Basisdarstellung** mit dem Wert der **Zielfunktion**  $z(\mathbf{x}_0) = d_0 = c_0 + c_{l_1} b_1 + \dots + c_{l_p} b_p$ .

Den Wert  $d_0$  der **Zielfunktion**  $z$  erhält man, indem man die  $z$ -Zeile in das Tableau (2.7) einfügt und in die Austauschschritte einbezieht, die zu einer **Basisdarstellung** führen:

$T_0$	$\mathbf{x}^T$	
$\mathbf{u}$	$\mathbf{A}$	$-\mathbf{y}$
$z$	$\mathbf{c}^T$	$c_0$

Ausführlich geschrieben, hat die **Basisdarstellung** (3.8) um die  $z$ -Zeile erweitert, dann folgende tabellarische Form:

$B_0$	$x_{r_1}$	$\dots$	$x_{r_t}$	$\dots$	$x_{r_q}$	
$x_{l_1}$	$b_{11}$	$\dots$	$b_{1t}$	$\dots$	$b_{1q}$	$b_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$x_{l_s}$	$b_{s1}$	$\dots$	$b_{st}$	$\dots$	$b_{sq}$	$b_s$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$x_{l_p}$	$b_{p1}$	$\dots$	$b_{pt}$	$\dots$	$b_{pq}$	$b_p$
$z$	$d_1$	$\dots$	$d_t$	$\dots$	$d_q$	$d_0$

(3.9)

### 3.3.2 Ein Simplexkriterium

**Definition 3.2** (optimale und entscheidbare Simplextableaus)

1. Eine zulässige Basisdarstellung  $B_0$  in Form (3.9) heißt **Simplextableau**  $S_0$ .
2. Ein **Simplextableau** heißt **optimal**, wenn die zugehörige **Basislösung** eine **optimale Lösung** der **NLOP** ist, d.h.

$$d_0 = z_{\min} := \min_{\mathbf{x} \in ZB} z(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in ZB} (c_0 + \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle).$$

3. Ein **Simplextableau**, d.h. eine **zulässige Basisdarstellung** heißt **entscheidbar**, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

**S1:** Es gilt  $d_1 \geq 0, \dots, d_q \geq 0$ .

**S2:** Es gibt mindestens eine Spalte  $t \in \{1, \dots, q\}$  mit  $d_t < 0$  und  $b_{1t} \geq 0, \dots, b_{pt} \geq 0$ , wobei  $d_t, b_{1t}, \dots, b_{pt}$  die Werte in einem **Simplextableau** (3.9) sind.

In allen anderen Fällen heißt ein **Simplextableau** **nicht entscheidbar**.

Es gilt das **Simplexkriterium**: Im Fall **S1** ist (3.9) ein **optimales Simplextableau**. Im Fall **S2** ist das **NLOP** (und damit das zu Grunde liegende **LOP**) **nicht lösbar**.

### 3.3.3 Das Simplexverfahren

**Voraussetzung:** Es liegt ein **Simplextableau** vor.

**Ziel:** Ausgehend vom vorliegenden **Simplextableau** ist mittels der folgenden drei **Simplexregeln** ein **entscheidbares Simplextableau** zu bestimmen.

Wir bezeichnen für eine Spalte  $t$  von (3.9) mit  $J(t) = \{i \mid i \in \{1, \dots, p\} \wedge b_{it} < 0\}$  die Menge aller Zeilen  $i \in J(t)$ , deren Elemente negativ sind und mit  $m(t) = \min_{i \in J(t)} \{b_i (|b_{it}|)^{-1}\}$  den kleinsten Wert von  $b_i (|b_{it}|)^{-1}$ , falls der Zeilenindex  $i$  innerhalb von  $J(t)$  variiert wird.

### Beispiel 3.3 Das Tableau

$B_0$	$x_2$	$x_4$	
$x_3$	-1	0	3
$x_1$	0	0	3
$x_5$	-1	1	3

ist ein **Simplextableau**, d.h.  $B_0 = S_0$ . Dabei ist  $p = 3$ ,  $q = 2$  und  $J(1) = \{1, 3\}$ ,  $J(2) = \emptyset$ , sowie  $m(1) = \min\{3(|-1|)^{-1}, 3(|-1|)^{-1}\} = 3$ .

#### SR1 Wahl der **Pivotspalte** (Spaltenindex $t$ )

Man wähle in der um die  $z$ -Zeile erweiterten **Basisdarstellung** (3.9) eine Spalte mit dem Index  $t$ , so dass  $d_t < 0$  gilt.

#### SR2 Wahl der **Pivotzeile** (Zeilenindex $s$ )

Man wähle in der nach **SR1** festgelegten Spalte mit dem Index  $t$  eine Zeile mit dem Index  $s$  und somit das **Pivotelement**  $b_{st}$ , derart, dass die Bedingungen

- (1)  $s \in J(t)$ , d.h.  $b_{st} < 0$ ,
- (2)  $b_s (|b_{st}|)^{-1} = m(t)$

erfüllt sind. Man wählt also für das **Pivotelement**  $b_{st}$  denjenigen Zeilenindex  $s$  aus, für welchen der Quotient  $b_s |b_{st}|^{-1}$  seinen kleinsten positiven Wert erreicht. Man kann im Tableau noch eine Spalte für diese Quotienten anfügen.

#### SR3 Man führe mittels des **AV** (ohne Spaltentilgung) mit dem gemäß **SR1** und **SR2** ausgewählten **Pivotelement** $b_{st}$ den Austausch der $x_{l_s} \longleftrightarrow x_{r_t}$ , d.h. der **Basisvariablen** $x_{l_s}$ gegen die **Nichtbasisvariable** $x_{r_t}$ durch.

Ist  $m(t) \neq 0$ , so kann man mit Hilfe des **Simplexverfahrens** über die Lösbarkeit des **LOP** entscheiden und, falls es lösbar ist, eine Lösung  $\mathbf{x}_{opt}$  mit  $z(\mathbf{x}_{opt}) = \min_{\mathbf{x} \in ZB} z(\mathbf{x})$  finden.

#### Eigenschaften der Simplexregeln

1. Die **Simplexregeln SR1, SR2, SR3** sind auf jedes **nicht entscheidbare Simplextableau** anwendbar.
2. Die **Simplexregeln SR1, SR2, SR3** überführen ein **Simplextableau** in ein neues **Simplextableau** mit nicht größerem Wert  $d_0$ .
3. Falls der **Entartungsfall**  $m(t) = 0$  im Verlauf der Austausch-Schritte (jeweils entsprechend **SR1, SR2, SR3**) nicht auftritt, so überführt das **Simplexverfahren** ein **nicht entscheidbares Simplextableau** in **endlich vielen** Schritten in ein **entscheidbares Simplextableau**.

#### 3.3.4 Ermittlung eines Simplextableaus

Die Ermittlung einer **Basisdarstellung** führt nicht notwendig zu einer **zulässigen Basisdarstellung**, d.h. zu einem **Simplextableau**. Dieses Ziel ist aber erreichbar, wenn man die **Pivotelemente** bei den Austauschschritten, die von (2.7) zu (3.8) führen, bereits gemäß **SR1** und **SR2** wählt. Dazu betrachtet man ein **Hilfsproblem** zur **NLOP**:

1. Diejenigen Gleichungen in (3.7), für die die rechten Seiten  $y_i > 0$  sind, werden mit  $(-1)$  multipliziert. Für das auf diese Weise entstandene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc} \tilde{a}_{11}x_1 & + & \dots & + & \tilde{a}_{1n}x_n & = & \tilde{y}_1 \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{m1}x_1 & + & \dots & + & \tilde{a}_{mn}x_n & = & \tilde{y}_m \end{array} \quad (3.10)$$

gilt:  $\tilde{y}_1 \leq 0, \dots, \tilde{y}_m \leq 0$  bzw.  $-\tilde{y}_1 \geq 0, \dots, -\tilde{y}_m \geq 0$ .

2. Durch Einführung einer **Hilfszielfunktion**  $h = u_1 + u_2 + \dots + u_m$  erhält man folgendes **Hilfsproblem** (H)

$$h = u_1 + u_2 + \dots + u_m \longrightarrow \min \quad (3.11)$$

mit

$$\begin{array}{cccc} u_1 & = & \tilde{a}_{11}x_1 & + & \dots & + & \tilde{a}_{1n}x_n & - & \tilde{y}_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ u_m & = & \tilde{a}_{m1}x_1 & + & \dots & + & \tilde{a}_{mn}x_n & - & \tilde{y}_m \end{array} \quad (3.12)$$

$$\text{und } x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ sowie } u_1 \geq 0, \dots, u_m \geq 0. \quad (3.13)$$

Dieses **Hilfsproblem** besitzt folgende Eigenschaften:

- 1° (H) ist ein **NLOP** bezüglich der Variablen  $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$ .  
 2° Das (3.12) zugeordnete Tableau ist bereits eine **zulässige Basisdarstellung**, also ein **Simplextableau** bezüglich (H):

$T_0$	$x_1$	$\dots$	$x_n$	
$u_1$	$\tilde{a}_{11}$	$\dots$	$\tilde{a}_{1n}$	$-\tilde{y}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$u_m$	$\tilde{a}_{m1}$	$\dots$	$\tilde{a}_{mn}$	$-\tilde{y}_m$
$h$	$\sum_{i=1}^m \tilde{a}_{i1}$	$\dots$	$\sum_{i=1}^m \tilde{a}_{in}$	$-\sum_{i=1}^m \tilde{y}_i$

mit den **Basisvariablen**  $u_1, \dots, u_m$  und den **Nichtbasisvariablen**  $x_1, \dots, x_n$ . Die  $h$ -Zeile enthält die Spaltensummen, die sich beim Einsetzen von (3.12) in die **Hilfszielfunktion** (3.11) ergeben.

- 3° (H) ist stets lösbar, da wegen  $u_1 \geq 0, \dots, u_m \geq 0$  auch  $h \geq 0$  gilt und somit der Fall  $h_{\min} = -\infty$  ausgeschlossen ist.  
 4° Ist  $h_{\min} > 0$ , so besitzt das zu Grunde liegende **NLOP** keine **zulässige Lösung**.  
 5° Ist  $h_{\min} = 0$ , so ist notwendigerweise  $u_1 = \dots = u_m = 0$ . In diesem Falle gibt es ein **optimales Simplextableau** des Hilfsproblems (H), bei dem keine der Hilfsvariablen  $u_i$  **Basisvariable** ist. Ein solches Tableau liefert mit der angefügten und in die Austauschschritte einbezogenen  $z$ -Zeile bei Streichung aller  $u_i$ -Spalten ( $j = 1, \dots, m$ ) und der  $h$ -Zeile ein **Simplextableau** der **NLOP**.

