Übungsaufgaben zur Katastrophentheorie

1. *(5 Punkte)* Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch ? (Begründen Sie Ihre Antworten.)
   (a) Jeder Keim in $\mathcal{E}_n$ ist stabil äquivalent zu einem Keim vom Typ A, D oder E.
   (b) Ist f ein Keim mit endlicher Milnorzahl, so kann man Terme von ausreichend hohem Grad in der Taylorreihe von f (bis auf Rechtsäquivalenz) immer weglassen.
   (c) Jeder Keim $f \in \mathcal{E}_2$ ist rechtsäquivalent zu einem Polynom.
   (d) Es gibt unendlich viele Rechtsäquivalenzklassen von Keimen f mit $\mu(f) = 8$.
   (e) $(x^2, y^2) \subset (x^2 + xy^3 + 37x^5, y^2 + x^3 + (xy)^3) \subset \mathcal{E}_2$

2. *(5 Punkte)* Berechnen Sie in ähnlicher Weise wie in Aufgabe 3, Blatt 7, die Klassifikation von stabilen Rechtsäquivalenzklassen von Keimen $f \in \mathcal{E}_n$ im Fall $\mu = 7$. Gehen Sie folgendermaßen vor.
   (a) Sei $k = \text{Korang}(f)$, dann verwenden Sie die Formel
   $$\mu(f) > \frac{k}{6}(k^2 + 5)$$
   (welche die Abschätzung aus Lemma 4.7 verallgemeinert) um $k \in \{1, 2\}$ zu zeigen.
   (b) Zeigen Sie: Falls $k = 1$ ist, dann ist f stabil äquivalent zu $\pm x^8$.
   (c) Folgern Sie aus $k = 2$ dass f stabil äquivalent zu $g \in \mathbf{m}^3_{\mathcal{E}_2}$, und dass g 6-bestimmt ist.
   (d) Zeigen Sie analog zu Aufgabe 1 (d), dass $g \simeq p + h$ mit $p \in \{x^3, x^2y\}$ und $h \in \mathbf{m}^4_{\mathcal{E}_2}$ ist.
   (e) Zeigen Sie schließlich, dass g rechtsäquivalent zu $x^3 + xy^3$ oder zu $\pm(x^2y + y^6)$ ist.

3. *(5 Punkte)* Für $c \in \mathbb{R}$, sei $f_c := x^4 + 2cx^2y^2 + y^4 \in \mathcal{E}_2$.
   (a) Zeigen Sie, dass für $c_1, c_2 \in (-\infty, 1]$ die Keime f_{c_1} und f_{c_1} rechtsäquvalent sind genau dann, wenn $c_1 = c_2$ ist.
   (b) Zeigen Sie, dass für $c_1, c_2 \in (-1, \infty)$ die Keime f_{c_1} und f_{c_1} rechtsäquvalent sind genau dann, wenn $c_1 = \frac{3-c}{c+1}$ ist.