Übungsaufgaben zur Katastrophentheorie

1. *(4 Punkte)* Beachten Sie für die folgende Aufgabe auch den Beweis von Satz 3.6.
   Sei $f = x^n$ und $F(x,t) := f_t(x) := x^n + tx^{n+1}$.
   (a) Geben Sie eine glatte Funktion $H(t,x) : I \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ an (wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, welches die Null enthält), so dass $h_t(x) := H(-,t)$ für alle $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ ein Koordinatenwechsel ist (also ein lokaler Diffeomorphismus bei $0 \in \mathbb{R}$), und so dass gilt $f \circ h_t = f_t$.
   (b) Finden Sie eine Funktion $\xi(x,t)$, welche die folgende Gleichung erfüllt.
   $$\xi(x,t) \cdot \partial_x F(X,t) + \partial_t F_t(x,t) = 0$$
   (c) Wie lautet nun die folgende Differentialgleichung ausgeschrieben?
   $$\partial_t H(x,t) = \xi(H(X,t),t).$$
   (d) Zeigen Sie, dass eine Lösung $H(x,t)$ der Gleichung $\partial_t H(x,t) = \xi(H(X,t),t)$ die Identität
   $$\frac{dF(H(x,t),t)}{dt} = 0$$
   erfüllt.

2. *(4 Punkte)* Entscheiden Sie, ob die folgenden Keime f isolierte Singularitäten haben, und berechnen sie in diesem Fall ihre Milnorzahl und das kleinste k, so dass f k-bestimmt ist (also die Bestimmtheit).
   (a) $f = x^4 + y^3 \in \mathcal{E}_2$
   (b) $f = x^3 + y^5 + x \in \mathcal{E}_2$.
   (c) $f = x^2 - y^2 \in \mathcal{E}_3$
   (d) $f = x^3 \pm xy^k \in \mathcal{E}_2$, $k > 2$.

3. *(2 Punkte)* Bestimmen Sie die Milnorzahl der folgenden 2 Keime.
   (a) $f = x^p + y^p + x^2y^2 \in \mathcal{E}_2$, für alle $p, q > 3$,
   (b) $f = x^2 + y^2 + 2xy \in \mathcal{E}_2$.