**Theorem 3.1 (Hauptsatz der linearen Optimierung)** *Besitzt ein NLOP mindestens eine zulässige Lösung, so existiert stets ein entscheidbares Simplextableau, welches mit endlich vielen Schritten des Simplexverfahrens erhalten werden kann.*

## 4 Kurven und Flächen 2. Ordnung

### 4.1 Matrixeigenwertprobleme

Wir betrachten das IGS  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$  mit einer **quadratischen Matrix  $\mathbf{A}$**  der **Ordnung  $n$**  als eine Abbildung  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Diese Abbildung ist **linear**, d.h., es gilt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{z} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$$

und suchen alle **Vektoren  $\mathbf{x}$**  ( $\mathbf{x} \neq \Theta$ ), die durch die **lineare Abbildung  $\mathbf{A}$**  in ein **Viel-faches** von sich selbst übergehen. In der Matrixschreibweise heißt dies: Gesucht sind alle **Vektoren  $\mathbf{x}$**  ( $\mathbf{x} \neq \Theta$ ), die das **IGS**

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \iff \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{E}_n \mathbf{x} \quad \iff \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) \mathbf{x} = \Theta \quad \lambda \in \mathbb{R} \vee \lambda \in \mathbb{C} \quad (4.1)$$

erfüllen, wobei  $\mathbf{E}_n$  die **Einheitsmatrix  $n$ -ter Ordnung** ist. Das **IGS** (4.1) besitzt die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n$  und ist **homogen**, also stets lösbar. Wir sind nur an **nichttrivialen Lösungen  $\mathbf{x}$**  des **IGS** (4.1) interessiert und solche existieren gdw  $r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) < n$  gilt.

**Definition 4.1 (charakteristische Matrix, charakteristische Gleichung)**

1. Die Matrix

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) = \begin{pmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

heißt **charakteristische Matrix** von  $\mathbf{A}$ .

2. Die Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

heißt **charakteristische Gleichung** von  $\mathbf{A}$ .

Aus (4.3) erhält man ein Polynom  $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n)$   $n$ -ten Grades in  $\lambda$  (das **charakteristische Polynom** von  $\mathbf{A}$ ), welches nach dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens  $n$  verschiedene (reelle oder komplexe) Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  hat. Für diese  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) besitzt das **IGS** (4.1) stets **nichttriviale Lösungen**, da die Koeffizientendeterminante des **IGS** verschwindet. Somit sind ihre Spalten nach Lemma 2.3 (3) **linear abhängig** und folglich ist  $r(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}_n) < n$ .

**Definition 4.2** Die Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  des **charakteristischen Polynoms** (4.3) von  $\mathbf{A}$  heißen **Eigenwerte** der Matrix  $\mathbf{A}$ . Die zu  $\lambda = \lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) gehörigen **nicht trivialen Lösungsvektoren** von (4.1) heißen **Eigenvektoren** der Matrix  $\mathbf{A}$ .

Ein zu einem einfachen **Eigenwert**  $\lambda = \lambda_i$  gehörender **Eigenvektor** genügt der Gleichung (4.1) mit  $\lambda = \lambda_i$ . Die **Eigenvektoren** sind als **nichttriviale Lösungen** des **homogenen IGS** (4.1) bis auf einen von Null verschiedenen Zahlenfaktor bestimmt, d.h. ist  $\mathbf{x}$  Lösung von (4.1), so gilt dies auch für  $c\mathbf{x}$ , falls  $c$  reell und verschieden von Null ist. Folglich bleibt der Betrag dieser Vektoren unbestimmt. Deshalb betrachtet man **normierte Eigenvektoren** mit dem Betrag Eins. Ein **Eigenvektor**  $\mathbf{x}$  von  $\mathbf{A}$  wird normiert, indem man ihn durch seinen Betrag dividiert. Wir setzen also  $\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ , woraus  $|\mathbf{z}| = 1$  folgt.

### Lösung eines Matrixeigenwertproblems

1. Man bestimmt aus (4.3) die **Eigenwerte** der Matrix.
2. Man löst für jeden **Eigenwert**  $\lambda_i$  das zugehörige **homogene LGS** (4.1) und bestimmt so den oder die zum **Eigenwert**  $\lambda_i$  zugehörigen **Eigenvektoren**.

**Theorem 4.1** *Das Matrixeigenwertproblem (4.1) besitze  $n$  paarweise voneinander verschiedene i.a. komplexe Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Dann gilt für die Eigenvektoren der Matrix  $\mathbf{A}$ :*

- (1) zu jedem **Eigenwert**  $\lambda_i$  gibt es genau einen **Eigenvektor**  $\mathbf{x}^i$ ,
- (2) die insgesamt  $n$  verschiedenen **Eigenvektoren**  $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n$  der Matrix  $\mathbf{A}$  sind **linear unabhängig**.

**Beispiel 4.1**  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, |\mathbf{z}^1| = 1, \quad \lambda_2 = 2, \mathbf{x}^2 = \mathbf{z}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |\mathbf{z}^2| = 1.$$

Der **Eigenvektor**  $\mathbf{x}^2$  ist bereits **normiert**. Die beiden **Eigenvektoren** sind gemäß **Theorem 4.1** **linear unabhängig** und bilden somit eine **Basis** im  $\mathbb{R}^2$ . Es gilt:  $\mathbf{A}\mathbf{x}^1 = \lambda_1\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^1$ ,  $\mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \lambda_2\mathbf{x}^2 = 2\mathbf{x}^2$ .

Matrixeigenwertprobleme, bei denen unter den  $n$  **Eigenwerten** nur  $k < n$  **verschiedene** Werte auftreten, können unter Umständen **weniger** als  $n$  **linear unabhängige Eigenvektoren** besitzen.

**Theorem 4.2** *Das Matrixeigenwertproblem (4.1) besitze unter den insgesamt  $n$  **Eigenwerten** genau  $k$  paarweise voneinander verschiedene i.a. komplexe **Eigenwerte**  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  mit den **Vielfachheiten**  $s_1, s_2, \dots, s_k$  ( $s_1 + s_2 + \dots + s_k = n$ ). Ist  $\lambda_i$  der  $i$ -te **Eigenwert** der **Vielfachheit**  $s_i$  und ist  $r(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}_n) = r_i$ , so gibt es zu  $\lambda_i$  genau  $n - r_i$  mit  $1 \leq n - r_i \leq s_i$  **linear unabhängige Eigenvektoren**  $\mathbf{x}_1^i, \mathbf{x}_2^i, \dots, \mathbf{x}_{n-r_i}^i$ . Insgesamt besitzt das **Matrixeigenwertproblem** (4.1) dann genau*

$$\sum_{i=1}^k (n - r_i) = (n - r_1) + (n - r_2) + \dots + (n - r_k)$$

linear unabhängige Eigenvektoren mit

$$k \leq \sum_{i=1}^k (n - r_i) \leq \sum_{i=1}^k s_i = n.$$

**Beispiel 4.2**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 0 \quad \text{ist Eigenwert der Vielfachheit } s_1 = 2.$$

$$r(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_2) = r \begin{pmatrix} (-\lambda_1) & 0 \\ 1 & (-\lambda_1) \end{pmatrix} = r_1 = 1.$$

Es ist  $k = n - r_1 < s_1 = 2$ , also gibt es zum Eigenwert  $\lambda_1 = 0$  der Vielfachheit 2 genau einen Eigenvektor

$$\mathbf{x}_1^1 = \mathbf{z}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Theorem 4.3** Sei  $\mathbf{A}$  eine reelle symmetrische Matrix. Dann besitzt das Matrixeigenwertproblem (4.1) folgende Eigenschaften:

- (1) alle  $n$  Eigenwerte sind reell,
- (2) es gibt insgesamt genau  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren,
- (3) Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind zueinander orthogonal,
- (4) zu jedem Eigenwert  $\lambda_i$  der Vielfachheit  $s_i > 1$  existieren genau  $s_i$  linear unabhängige Eigenvektoren  $\mathbf{x}_1^i, \mathbf{x}_2^i, \dots, \mathbf{x}_{s_i}^i$ , d.h.  $n - r_i = s_i$  für alle  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Die Eigenvektoren können normiert und, falls sie nicht orthogonal sind, stets durch geeignete Verfahren orthogonalisiert werden.

**Beispiel 4.3**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 1 \quad \text{ist Eigenwert der Vielfachheit } s_1 = 2.$$

$$r(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_2) = r \begin{pmatrix} (1 - \lambda_1) & 0 \\ 0 & (1 - \lambda_1) \end{pmatrix} = r_1 = 0.$$

Es ist  $k < n - r_1 = s_1 = 2$ , also gibt es zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  der Vielfachheit 2 genau zwei linear unabhängige Eigenvektoren, z.B.

$$\mathbf{x}_1^1 = \mathbf{z}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2^1 = \mathbf{z}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die schon zueinander orthogonal und normiert (orthonormiert) sind. Sie bilden eine orthogonale Basis im  $\mathbb{R}^2$ .

**Theorem 4.4** Für eine Matrix in Diagonal- oder Dreiecksgestalt stimmen die Eigenwerte mit den Elementen in der Hauptdiagonalen überein:

$$\lambda_i = a_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

## 4.2 Transformation quadratischer Formen

### Definition 4.3 (definite und indefinite Matrizen)

1. Eine reelle symmetrische Matrix  $n$ -ter Ordnung  $\mathbf{A}$  heißt **positiv definit**, wenn  $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \Theta$  und **positiv semidefinit**, wenn  $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Man erhält mit den Bezeichnungen  $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)x_1 \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)x_2 + \dots \\ &+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)x_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}x_i x_k. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck wird **quadratische Form** genannt.

2. Eine reelle symmetrische Matrix  $n$ -ter Ordnung  $\mathbf{A}$  heißt **negativ definit**, wenn  $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle < 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \Theta$  und **negativ semidefinit**, wenn  $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle \leq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
3. Nimmt die **quadratische Form**  $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle$  für gewisse  $\mathbf{x} \neq \Theta$  positive Werte, für andere  $\mathbf{x}$  negative Werte an, so heißt die zugehörige reelle symmetrische Matrix **indefinit**.
4. Zusammen mit der reellen symmetrischen Matrix  $\mathbf{A}$  wird auch die zugehörige quadratische Form  $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle$  **definit, semidefinit, indefinit** genannt.

### Beispiel 4.4 (positive definite, positive semidefinite, indefinite Matrizen)

(1) Die Matrix  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  ist **positiv definit**, denn für beliebige  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  gilt  $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + 2x_2^2 \geq 0$ . Dabei ist  $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = 0$  nur für  $x_1 = x_2 = 0$ , während für  $\mathbf{x} \neq \Theta$  stets  $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle > 0$  gilt. Wir vermerken, dass für **reelle symmetrische Matrizen**  $a_{ik} = a_{ki}$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ) ist. Außerdem gilt  $x_i x_k = x_k x_i \forall i, k$ , also ist  $a_{ik}x_i x_k + a_{ki}x_k x_i = (a_{ik} + a_{ki})x_i x_k = 2a_{ik}x_i x_k$ .

(2) Die Matrix  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ist **positiv semidefinit**, denn für beliebige  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  gilt  $\langle \mathbf{Bx}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 \geq 0$ . Die Matrix  $\mathbf{B}$  ist aber **nicht positiv definit**, denn  $(x_1 + x_2)^2 = 0$  ist auch für  $x_1 = -x_2, x_2 \neq 0$  möglich.

(3) Die Matrix  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  ist **indefinit**, denn  $\langle \mathbf{Cx}, \mathbf{x} \rangle = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ . Für  $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist  $\langle \mathbf{Cx}^1, \mathbf{x}^1 \rangle = 3 > 0$  und für  $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist  $\langle \mathbf{Cx}^2, \mathbf{x}^2 \rangle = -1 < 0$ .

**Theorem 4.5** Sei  $\mathbf{A}$  eine reelle symmetrische Matrix. Dann gilt:

1.  $\mathbf{A}$  ist **positiv (negativ) definit** gdw alle **Eigenwerte** von  $\mathbf{A}$  **positiv (negativ)** sind.

2. **A** ist **positiv (negativ) semidefinit** gdw alle **Eigenwerte** von **A** **nichtnegativ (nichtpositiv)** sind, wobei mindestens ein **Eigenwert** gleich Null ist.
3. **A** ist **indefinit** gdw **A** sowohl **positive** als auch **negative Eigenwerte** besitzt.
4. Analoge Aussagen gelten auch für die zugehörigen **quadratischen Formen**.

**Definition 4.4** Eine Gleichung der Gestalt mit

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c_0 = 0 \quad (4.4)$$

heißt *n*-dimensionale quadratische Gleichung mit einem **Absolutglied**  $c_0 \in \mathbb{R}$ , einer **Linearform**  $\sum_{i=1}^n b_i x_i$  und einer **quadratischen Form**  $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k$  mit **reeller symmetrischer Matrix**  $\mathbf{A} := (a_{ik})$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ). Die Zahlen  $b_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) bilden einen **Vektor** **b**.

Gesucht ist die Menge der Elemente  $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)^T$ , die (4.4) erfüllen.

Wichtige Spezialfälle:

1. Für  $n = 1$  ergibt die Lösungsmenge die Lösungen einer **quadratischen Gleichung** und (4.4) hat die Form:

$$a_{11}x_1^2 + b_1x_1 + c_0 = 0. \quad (4.5)$$

2. Für  $n = 2$  ergibt die Lösungsmenge **Kurven 2. Ordnung** und (4.4) hat die Form:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c_0 = 0. \quad (4.6)$$

3. Für  $n = 3$  ergibt die Lösungsmenge **Flächen 2. Ordnung** und (4.4) hat die Form:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c_0 = 0. \quad (4.7)$$

**Ziel:** Die Gleichung (4.4) ist auf eine Form zu bringen, die nur Quadrate und eine Konstante enthält. Aus dieser Form lässt sich für  $n = 2$  und  $n = 3$  die Art der Kurve bzw. Fläche erkennen.

Sei  $n = 1$ . Nach Ausführung der quadratischen Ergänzung erhält man aus (4.5)

$$\left(x_1 + \frac{b_1}{2a_{11}}\right)^2 + \frac{C_0}{a_{11}} = 0 \quad \text{mit} \quad C_0 = c_0 - \frac{b_1^2}{4a_{11}}.$$

In Abhängigkeit von den Vorzeichen der Konstanten  $a_{11}$  und  $C_0$  erhalten wir Aussagen über die Lösungen von (4.5), die bekanntlich auch komplex sein können.

**Methode:** Mittels einer linearen Koordinatentransformation (Translation, Drehung oder Kombination aus beiden) geht (4.4), betrachtet in einem rechtwinkligen Koordinatensystem  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit den Koeffizienten  $a_{ik}, b_i, c_0$ , wieder in eine Gleichung vom Typ (4.4), betrachtet in einem neuen rechtwinkligen Koordinatensystem  $y_1, y_2, \dots, y_n$  mit den Koeffizienten  $\bar{a}_{ik}, \bar{b}_i, \bar{c}_0$ , über. In jedem Falle lässt sich eine Drehung derart angeben, so daß **A** in eine **Diagonalmatrix** übergeht.

**Problem:** Ermittlung der Transformationsgleichungen

**Theorem 4.6** Zu jeder reellen symmetrischen Matrix  $\mathbf{A}$  lässt sich eine reelle orthogonale Matrix  $\mathbf{P}$ , d.h., es gilt  $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ , finden mit der Eigenschaft, daß die transformierte Matrix  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$  Diagonalgestalt besitzt. Die Transformationsmatrix  $\mathbf{P}$  enthält in der  $j$ -ten Spalte genau die Koordinaten des  $j$ -ten normierten Eigenvektors  $\mathbf{z}^j$  der Matrix  $\mathbf{A}$ . Die Diagonalelemente  $b_{ii}$  der transformierten Matrix  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$  sind identisch mit den Eigenwerten  $\lambda_i$  der Matrix  $\mathbf{A}$ .

#### Beispiel 4.5

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} (-\lambda) & 1 \\ 1 & (-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Zu den Eigenwerten  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 1$  gehören die normierten Eigenvektoren

$$\mathbf{z}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathbf{P} = (\mathbf{z}^1 \ \mathbf{z}^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die reelle orthogonale Matrix, für die die Behauptung von Theorem 4.6 gilt:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definition 4.5** Die durch die reelle orthogonale Matrix  $\mathbf{P}$  erzeugte Transformation  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$  heißt Hauptachsentransformation (HAT) der reellen symmetrischen Matrix  $\mathbf{A}$ .

#### Lösungsschritte bei der Durchführung der HAT

1. Berechnung der **Eigenwerte** und **Eigenvektoren** der Matrix  $\mathbf{A}$  aus der **quadratischen Form** in Gleichung (4.4).
2. Orthogonalisierung der **Eigenvektoren**, die zu einem **mehrfachen Eigenwert** gehören, Normierung aller **Eigenvektoren**.
3. Aufstellen der (orthogonalen) Transformationsmatrix  $\mathbf{P}$ , in deren Spalten die **orthonormierten Eigenvektoren** stehen.
4. Ausführung der **Hauptachsentransformation**  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$  in der Gleichung (4.4). Das Ergebnis ist eine quadratische Gleichung der Gestalt:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 + d_1 y_1 + d_2 y_2 + \dots + d_n y_n + c_0 = 0. \quad (4.8)$$

5. Ist  $\lambda_k \neq 0$ , so können durch die quadratische Ergänzung

$$\lambda_k y_k^2 + d_k y_k = \lambda_k \left( y_k + \frac{d_k}{2\lambda_k} \right)^2 - \frac{d_k^2}{4\lambda_k}$$

in (4.8) die linearen Glieder mit den quadratischen zusammengefasst werden.

6. Für  $n = 2$  ( $n = 3$ ) Ermittlung der Art der **Kurve (Fläche) 2. Ordnung**.

Im neuen rechtwinkligen Koordinatensystem sind die **normierten Eigenvektoren** die **Einheitsvektoren** der Koordinatenachsen. Man nennt die **normierten Eigenvektoren** deshalb auch **Hauptachsen** der **quadratischen Form**. Sie entsprechen für  $n = 3$  den Hauptspannungsrichtungen bei Untersuchungen allgemeiner Spannungs- und Deformationszustände.

### 4.3 Klassifikation von Kurven 2. Ordnung

Für  $n = 2$  erhält man aus (4.8)

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d_1 y_1 + d_2 y_2 + c_0 = 0. \quad (4.9)$$

Es seien beide **Eigenwerte** verschieden von Null. Dann liefert die quadratische Ergänzung

$$\lambda_1 \left( y_1 + \frac{d_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y_2 + \frac{d_2}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{d_1^2}{4\lambda_1} - \frac{d_2^2}{4\lambda_2} + c_0 = 0. \quad (4.10)$$

Wir setzen  $C_0 = c_0 - \frac{d_1^2}{4\lambda_1} - \frac{d_2^2}{4\lambda_2}$ . Die Transformation

$$z_1 = y_1 + \frac{d_1}{2\lambda_1} \quad z_2 = y_2 + \frac{d_2}{2\lambda_2}$$

ergibt nun die Darstellung

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + C_0 = 0. \quad (4.11)$$

Besitzen beide **Eigenwerte** das gleiche Vorzeichen, so nehmen wir oBdA an, dass die **Eigenwerte** positiv sind, anderenfalls wird die Gleichung (4.11) mit  $(-1)$  multipliziert. Es sei jetzt ein **Eigenwert** gleich Null, oBdA sei  $\lambda_2 = 0$ . Mit

$$z_1 = y_1 + \frac{d_1}{2\lambda_1} \quad z_2 = y_2 \quad C_0 = c_0 - \frac{d_1^2}{4\lambda_1}$$

ergibt sich aus (4.9) und (4.10):

$$\lambda_1 z_1^2 + d_2 z_2 + C_0 = 0. \quad (4.12)$$

Aussagen über die Art der Kurve 2. Ordnung liefert folgende Tabelle:

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$d_2$	$C_0$	Art der Kurve
$> 0$	$> 0$		$> 0$	imaginäre Ellipse (kein reeller Punkt)
$> 0$	$> 0$		$< 0$	reelle Ellipse
$> 0$	$< 0$		$\neq 0$	Hyperbel
$> 0$	$> 0$		$= 0$	Paar imaginärer Geraden (reeller Schnittpunkt)
$> 0$	$< 0$		$= 0$	Paar reeller Geraden (reeller Schnittpunkt)
$> 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	Parabel
$> 0$	$= 0$	$= 0$	$> 0$	Paar imaginärer paralleler Geraden
$> 0$	$= 0$	$= 0$	$< 0$	Paar reeller paralleler Geraden
$> 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Paar zusammenfallender Geraden

In Analogie zu komplexen Lösungen für  $n = 1$  treten für  $n = 2$  **imaginäre Kurven** auf.

## 4.4 Klassifikation von Flächen 2. Ordnung

Für  $n = 3$  erhält man aus (4.8)

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3 + c_0 = 0. \quad (4.13)$$

Es seien alle **Eigenwerte** verschieden von Null. Dann liefert die quadratische Ergänzung

$$\lambda_1 \left( y_1 + \frac{d_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y_2 + \frac{d_2}{2\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left( y_3 + \frac{d_3}{2\lambda_3} \right)^2 - \frac{d_1^2}{4\lambda_1} - \frac{d_2^2}{4\lambda_2} - \frac{d_3^2}{4\lambda_3} + c_0 = 0. \quad (4.14)$$

Wir setzen  $C_0 = c_0 - \frac{d_1^2}{4\lambda_1} - \frac{d_2^2}{4\lambda_2} - \frac{d_3^2}{4\lambda_3}$ . Die Transformation

$$z_1 = y_1 + \frac{d_1}{2\lambda_1} \quad z_2 = y_2 + \frac{d_2}{2\lambda_2} \quad z_3 = y_3 + \frac{d_3}{2\lambda_3}$$

ergibt nun die Darstellung

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + C_0 = 0. \quad (4.15)$$

Besitzen alle oder zwei **Eigenwerte** das gleiche Vorzeichen, so nehmen wir oBdA an, dass die **Eigenwerte** positiv sind, anderenfalls wird die Gleichung (4.15) mit  $(-1)$  multipliziert. Es sei jetzt ein **Eigenwert** gleich Null, oBdA sei  $\lambda_3 = 0$ . Mit

$$z_1 = y_1 + \frac{d_1}{2\lambda_1} \quad z_2 = y_2 + \frac{d_2}{2\lambda_2} \quad z_3 = y_3 \quad C_0 = c_0 - \frac{d_1^2}{4\lambda_1} - \frac{d_2^2}{4\lambda_2}$$

ergibt sich aus (4.13) und (4.14):

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + d_3 z_3 + C_0 = 0. \quad (4.16)$$

Analog schließt man, wenn zwei **Eigenwerte** gleich Null sind.

Aussagen über die Art der Fläche 2. Ordnung liefert folgende Tabelle:

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$d_3$	$C_0$	Art der Fläche
$> 0$	$> 0$	$> 0$		$> 0$	imaginäres Ellipsoid (kein reeller Punkt)
$> 0$	$> 0$	$> 0$		$< 0$	reelles Ellipsoid
$> 0$	$> 0$	$< 0$		$> 0$	zweischaliges Hyperboloid
$> 0$	$> 0$	$< 0$		$< 0$	einschaliges Hyperboloid
$> 0$	$> 0$	$> 0$		$= 0$	imaginärer Kegel (nur Kegelspitze reeller Punkt)
$> 0$	$> 0$	$< 0$		$= 0$	elliptischer Doppelkegel ( $z_3$ ist Kegelachse)
$> 0$	$> 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	elliptisches Paraboloid
$> 0$	$< 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche)
$> 0$	$> 0$	$= 0$	$= 0$	$> 0$	imaginärer elliptischer Zylinder (kein reeller Punkt)
$> 0$	$> 0$	$= 0$	$= 0$	$< 0$	elliptischer Zylinder
$> 0$	$< 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	hyperbolischer Zylinder
$> 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	parabolischer Zylinder
$> 0$	$> 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Paar imaginärer Ebenen (reelle Schnittgerade)
$> 0$	$< 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Paar reeller Ebenen (reelle Schnittgerade)
$> 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$> 0$	Paar imaginärer paralleler Ebenen
$> 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$< 0$	Paar reeller paralleler Ebenen
$> 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Paar zusammenfallender Ebenen

In Analogie zu komplexen Lösungen für  $n = 1$  treten für  $n = 3$  **imaginäre Flächen** auf.

# 5 Reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen

## 5.1 Definition und Darstellungsmöglichkeiten

**Definition 5.1** Unter einer Funktion von zwei Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten Zahlenpaar  $(x, y)$  mit  $x \in X$  und  $y \in Y$ , wobei  $X$  und  $Y$  Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind, in **eindeutiger** Weise ein Element  $u$  der Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  zuordnet. Die Mengen

$$\{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\} \quad \{u \in U \mid \exists(x, y) \in D(f) : u = f(x, y)\} \subseteq U$$

heißen **Definitionsbereich**  $D(f)$  und **Wertebereich**  $W(f)$  der Funktion  $f$  entsprechend.

Wegen der **Eindeutigkeit** der Zuordnung ist eine Funktion gegeben durch

$$u = f(x, y) \quad (x, y) \in D(f).$$

Der Definitionsbereich  $D(f)$  einer Funktion  $u = f(x, y)$  kann als eine Punktmenge  $M$  in der Ebene betrachtet werden. Gehören alle Randpunkte von  $M$  zu  $M$ , so heißt  $M$  **abgeschlossen**. Gehört kein Randpunkt von  $M$  zu  $M$ , so heißt  $M$  **offen**. Eine **offene** Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^2$  heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Punkte von  $M$  durch einen ganz in  $M$  verlaufenden Streckenzug mit nur endlich vielen Eckpunkten verbunden werden können. Eine **offene** und **zusammenhängende** Menge  $G$  heißt ein **Gebiet**. Ein **Gebiet**  $G \subset \mathbb{R}^2$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jede in  $G$  liegende doppelpunktfreie geschlossene Kurve innerhalb von  $G$  stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Andernfalls heißt ein **Gebiet**  $G$  **mehrfach zusammenhängend**. Ist  $G$  ein **Gebiet** und nehmen wir zur Menge  $G$  alle Randpunkte von  $G$  hinzu, so nennt man die so entstehende **abgeschlossene** Menge  $\overline{G}$  einen **Bereich**. Wir bezeichnen mit  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  den **Ortsvektor** des Punktes  $P = (x, y)$  in der Ebene.

### Beispiel 5.1 (Rechteckbereich, Umgebung)

- (1)  $\overline{Q} = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$  ist ein **einfach zusammenhängender Rechteckbereich** des  $\mathbb{R}^2$ ,
- (2)  $U_\varrho(\mathbf{r}_0) = \{\mathbf{r} \mid |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 < \varrho^2\} = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varrho^2\}$  ist eine  $\varrho$ -**Umgebung** des Punktes  $P_0 = (x_0, y_0)$  mit  $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$  (**einfach zusammenhängendes Gebiet** des  $\mathbb{R}^2$ ).

**Beispiel 5.2** Die **Cobb-Douglas-Funktion** stellt für  $n = 2$  das Produktionsergebnis in Abhängigkeit von den beiden Variablen  $x = A$  (Arbeitskräfte) und  $y = K$  (für Produktionsmittel aufgewendetes Kapital) dar und besitzt die allgemeine Gestalt

$$u = f(x, y) = \alpha x^\beta y^\gamma \quad D(f) = \{(x, y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0\}, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad \beta + \gamma = 1.$$

**Definition 5.2** Unter einer Funktion von  $n$  unabhängigen Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten  $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  mit  $x_i \in X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), wobei

$X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind, in **eindeutiger** Weise ein Element  $u$  der Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  zuordnet. Die Mengen

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \ (i = 1, \dots, n)\} \quad \{u \in U \mid \exists (x_1, \dots, x_n) \in D(f) : u = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

heißen Definitionsbereich  $D(f)$  und Wertebereich  $W(f)$  der Funktion  $f$  entsprechend.

$$\text{Schreibweise: } u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f)$$

**Beispiel 5.3** Allgemeine Gestalt von **Cobb-Douglas-Funktionen** für  $n > 2$

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_i > 0 \ \forall i, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

**Darstellungsmöglichkeiten für  $n = 2$**

1. Analytische Darstellung

- (1) Explizite Darstellung:  $u = f(x, y)$
- (2) Implizite Darstellung:  $F(x, y, u) = 0$

2. Graphische Darstellung

- (1) Das Zahlentripel  $(x, y, u)$  mit  $u = f(x, y)$  wird als Punkt im Raum aufgefasst. Die Gesamtheit der Punkte stellt eine über dem Definitionsbereich liegende Fläche dar.
- (2) Darstellung durch Höhenlinien auf der Fläche (Niveaulinien in der  $x, y$ -Ebene): Wir setzen  $u = f(x, y) = c = \text{const.}$ , wobei  $c$  eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen durchläuft. Die Ebene  $u = c$  ist parallel zur  $xy$ -Ebene und hat von ihr den Abstand  $c$ . Auf jeder dieser Ebenen wird die Kurve  $f(x, y) = c$  gezeichnet, woraus man das Höhenlinienbild erhält.

## 5.2 Grenzwerte und Stetigkeit

Wir bezeichnen mit  $U_\varrho^0(\mathbf{r}_0) = U_\varrho(\mathbf{r}_0) \setminus \{\mathbf{r}_0\}$  eine **punktierte  $\varrho$ -Umgebung** des Punktes  $(x_0, y_0)$ , d.h.  $\mathbf{r}_0$  gehört nicht zur Umgebung.

**Definition 5.3** Die Funktion  $u = f(\mathbf{r}) = f(x, y)$  sei wenigstens in  $U_\varrho^0(\mathbf{r}_0)$  definiert. Wenn für jede Folge  $\mathbf{r}_n$  mit den Eigenschaften

$$1^\circ \quad \mathbf{r}_n \in U_\varrho^0(\mathbf{r}_0) \quad \forall n$$

$$2^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 \quad (\text{äquivalente Formulierung: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0)$$

die Folge  $f(\mathbf{r}_n)$  der zugehörigen Funktionswerte gegen **ein und denselben** Wert  $A$  konvergiert, so heißt  $A$  **Grenzwert (GW)** von  $f(\mathbf{r})$  für  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ . (Der Grenzübergang erfolgt für alle Koordinaten gleichzeitig.)

Schreibweise:  $\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A.$

Für  $n = 1$  kann man sich dem Punkt  $x_0$  von links und von rechts nähern. Dies rechtfertigt die Betrachtung einseitiger **GW**. Für  $n > 1$  gibt es unendlich viele Möglichkeiten der Annäherung an den Punkt  $(x_0, y_0)$ , deshalb werden einseitige **GW** nicht betrachtet. Die Übertragung von Definition 5.3 auf den Fall uneigentlicher **GW** ist jedoch möglich.

**Definition 5.4**  $u = f(x, y) \quad D(f) = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$

Für jedes fixierte  $y \in Y$  existiere  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y).$

Für jedes fixierte  $x \in X$  existiere  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \psi(x).$  Die **GW**e

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y))$$

heißen, falls sie existieren, **iterierte GW**e, d.h., der Grenzübergang wird in einer bestimmten Reihenfolge durchgeführt.

Die **iterierten GW** sind nicht notwendig gleich. Die Reihenfolge der Grenzwertbildung ist i. Allg. nicht vertauschbar.

**Beispiel 5.4**  $f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} \quad D(f) = \{(x, y) \mid y \neq -x\} \quad x_0 = y_0 = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \varphi(y) = y - 1 & \quad \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = -1, \\ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \psi(y) = x + 1 & \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = +1. \end{aligned}$$

**Definition 5.5 (Stetigkeit, Unstetigkeit)**

1. Die in  $U_\varrho(\mathbf{r}_0)$  definierte Funktion  $f(\mathbf{r})$  heißt an der Stelle  $\mathbf{r}_0$  **stetig nach allen Variablen**, wenn

$$1^\circ \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) \text{ als eigentlicher GW existiert, d.h. } \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = A \quad A \in \mathbb{R},$$

$$2^\circ A = f(\mathbf{r}_0).$$

2. Die in  $U_\varrho^0(\mathbf{r}_0)$  definierte Funktion  $f$  heißt an der Stelle  $\mathbf{r}_0$  **unstetig**, wenn sie dort erklärt, aber **nicht stetig** ist, oder, wenn sie dort nicht erklärt ist.

**Beispiel 5.5**  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^{-1}$  ist **unstetig** längs des Kreises  $x^2 + y^2 = 1.$

### 5.3 Partielle Differenzierbarkeit

Die Funktion  $u = f(x, y) \quad D(f) = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$  lässt sich im Raum durch eine Fläche darstellen. Für fixiertes  $y_0 \in Y$  ist  $y = y_0$  eine parallel zur  $xu$ -Ebene verlaufende

Schnittebene und  $u = f(x, y_0) = \varphi(x)$  definiert eine auf der Fläche  $u = f(x, y)$  befindliche Schnittkurve der Fläche mit der Ebene  $y = y_0$ . Den **GW**

$$\varphi'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} =: f_x(x_0, y_0)$$

bezeichnet man, falls er existiert, als **partielle Ableitung 1. Ordnung der Funktion  $u = f(x, y)$  nach der Variablen  $x$**  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

**Geometrische Deutung:**  $f_x(x_0, y_0)$  ist der Anstieg der Tangente an die Flächenkurve  $u = f(x, y_0) = \varphi(x)$  im Raumpunkt mit den Koordinaten  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

Analog setzt man  $u = f(x_0, y) = \psi(y)$  und bezeichnet den **GW**

$$\psi'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} =: f_y(x_0, y_0),$$

falls er existiert, als **partielle Ableitung 1. Ordnung der Funktion  $u = f(x, y)$  nach der Variablen  $y$**  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

**Geometrische Deutung:**  $f_y(x_0, y_0)$  ist der Anstieg der Tangente an die Flächenkurve  $u = f(x_0, y) = \psi(y)$  im Raumpunkt mit den Koordinaten  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

Die **partiellen Ableitungen 1. Ordnung**  $f_x(x_0, y_0)$ ,  $f_y(x_0, y_0)$  geben also den Anstieg der Fläche  $u = f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  in Richtung der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse an. Im Falle ihrer Existenz heißt die Funktion  $f(x, y)$  **partiell differenzierbar**.

$$\text{Bezeichnungen: } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Berechnung der **partiellen Ableitungen:** Eine Variable fixieren und nach der anderen differenzieren.

Für eine Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  kann man entsprechend  $n$  verschiedene **partiellen Ableitungen 1. Ordnung** bilden, indem man jeweils  $n - 1$  Variable fixiert:

$$\text{Bezeichnungen: } f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad f_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad f_{x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

**Beispiel 5.6** Für die **Cobb-Douglas-Funktion**  $u = f(x, y) = \alpha x^\beta y^\gamma$  gilt:

$$f_x = \alpha \beta x^{\beta-1} y^\gamma \quad f_y = \alpha \gamma x^\beta y^{\gamma-1}.$$

## 5.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Für die Funktion  $u = f(x, y)$  lassen sich auch **partiellen Ableitungen höherer Ordnung** bilden. Für  $n = 2$  Variable sind folgende **partiellen Ableitungen 2. Ordnung** möglich:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} && \text{reine Ableitungen,} \\ f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, & f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} && \text{gemischte Ableitungen.} \end{aligned}$$

Analog definiert man Ableitungen der Ordnung  $k > 2$ . Der Fall  $f_{xy} \neq f_{yx}$  kommt vor.

**Theorem 5.1 (Satz von Schwarz)** Sind die partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung einer Funktion  $f(x, y)$  stetig nach allen Variablen in einer offenen Menge  $M \subset D(f)$  so ist die Reihenfolge der Differentiationen vertauschbar.

**Beispiel 5.7** Für die Cobb-Douglas-Funktion  $u = f(x, y)$  gilt:

$$u = f_{xy} = f_{yx} = \alpha\beta\gamma x^{\beta-1}y^{\gamma-1}.$$

## 5.5 Totale Differenzierbarkeit und totales Differenzial

**Definition 5.6 (Totale Differenzierbarkeit, totales Differenzial)**

1. Eine im Gebiet  $G$  definierte Funktion  $u = f(x, y)$  heißt **total (vollständig) differenzierbar** an der Stelle  $(x_0, y_0)$ , gdw gilt:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - (f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0. \quad (5.1)$$

2. Die Differenz  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$  heißt **totaler Zuwachs** der Funktion  $u = f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

3. Der **lineare Differenzialausdruck**

$$df = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y \quad (5.2)$$

heißt das zur Stelle  $(x_0, y_0)$  und zu den Argumentzuwächsen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gehörige **totale Differenzial** der Funktion  $f$ .

Somit lässt sich (5.1) in der Form  $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$  schreiben. Dies bedeutet, in einer kleinen Umgebung des Punktes  $(x_0, y_0)$  gilt die Beziehung  $\Delta f \approx df$ .

**Theorem 5.2** Besitzt eine Funktion  $u = f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung, so ist  $f(x, y)$  an dieser Stelle **total differenzierbar**.

**Beispiel 5.8** Die Funktion  $u = f(x, y) = x^2e^{xy}$ ,  $D(f) = \mathbb{R}^2$  besitzt stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung  $f_x = x(xy+2)e^{xy}$ ,  $f_y = x^3e^{xy}$  und ist **total differenzierbar**. Berechnen Sie  $\Delta f$  und  $df$  im Punkt  $(x_0, y_0)$ .

Für eine in  $(x_0, y_0)$  **total differenzierbare** Funktion  $u = f(x, y)$  existiert im Flächenpunkt  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  eine **Tangentialebene**. Sie besitzt die Gleichung

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

**Theorem 5.3 (Verallgemeinerte Kettenregel)** Sei  $u = g(v(x), w(x))$  total differenzierbar in  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Die Funktionen  $v = v(x)$  und  $w = w(x)$  seien stetig differenzierbar in  $]a, b[$ , wobei für  $x \in ]a, b[$  die Funktionswerte  $v = v(x)$  und  $w = w(x)$  in  $G$  liegen mögen. Dann ist die Funktion  $g(v(x), w(x))$  in  $]a, b[$  stetig differenzierbar und es gilt:

$$\frac{dg(v(x), w(x))}{dx} = g_v \frac{dv}{dx} + g_w \frac{dw}{dx}. \quad (5.3)$$

Speziell erhält man aus (5.3) für eine durch  $F(x, y) = 0$  implizit gegebene Funktion  $y = f(x)$  die Ableitung  $y' = f'(x)$ , falls eine solche existiert, indem man  $g = F$ ,  $v(x) = x$  und  $w(x) = f(x) = y$  setzt:

$$\frac{dg(v(x), w(x))}{dx} = \frac{dF(x, f(x))}{dx} = F_x + F_y f'(x) = 0 \implies f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{falls } F_y \neq 0.$$

## 5.6 Extremwerte reeller Funktionen mehrerer reeller Variabler

### 5.6.1 Extremwerte ohne Nebenbedingungen

**Definition 5.7** Sei  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$   $P = (x_1, \dots, x_n) \in D(f)$  und  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D(f)$ .

1. Die Funktion  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  besitzt in  $P_0$  ein **lokales Minimum (lokales Maximum)**  $f(P_0)$  gdw eine Umgebung  $U_\rho(P_0) \subset D(f)$  existiert, so dass gilt:

$$f(P) \geq f(P_0) \quad (f(P) \leq f(P_0)) \quad \forall P \in U_\rho(P_0).$$

Falls für alle  $P \in U_\rho(P_0) \setminus \{P_0\}$  eine strenge Ungleichung vorliegt, so spricht man von einem **eigentlichen lokalen Extremum**.

2. Die Funktion  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  besitzt an der Stelle  $P_m (P_M)$  ein **globales Minimum (globales Maximum)**  $f(P_m) (f(P_M))$  gdw gilt:

$$f(P) \geq f(P_m) \quad (f(P) \leq f(P_M)) \quad \forall P \in D(f).$$

Dabei heißen  $f(P_m)$  und  $f(P_M)$  die **globalen Extrema** von  $f$  in  $D(f)$ .

3. Sei  $D(f)$  abgeschlossen (d.h. alle Randpunkte gehören zu  $D(f)$ ). Dann heißt  $f(P_0)$  ein **inneres (lokales oder globales) Extremum**, wenn  $f(P_0)$  ein **lokales oder globales Extremum** und  $P_0$  kein Randpunkt von  $D(f)$  ist.
4.  $f(P_0)$  heißt **Randextremum**, wenn  $f(P_0)$  ein **Extremum** und  $P_0$  ein **Randpunkt** von  $D(f)$  ist.

Jedes **globale Extremum** ist gleichzeitig ein **lokales**, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Wie für  $n = 1$  lassen sich **innere lokale Extrema** mit Hilfe der Differenzialrechnung ermitteln. Durch Vergleich dieser **Extrema** mit den Funktionswerten auf dem Rand von  $D(f)$  ergibt sich dann eine Aussage über die **globalen Extrema** von  $f(P)$  auf  $D(f)$ .

**Notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums:**

Sei  $f$  **partiell differenzierbar** in  $D(f)$  und  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D(f)$  kein Randpunkt von  $D(f)$ . Besitzt  $f$  in  $P_0$  ein **inneres lokales Extremum**  $f(P_0)$  so gilt:  $f_{x_i}(P_0) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Für  $n = 2$  und  $P_0 = (x_0, y_0)$  bedeutet die letzte Bedingung:

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0, y_0) = 0. \quad (5.4)$$

Punkte, in denen alle **partiellen Ableitungen 1. Ordnung** gleichzeitig verschwinden, heißen **stationäre Punkte** von  $f$ .

### Hinreichendes Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums

Die Funktion  $f$  besitze **stetige partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung** in  $D(f)$ . Es sei  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D(f)$  ein **stationärer Punkt** von  $f$  und kein Randpunkt von  $D(f)$ . Ist die **Hesse-Matrix**

$$\mathbf{H}_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(P_0) & f_{x_1x_2}(P_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(P_0) \\ f_{x_2x_1}(P_0) & f_{x_2x_2}(P_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(P_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_nx_1}(P_0) & f_{x_nx_2}(P_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(P_0) \end{pmatrix},$$

gebildet aus allen **partiellen Ableitungen 2. Ordnung**, an der Stelle  $P_0$

- 1° **positiv definit**, so liegt an der Stelle  $P_0$  ein **eigntl. inn. lok. Min.**,
- 2° **negativ definit**, so liegt an der Stelle  $P_0$  ein **eigntl. inn. lok. Max.**,
- 3° **indefinit**, so liegt an der Stelle  $P_0$  kein **lokales Extremum** vor.
- 4° In allen anderen Fällen ist auf diesem Wege keine Aussage über **Extrema** möglich.

Speziell erhält man für  $n = 2$ : Die Funktion  $f$  besitze **stetige partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung** in  $D(f)$ . Es sei  $P_0 = (x_0, y_0) \in D(f)$  ein **stationärer Punkt** von  $f$  und kein Randpunkt von  $D(f)$ . Wir bezeichnen mit  $K_f(x_0, y_0)$  den Ausdruck

$$K_f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0). \quad (5.5)$$

Dann ist

- 1°  $f(x_0, y_0)$  ein **eigntl. inn. lok. Min.** für  $f$ , falls  $K_f(x_0, y_0) > 0$  und  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ,
- 2°  $f(x_0, y_0)$  ein **eigntl. inn. lok. Max.** für  $f$ , falls  $K_f(x_0, y_0) > 0$  und  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ,
- 3°  $f(x_0, y_0)$  kein **lokales Extremum** für  $f$ , falls  $K_f(x_0, y_0) < 0$ ,
- 4° keine Aussage möglich, falls  $K_f(x_0, y_0) = 0$ .

Für  $K_f(x_0, y_0) > 0$  besitzen  $f_{xx}$  und  $f_{yy}$  in  $(x_0, y_0)$  wegen (5.5) stets dasselbe Vorzeichen. Gilt (5.4) und  $K_f(x_0, y_0) < 0$ , so heißt  $(x_0, y_0)$  **Sattelpunkt** von  $f$ .

In einem **stationären Punkt** verläuft die **Tangentialebene** parallel zur  $xy$ -Ebene. Ihre Gleichung lautet:  $u = f(x_0, y_0)$ . Dies gilt auch, wenn in  $(x_0, y_0)$  ein **inneres lokales Extremum** vorliegt, die Umkehrung ist jedoch i. Allg. nicht richtig.

### Beispiel 5.9 (Stationäre Punkte, Extrema)

- (1)  $u = f(x, y) = x^2 + y^2$   $D(f) = \mathbb{R}^2$   $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , also ist  $(0, 0)$  nach (5.4) ein **stationärer Punkt**. Wegen  $K_f(0, 0) = 4 > 0$  besitzt  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  ein **eigentliches lokales und zugleich globales Minimum**  $f(0, 0) = 0$ .
- (2)  $u = f(x, y) = x^2 - y^2$   $D(f) = \mathbb{R}^2$   $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , also ist  $(0, 0)$  nach (5.4) ein **stationärer Punkt**. Wegen  $K_f(0, 0) = -4 < 0$  besitzt  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  einen **Sattelpunkt**  $f(0, 0) = 0$ . Die Schnittfunktion  $f(x, 0) = \varphi(x) = x^2$  ( $f(0, y) = \psi(y) = -y^2$ ) hat beim Durchgang durch  $(0, 0)$  ein **eigentliches lokales Minimum (Maximum)**. Die **Tangentialebene** verläuft parallel zur  $xy$ -Ebene.
- (3)  $u = f(x, y) = (x + y)^2$   $D(f) = \mathbb{R}^2$   $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 2x + 2y = 0$ , d.h. alle Punkte der Geraden  $y = -x$  sind stationäre Punkte, jedoch ist  $K = 0$ . Da  $f(x, y) > 0$  für  $y \neq -x$ , liegt in allen Punkten der Geraden ein **absolutes Minimum** vor (parabolischer Zylinder).

### 5.6.2 Die Methode der kleinsten Quadrate

In der  $xy$ -Ebene seien  $N + 1$  Punkte  $(x_i, y_i)$  ( $i = 0, \dots, N$ ) mit  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$  gegeben. Gesucht ist eine von  $x$  und  $n$  Parametern  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  ( $n < N$ ) abhängige Funktion  $y = f(x, a_0, \dots, a_{n-1})$ , deren Graph sich möglichst gut den gegebenen Punkten anpasst. Man wählt die Parameter  $a_0, \dots, a_{n-1}$  derart, dass

$$Q(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{j=0}^N [f(x_j, a_0, \dots, a_{n-1}) - y_j]^2$$

minimal wird. Wir betrachten  $Q$  als Funktion von  $n$  Variablen  $a_0, \dots, a_{n-1}$  und wenden, falls  $f$  differenzierbar ist, die Theorie der **lokalen Extremwerte** an. Die **notwendigen Bedingungen**  $Q_{a_l} = 0$  ( $l = 0, \dots, n - 1$ ) liefern dann ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Parameter  $a_0, \dots, a_{n-1}$ . Diese Gleichungen heißen **Normalgleichungen**.

Wählt man speziell  $f$  als ein Polynom in  $x$ , d.h.  $f(x, a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ , dann erhält man mit

$$Q_{a_l} = 2 \sum_{j=0}^N \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_j^k - y_j \right) x_j^l = 0 \quad (l = 0, \dots, n - 1)$$

als **Normalgleichungssystem**  $n$  lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^N x_j^{n-1} \right) a_{n-1} + \left( \sum_{j=0}^N x_j^{n-2} \right) a_{n-2} + \dots + (N + 1) a_0 &= \sum_{j=0}^N y_j \\ \left( \sum_{j=0}^N x_j^n \right) a_{n-1} + \left( \sum_{j=0}^N x_j^{n-1} \right) a_{n-2} + \dots + \left( \sum_{j=0}^N x_j \right) a_0 &= \sum_{j=0}^N y_j x_j \\ \dots & \dots \\ \left( \sum_{j=0}^N x_j^{2n-2} \right) a_{n-1} + \left( \sum_{j=0}^N x_j^{2n-3} \right) a_{n-2} + \dots + \left( \sum_{j=0}^N x_j^{n-1} \right) a_0 &= \sum_{j=0}^N y_j x_j^{n-1}. \end{aligned}$$

Für  $n = 2$  ( $n = 3$ ) ergibt sich die sogenannte **Ausgleichsgerade (Ausgleichsparabel)**. Die Parameter  $a_0$  und  $a_1$  der **Ausgleichsgeraden** berechnet man aus dem **IGS**:

$$\begin{cases} \left( \sum_{j=0}^N x_j \right) a_1 + (N+1) a_0 = \sum_{j=0}^N y_j \\ \left( \sum_{j=0}^N x_j^2 \right) a_1 + \left( \sum_{j=0}^N x_j \right) a_0 = \sum_{j=0}^N y_j x_j. \end{cases}$$

Auf Grund der Voraussetzung  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$  ist das **Normalgleichungssystem** stets **eindeutig lösbar**. Die **Ausgleichsgerade** oder auch **Regressionsgerade** ist diejenige Gerade, die sich den  $N + 1$  Messpunkten am besten anpasst.

**Beispiel 5.10 (Methode der kleinsten Quadrate)** Vor der Eröffnung einer neuen Mensa wurde in einer Umfrage unter Studenten folgendes Kaufkraftpotenzial (Umsatz in € pro Woche) ermittelt:

Preis pro Portion (in €)	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25
Nachfrage (in Portionen)	1000	760	560	400	300

Berechnen Sie mittels eines linearen Ansatzes eine Preis-Absatz-Funktion  $f(x)$ , die die Umfrageergebnisse bestmöglich wiedergibt. Für welchen Preis  $x_0$  ist der Absatz gleich Null?

Wir bezeichnen mit  $x_j$  den Preis pro Portion und mit  $y_j$  die Nachfrage ( $j = 0, \dots, 4$ ). Zu berechnen ist die **Ausgleichs-** oder **Regressionsgerade**. Die benötigten Summen erhält man aus der Tabelle:

$j$	$x_j$	$y_j$	$x_j^2$	$x_j y_j$
0	1.25	1000	1.56	1250
1	1.50	760	2.25	1140
2	1.75	560	3.06	980
3	2.00	400	4.00	800
4	2.25	300	5.06	675
$\Sigma$	8.75	3020	15.93	4845

Man erhält das **IGS**

$$\begin{aligned} 8.75 a_1 + 5.00 a_0 &= 3020 \\ 15.93 a_1 + 8.75 a_0 &= 4845, \end{aligned}$$

welches die **eindeutige Lösung**  $a_1 = -713$  und  $a_0 = 1851$  besitzt. Die **Regressionsgerade** lautet also  $f(x) = -713x + 1851$ . Sie besitzt die **NS**  $x_0 = 2.60$ , für welche der Absatz gleich Null wird. Ab einem Preis von 2.60 € ist kein Umsatz mehr zu erwarten.

### 5.6.3 Extremwerte unter Nebenbedingungen

Vielfach tritt das Problem auf, Extremwerte einer Funktion  $u = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in G$  zu bestimmen, wenn  $x$  und  $y$  gleichzeitig noch irgendeiner Nebenbedingung unterliegen, d.h. einer Gleichung  $g(x, y) = 0$  genügen. Man spricht dann von der Bestimmung eines **Extremwertes unter Nebenbedingungen**.

Der Unterschied zu den in Kapitel 3 behandelten **Optimierungsaufgaben** besteht darin, dass in der **linearen Optimierung** Zielfunktion und Nebenbedingungen **linear** sind und die Nebenbedingungen als Ungleichungen gegeben sind. Wegen der **Linearität** der **Zielfunktion** und der **LNB** versagen für die **NLOP** die Methoden der Analysis.

**Beispiel 5.11** Wir betrachten für  $n = 2$  die **Cobb-Douglas-Funktion** im Spezialfall  $\alpha = 1, \beta = \gamma = 1/2$  (vgl. Beispiel 5.2):

$$u = f(x, y) = x^{1/2}y^{1/2} = \sqrt{xy}, \quad D(f) = (x, y) \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0. \quad (5.6)$$

Gesucht ist der größte Funktionswert  $u$  unter der Nebenbedingung, dass das für Arbeitskräfte  $x$  und Produktionsmittel  $y$  einsetzbare Kapital durch den Wert  $d$  beschränkt ist:

$$x + y = d, \quad d > 0. \quad (5.7)$$

**Geometrische Interpretation:** Die Nebenbedingung (5.7) in Form einer linearen Gleichung beschreibt in der  $xy$ -Ebene eine Gerade, auf der alle zulässigen Lösungen liegen. Unter diesen suchen wir nun denjenigen Punkt, für den der maximale Funktionswert  $u$  erreicht wird, oder anders ausgedrückt, der auf der Höhenlinie liegt, die der maximalen Höhe entspricht. Die Höhenlinie erhält man aus der Gleichung  $\sqrt{xy} = c, c \in \mathbb{R}$  oder  $y = c^2/x, c \in \mathbb{R}$ . Für  $c \neq 0$  erhält man Hyperbeläste, die für das gegebene Definitionsgebiet im 1. Quadranten liegen und für  $c = 0$  die positiven Halbachsen. Es ist nun der Hyperbelast, d. h. der Wert für  $c^2$  gesucht, der nur einen Schnittpunkt mit der Geraden  $y = d - x$  besitzt. Es ergibt sich  $x^2 - dx + c^2 = 0$  bzw.  $x_{1|2} = d/2 \pm \sqrt{d^2/4 - c^2}$ : Für  $c^2 = d^2/4$  gibt es nur eine Lösung, nämlich  $x_0 = d/2$ . Im Punkt  $(x_0, y_0) = (d/2, d/2)$  auf der Geraden (5.7) nimmt die Funktion  $u = f(x, y)$  ihren größten Wert  $u_0 = f(x_0, y_0) = x_0 = d/2$ .

Eine andere Interpretation: Da der gesuchte Punkt die Gleichung (5.7) erfüllen soll, liegen die möglichen Extrema auf der Schnittkurve  $s$ , der durch  $u = f(x, y)$  dargestellten Fläche mit der Ebene, die durch die Gerade  $y = d - x$  hindurchgeht und senkrecht auf der  $xy$ -Ebene steht. Das Maximum dieser Schnittkurve ist die gesuchte Lösung des Problems.

## Lösungsverfahren für Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

1. Die Reduktionsmethode: Die Gleichung für die Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  sei eindeutig nach einer der Variablen auflösbar. OBdA nehmen wir die Auflösbarkeit nach  $y$  an:  $y = \varphi(x)$ . Dann erhält man durch Einsetzen von  $y = \varphi(x)$  in die Ausgangsfunktion  $u = f(x, y)$  eine Funktion  $u = f(x, \varphi(x)) = F(x)$ , die nur noch von einer Variablen  $x$  abhängt. Damit ist das Problem auf die Bestimmung von Extremwerten einer Funktion einer Variablen zurückgeführt worden.

Die Anwendung dieser Methode auf den Fall von mehr als zwei Variablen und mehr als zwei Nebenbedingungen ist i. Allg. nicht möglich.

2. Die Methode der **Lagrange-Multiplikatoren**: 1. Schritt: Ermittlung aller stationären Punkte der **Lagrange-Funktion**:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (x, y) \in G, \lambda \in \mathbb{R} \ (\lambda \text{ Parameter})$$

### Notwendiges Kriterium für die Existenz eines relativen Extremwertes

Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien in  $G$  **total differenzierbar**. Besitzt  $f$  in  $P_0 = (x_0, y_0) \in G$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  einen **relativen Extremwert**, wobei  $g_x(x_0, y_0) \neq 0$  oder  $g_y(x_0, y_0) \neq 0$  erfüllt sein möge, dann erfüllt  $(x_0, y_0)$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} L_x(x_0, y_0, \lambda) &= f_x(x_0, y_0) + \lambda g_x(x_0, y_0) = 0, \\ L_y(x_0, y_0, \lambda) &= f_y(x_0, y_0) + \lambda g_y(x_0, y_0) = 0, \\ L_\lambda(x_0, y_0, \lambda) &= g(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

Man erhält also als **notwendige Bedingung** ein System von drei i. Allg. nichtlinearen Gleichungen mit den Unbekannten  $x_0, y_0, \lambda$ .

2. *Schritt*: Untersuchung, welcher der **stationären Punkte** ein **relativer Extremwert** von  $f$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  ist. **Hinreichende Bedingungen** im Zusammenhang mit der **Lagrange-Methode** laufen auf die Untersuchung von **Definitheitseigenschaften** der **Hesse-Matrix** für die **Lagrange-Funktion** hinaus. Oft kommt man jedoch mit Hilfe geometrischer Überlegungen zum Ziel.

Die Methode der **Lagrange-Multiplikatoren** lässt sich ohne Schwierigkeiten auch auf Funktionen  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  von  $n$  Variablen übertragen, deren **Extremwerte** insgesamt  $k$  Nebenbedingungen ( $1 \leq k \leq n - 1$ ) unterworfen sind.

Nachteile der Methode der **Lagrange-Multiplikatoren**: Die Anzahl der Variablen vergrößert sich. Die hinreichenden Bedingungen sind schwer überprüfbar.

### Beispiel 5.12 (Lösung von Beispiel 5.11)

- (1) **Reduktionsmethode**:  $y = d - x$  eingesetzt in (5.6) liefert  $f(x, y) = f(x, d - x) = F(x) = \sqrt{x(d - x)}$ . Aus  $F'(x) = \frac{d - 2x}{2\sqrt{x(d - x)}} = 0$  erhält man  $x_0 = d/2$  als einzigen **stationären Punkt** von  $F$ . Einsetzen in (5.7) ergibt  $y_0 = d/2$ . Wegen

$$F''(x) = \frac{(-4)\sqrt{x(d-x)} - \frac{(d-2x)^2}{\sqrt{x(d-x)}}}{4x(d-x)} \quad \text{und} \quad F''(x_0) = F''(d/2) = -2/d < 0$$

liegt in  $x_0 = d/2$  ein **lokales** und gleichzeitig das **globale Maximum** für  $F$  vor. Im Punkt  $(x_0, y_0) = (d/2, d/2)$  nimmt dann die Funktion  $f(x, y)$  das **globale Maximum**  $f(x_0, y_0) = d/2$  an.

- (2) **Methode der Lagrange Multiplikatoren**:

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{xy} + \lambda(x + y - d) \quad (x, y) \in D \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \text{ Parameter}).$$

Man erhält das nichtlineare Gleichungssystem

$$L_x(x, y, \lambda) = \frac{y}{2\sqrt{xy}} + \lambda = 0, \quad L_y(x, y, \lambda) = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + \lambda = 0, \quad L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - d = 0.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich  $\lambda = -\frac{y}{2\sqrt{xy}} = -\frac{x}{2\sqrt{xy}}$ , also  $x = y$ .

Aus der dritten Gleichung folgt dann  $x = y = d/2$ . Ferner ist  $\lambda = -1/2$ . Somit ist  $(x_0, y_0, \lambda_0) = (d/2, d/2, -1/2)$  der einzige **stationäre Punkt** der **Lagrange-Funktion**. Dabei gilt  $g_x(x_0, y_0) = 1 \neq 0$ .

Wir überprüfen, ob im **stationären Punkt** ein **Extremum** vorliegt. Sei  $\delta \neq 0$ . Wir bilden  $x_1 = x_0 + \delta = d/2 + \delta$  und  $y_1 = -(x_0 + \delta) + d = d/2 - \delta$ . Der Punkt  $(x_1, y_1)$  liegt auf der Geraden  $x + y = d$ . Dann ist

$$f(x_1, y_1) = \sqrt{(d/2 + \delta)(d/2 - \delta)} = \sqrt{d^2/4 - \delta^2} < \sqrt{d^2/4} = d/2 = f(x_0, y_0).$$

für alle  $\delta \neq 0$ . Folglich liegt im Punkt  $(x_0, y_0) = (d/2, d/2)$  ein **lokales** und gleichzeitig das **globale Maximum** vor.

## 6 Anhang

**Beispiel 6.1** Zwei Motorentypen  $M_1$  und  $M_2$  werden an den Fließbändern A und B montiert. Am Fließband A können je Stunde  $n_1 = 60$  Motoren  $M_1$  oder  $n_2 = 60$  Motoren  $M_2$  hergestellt werden, während am Fließband B  $n_3 = 90$  Motoren  $M_1$  oder  $n_4 = 60$  Motoren  $M_2$  je Stunde produziert werden können. Benötigt werden doppelt so viele Motoren vom Typ  $M_2$  wie vom Typ  $M_1$ . Die Montage ist so zu organisieren, dass in 8 Stunden eine maximale Stückzahl vom Typ  $M_1$  und damit auch vom Typ  $M_2$  erreicht wird.

### 1. Aufstellung des LOP

Bezeichnet man mit  $x_1$  bzw.  $x_2$  die Montagestunden an A für  $M_1$  bzw.  $M_2$  und mit  $x_3$  bzw.  $x_4$  die Montagestunden an B für  $M_1$  bzw.  $M_2$ , so ergibt sich folgendes LOP:

$$z = 60x_1 + 90x_3 \longrightarrow \max \quad (\text{bezogen auf } M_1)$$

unter den LNB

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_3 + x_4 &\leq 8 \\ 2(60x_1 + 90x_3) &= 60x_2 + 60x_4 \end{aligned}$$

und den NNB

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Dieses LOP ist nicht in der Normalform gegeben.

### 2. Konstruktion einer Normalform der LOP (NLOP):

$$z^* = -60x_1 - 90x_3 \longrightarrow \min$$

unter den LNB

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &+ x_5 &= 8 \\ &x_3 + x_4 + x_6 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 & &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

und den NNB

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

Die Schlupfvariablen  $x_5$  und  $x_6$  lassen sich dabei als Stillstandszeiten von A und B interpretieren.

### 3. Bestimmung einer Basisdarstellung von (6.1) mittels AVS

$T_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$u_1$	1	1	0	0	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">1</span>	0	-8
$u_2$	0	0	1	1	0	1	-8
$u_3$	2	-1	3	-1	0	0	0
$z^*$	-60	0	-90	0	0	0	0

$(u_1 \longleftrightarrow x_5)$

$T_1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	
$x_5$	-1	-1	0	0	0	8
$u_2$	0	0	1	1	<span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">1</span>	-8
$u_3$	2	-1	3	-1	0	0
$z^*$	-60	0	-90	0	0	0

$(u_2 \longleftrightarrow x_6)$

$T_2$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_5$	-1	-1	0	0	8
$x_6$	0	0	-1	-1	8
$u_3$	2	-1	3	-1	0
$z^*$	-60	0	-90	0	0

 $(u_3 \longleftrightarrow x_4)$ 

$B_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$x_5$	-1	-1	0	8
$x_6$	-2	1	-4	8
$x_4$	2	-1	3	0
$z^*$	-60	0	-90	0

Die **Basisdarstellung**  $B_0$  von (6.1) besitzt folgende **Eigenschaften**:

- 1° **Basisvariable** sind  $x_4, x_5, x_6$ , **Nichtbasisvariable** sind  $x_1, x_2, x_3$ .
- 2° Die **Basislösung**  $\mathbf{x}_0^T = (x_1 \dots x_6)$  lautet:  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 8, x_6 = 8$ , der zugehörige Wert der Zielfunktion  $z^*(\mathbf{x}_0)$  ist  $d_0 = 0$ . Diese **Basislösung** ist die schlechteste von allen **Basislösungen**, denn wegen  $x_5 = x_6 = 8$  stehen beide Fließbänder 8 Stunden lang still.
- 3°  $B_0$  ist **zulässig**, da  $b_1 = 8, b_2 = 8, b_3 = 0$  offensichtlich der Bedingung  $b_1, \dots, b_p \geq 0$  mit  $p = 3$  genügt. Folglich ist  $B_0$  ein **Simplextableau**, also  $B_0 = S_0$ .

#### 4. Prüfung des Simplexkriteriums

Das **Simplextableau**  $S_0$  ist nicht entscheidbar, da weder **S1** (z.B. wegen  $d_1 = -60 < 0$ ) noch **S2** (z.B. wegen  $b_{11} = -1 < 0$  und  $b_{23} = -4 < 0$ ) erfüllt sind.

#### 5. Simplexverfahren

Gemäß **SR1** sind die 1. und 3. Spalte von  $S_0$  als **Pivotspalte** geeignet. Für  $t = 3$  ergibt sich nach **SR2**  $s = 2$ , da  $J(3) = \{2\}$ . Also ist  $b_{23}$  in  $S_0$  das nächste **Pivotelement**

 $(x_6 \longleftrightarrow x_3)$ 

$S_1$	$x_1$	$x_2$	$x_6$	
$x_5$	-1	-1	0	8
$x_3$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	2
$x_4$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	6
$z^*$	-15	$-\frac{90}{4}$	$\frac{90}{4}$	-180

Das **Simplextableau**  $S_1$  ist nicht entscheidbar, da weder **S1** (z.B. wegen  $d_1 = -15 < 0$ ) noch **S2** (z.B. wegen  $b_{11} = -1 < 0$  und  $b_{12} = -1 < 0$ ) erfüllt sind. Somit ist das **Simplexverfahren** fortzusetzen. Gemäß **SR1** sind die 1. und 2. Spalte von  $S_1$  als **Pivotspalte** geeignet. Für  $t = 2$  ergibt sich

$$J(2) = \{1, 3\} \quad \text{und} \quad m(2) = \min \left\{ \frac{b_1}{|b_{12}|}, \frac{b_3}{|b_{32}|} \right\} = \min \left\{ \frac{8}{1}, \frac{6}{0.25} \right\} = 8,$$

d.h. nach **SR2** ist  $s = 1$ . Also ist  $b_{12}$  in  $S_1$  das nächste **Pivotelement**.

 $(x_5 \longleftrightarrow x_2)$ 

$S_2$	$x_1$	$x_5$	$x_6$	
$x_2$	-1	-1	0	8
$x_3$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	4
$x_4$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	4
$z^*$	$\frac{30}{4}$	$\frac{90}{4}$	$\frac{90}{4}$	-360

Das Simplextableau  $S_2$  ist entscheidbar, da  $d_1 = \frac{30}{4}$ ,  $d_2 = \frac{90}{4}$  und  $d_3 = \frac{90}{4}$  nicht negativ sind und somit **S1** erfüllt ist. Die **Basislösung**

$$x_1 = 0, x_2 = 8, x_3 = 4, x_4 = 4, x_5 = 0, x_6 = 0$$

ist eine **optimale Lösung** des **LOP**.

Für das Ausgangsproblem heißt dies: Die maximale Anzahl montierter Motoren  $M_1$  beträgt 360, die von  $M_2$  ist 720. Am Fließband A sind nur Motoren vom Typ  $M_2$  herzustellen, während am Fließband B je 4 Stunden Motoren vom Typ  $M_1$  und vom Typ  $M_2$  zu produzieren sind. Die Stillstandszeiten  $x_5$  an A und  $x_6$  an B sind gleich Null.

**Beispiel 6.2** Gegeben sei ein **LOP** mit

$$z = x_1 + x_2 + 3 \longrightarrow \min$$

unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &\geq 2 \\ -x_1 + x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

und  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ . Nach Einführung der **Schlupfvariablen**  $x_4, x_5, x_6$  ergibt sich das **NLOP**

$$z = x_1 + x_2 + 3 \longrightarrow \min$$

mit

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 &= 2 \\ -x_1 + x_3 - x_6 &= 0 \end{aligned}$$

und

$$x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0.$$

Multiplikation der ersten beiden Gleichungen des **IGS** mit  $(-1)$  und Einführung der Hilfsvariablen  $u_1, u_2, u_3$  wie in Punkt 3.3.4. liefert das **Hilfsproblem (H)**:

$$h = u_1 + u_2 + u_3 \longrightarrow \min$$

mit dem **IGS**

$$\begin{aligned} u_1 &= -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 1 \\ u_2 &= x_1 - x_2 + x_3 + x_5 + 2 \\ u_3 &= -x_1 + x_3 - x_6 \end{aligned}$$

und den **Nebenbedingungen**

$$x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0.$$

Das zugehörige Anfangstableau ist bereits ein **Simplextableau** bezüglich (H). Es hat unter Einbeziehung der  $z$ -Zeile die Form

$T_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$u_1$	-1	-1	2	1	0	0	1
$u_2$	1	-1	1	0	1	0	2
$u_3$	-1	0	1	0	0	-1	0
$u_1 + u_2 + u_3 = h$	-1	-2	4	1	1	-1	3
$z$	1	1	0	0	0	0	3

Wählen gemäß **SR1**  $t = 6$  als **Pivotspalte** und nach **SR2**  $s = 3$  als **Pivotzeile** ( $u_3 \longleftrightarrow x_6$ ). Das folgende Tableau hat nun die Form:

$T_1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$u_1$	-1	-1	2	1	0	1
$u_2$	1	-1	1	0	1	2
$x_6$	-1	0	1	0	0	0
$u_1 + u_2 = h$	0	-2	3	1	1	3
$z$	1	1	0	0	0	3

Die nächsten beiden Austauschschritten ( $u_1 \longleftrightarrow x_2$ ) und ( $u_2 \longleftrightarrow x_4$ ) liefern die Tableaus

$T_2$	$x_1$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_2$	-1	2	1	0	1
$u_2$	2	-1	-1	1	1
$x_6$	-1	1	0	0	0
$u_2 = h$	2	-1	-1	1	1
$z$	0	2	1	0	4

 $\longrightarrow$ 

$T_3$	$x_1$	$x_3$	$x_5$	
$x_2$	1	1	1	2
$x_4$	2	-1	1	1
$x_6$	-1	1	0	0
$h$	0	0	0	0
$z$	2	1	1	5

Das letzte Tableau ist ein **Simplextableau** für das **Hilfsproblem** ( $H$ ). Streichung der  $h$ -Zeile führt zu einem **Simplextableau** für das ursprüngliche **NLOP**, welches sogar bereits **entscheidbar** ist:

$S_0$	$x_1$	$x_3$	$x_5$	
$x_2$	1	1	1	2
$x_4$	2	-1	1	1
$x_6$	-1	1	0	0
$z$	2	1	1	5

Nach **S1** ist  $S_0$  ein **optimales Simplextableau** mit der **Basislösung**

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 0,$$

die die **optimale Lösung**  $z_{\min} = 5$  liefert.

### Beispiel 6.3 (Hauptachsentransformation)

$$5x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 - 6x_2 + 4 = 0 \quad (6.2)$$

#### 1. Berechnung der **Eigenwerte** und **Eigenvektoren**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

Zu den **Eigenwerten**  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 6$  gehören die **Eigenvektoren**

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Die **Eigenvektoren** sind bereits **orthogonal**. Die **normierten Eigenvektoren** sind

$$\mathbf{z}^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Aufstellen der Transformationsmatrix  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$$

4. Hauptachsentransformation in der Gleichung (6.2)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(y_1 - 2y_2) \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$y_1^2 + 6y_2^2 - 2\sqrt{5}y_1 - 2\sqrt{5}y_2 + 4 = 0.$$

5. Ausführung der quadratischen Ergänzung

$$(y_1 - \sqrt{5})^2 + 6(y_2 - \sqrt{5}/6)^2 + (-11/6) = 0.$$

6. Bestimmung der Art der Kurve: Man erhält mittels Division durch  $(-11/6)$

$$\frac{(y_1 - \sqrt{5})^2}{11/6} + \frac{(y_2 - \sqrt{5}/6)^2}{11/36} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt in

$$y_1^0 = \sqrt{5} \approx 2.23 \quad y_2^0 = \sqrt{5}/6 \approx 0.37$$

und den Halbachsen

$$a = \sqrt{11/6} \approx 1.4 \quad b = \sqrt{11}/6 \approx 0.6.$$

Der Ellipsenmittelpunkt kann mit Hilfe von (6.3) auch im  $x_1x_2$ -Koordinatensystem angegeben werden:

$$x_1^0 = 2/3 \approx 0.67 \quad x_2^0 = 13/6 \approx 2.17.$$

Die Längen der Halbachsen ändern sich beim Übergang vom  $x_1, x_2$ -Koordinatensystem zum  $y_1, y_2$ -Koordinatensystem nicht, da beide Koordinatensysteme durch eine **orthogonale Transformation** miteinander verknüpft sind. Die Richtung der Hauptachsen der Ellipse ist im  $x_1, x_2$ -Koordinatensystem durch die **normierten Eigenvektoren**  $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2$  bestimmt.

# Index

- Absolutglied, 46
- Adjunkte, 22
- Ausgleichsgerade, 58
- Ausgleichsparabel, 58
- Austauschverfahren, 31
- Austauschverfahren mit Spaltentilgung, 33
  
- charakteristische Gleichung, 42
- charakteristische Matrix, 42
- charakteristisches Polynom, 42
- Cobb-Douglas-Funktion, 50, 51, 53, 54, 59, 60
  
- Determinante, 21
- Diagonalmatrix, 19
- Dreiecksmatrix
  - obere,untere, 19
- Durchstoßpunkt, 13
  
- Ebenengleichungen
  - Achsenabschnittsgleichung, 11
  - allgemeine Form, 11
  - Dreipunktgleichung, 10
  - Hessesche Normalform, 13
  - Punktrichtungsgleichung, 10
- eigentliche lokale Extrema, 55
- Eigenvektor, 42
- Eigenwert, 42
- Einheitsmatrix, 19
- Einheitsvektor, 1
- Entwicklungssatz, 22
  
- Flächen 2. Ordnung, 46
  
- Gauß-Algorithmus, 30
- Gauß-Jordan-Verfahren, 24
- Gebiet, 50
  - einfach zusammenhängend, 50
  - mehrfach zusammenhängend, 50
- Geradengleichungen
  - Achsenabschnittsgleichung, 7
  - allgemeine Form, 8
  - Hessesche Normalform, 13
  - Normalform, 8
  - Plückersche Form, 7
  - Plückersche Normalform, 9
  - Punktrichtungsgleichung, 6
  - symmetrische Form, 7
  - Zweipunktgleichung, 6
- globale Extrema, 55
- Gozintograph, 20
- Grenzwert, 51
  
- Hauptachsentransformation, 47
- Hesse-Matrix, 56
- homogene lineare Gleichungssysteme
  - allgemeine Lösung, 29
  - Fundamentalsystem, 29
- inhomogene lineare Gleichungssysteme
  - allgemeine Lösung, 29
  - spezielle Lösung, 29
- innere Extrema, 55
- iterierter Grenzwert, 52
  
- Kroneckersymbol, 19
- Kurven 2. Ordnung, 46
  
- Lagrange-Funktion, 59
- lineare Gleichungssysteme, 26
  - homogene, 26
  - inhomogene, 26
  - nichttriviale Lösungen, 26
  - triviale Lösung, 26
- lineare Mannigfaltigkeit, 15
- lineare Nebenbedingungen, 34
- lineares Optimierungsproblem, 34
  - freie Variable, 37
  - gebundene Variable, 37
  - Hilfsproblem, 40
  - Hilfszielfunktion, 41
  - Normalform, 36
  - Schlupfvariable, 37
- Linearform, 46
- lokale Extrema, 55
- Lotfußpunkte, 9
  
- Matrix, 17
  - Hauptdiagonale, 18
  - inverse, 24
  - Nebendiagonale, 18
  - orthogonal, 25
  - quadratische, 17
  - Rang, 23

- schiefsymmetrisch, 25
- symmetrisch, 25
- transponierte, 18
- Matrixeigenwertprobleme, 42
- Menge
  - abgeschlossen, 50
  - offen, 50
  - zusammenhängend, 50
- Methode der kleinsten Quadrate, 57
- Methode der Lagrange-Multiplikatoren, 59
- Nichtnegativitätsbedingungen, 34
- Niveaulinien, 51
- Normalenvektor, 12
- Normalgleichungen, 57
- Nullmatrix, 18
- Nullvektor, 1
- optimale Lösung, 34
- Ortsvektor, 2
- partielle Ableitungen, 53
- partielle Differenzierbarkeit, 52
- Pivotelement, 32
- Pivotspalte, 32
- Pivotzeile, 32
- punktierte Umgebung, 51
- quadratische Form, 45
- Randextrema, 55
- Rechteckbereich, 50
- Rechteckmatrix, 17
- Rechteckregel, 32
- Reduktionsmethode, 59
- Sattelpunkt, 56
- Schnittgerade, 12
- Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene, 14
- Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen, 12
- Simplexalgorithmus
  - Basis, 38
  - Basisdarstellung, 38
  - Basislösung, 38
  - Basistausch, 38
  - Basisvariable, 38
  - Nichtbasisvariable, 38
  - zulässige Basis, 38
  - zulässige Basisdarstellung, 38
  - zulässige Lösung, 38
- Simplexkriterium, 39
- Simplexregeln, 39
- Simplextableau, 39
  - entscheidbar, 39
  - nicht entscheidbar, 39
  - optimal, 39
- Simplexverfahren, 39
- Skalar, 1
- Skalarprodukt, 2
- Spaltenvektor, 18
- Spatprodukt, 5
- stationärer Punkt, 56
- symmetrische Matrix
  - definit, 45
  - indefinit, 45
  - negativ definit, 45
  - negativ semidefinit, 45
  - positiv definit, 45
  - positiv semidefinit, 45
  - semidefinit, 45
- Tangentialebene, 54
- totale Differenzierbarkeit, 54
- totales Differenzial, 54
- Umgebung, 50
- Unterdeterminante, 22
- Unterraum, 15
- Vektor, 1
- Vektoren
  - kollinear, 4
  - komplanar, 5
  - linear abhängig, 16
  - linear unabhängig, 16
  - orthogonal, 3
- Vektorprodukt, 4
- Vektorraum, 15
  - Dimension, 17
- Vektorraum
  - Basis, 17
- verallgemeinerte Kettenregel, 55
- Zeilenvektor, 18
- Zielfunktion, 34
- zuässiger Bereich, 34