Übungsaufgaben zur Katastrophentheorie

1. *(3 Punkte)* Sei R ein Ring (kommutativ, mit 1) und $I \subset R$ ein Ideal.
   (a) Zeigen Sie, dass I ein R-Modul ist.
   (b) Seien Elemente $a_1, \ldots, a_n \in R$ gegeben. Zeigen Sie, dass $(a_1, \ldots, a_n)$ das kleinste Ideal (bezüglich der Inklusion) ist, welches $a_1, \ldots, a_n$ enthält.
   (c) Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, $ker(\varphi) := \{a \in R \,|\, \varphi(a) = 0\}$ und $im(\varphi) := \{b \in S \,|\, \exists a \in R, \varphi(a) = b\}$. Zeigen Sie, dass $ker(\varphi)$ ein Ideal in R ist, dass aber $im(\varphi)$ kein Ideal in S ist.
   (d) Zeigen Sie, dass R/I (d.h., die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Relation $a \simeq b \Leftrightarrow a - b \in I$) in natürlicher Weise die Struktur eines (kommutativen) Ringes (mit 1) trägt.
   (e) Zeigen Sie, dass das Ideal I prim ist, falls es maximal ist.
   (f) Zeigen Sie, dass R/I ein Körper ist genau dann, wenn I ein maximales Ideal ist. Zeigen Sie analog, dass R/I ein Integritätsring (d.h. nullteilerfrei) ist, genau dann, wenn I ein Primideal ist. Ein Ring S heißt nullteilerfrei, falls für alle $a, b \in S$ gilt, dass aus $a \cdot b = 0$ folgt, dass $a = 0$ oder $b = 0$ ist.

2. *(2 Punkte)*
   (a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und (A, p) sowie (B, p) Mengenkeime. Zeigen Sie, dass der Schnitt $(A, p) \cap (B, p)$ ein wohldefinierter Mengenkeim ist.
   (b) Zeigen Sie analog, dass das Produkt von Keimen $(A, p) \times (B, q)$ wohldefiniert ist.
   (c) Zeigen Sie, dass ein Funktionskeim $[f]_p = (f, p)$ einen wohldfinierten Definitionskeim (A, p) besitzt.

3. *(3 points)*
   (a) Let R be a ring (commutative with unit) and $I \subset R$ an ideal. Show that the projection map $R \to R/I$, $x \mapsto [x]$ induces a bijection between the following two sets
   $$\left\{\widetilde{J} \subset R/I \mid \widetilde{J} \text{ is an ideal in } R/I\right\} \qquad \text{and} \qquad \{J \subset R \mid J \text{ is an ideal in } R \text{ and } I \subset J\}$$
   (b) Consider the ring $R = \mathbb{R}[x]$ and the ideals $I_1 = (x^2 + 1)$, $I_2 = (x^3 + x)$ and $I_3 = (x - 5)$. For $i \in 1, 2, 3$, decide whether the quotient ring R/I_j is a field and/or a domain (and give a proof of your affirmation). (Translation: field $\cong$ Körper, domain $\cong$ Integritätsring).

4. *(3 Punkte)*
   (a) Zeigen Sie, dass das Ideal $\mathbf{m}_p := \{[f]_p \,|\, f(p) = 0\}$ maximal in der Algebra $\mathcal{E}_p := \{[f] \,|\, f \in \mathcal{C}^\infty(U),\ U \text{ offene Umgebung von } p\}$ ist.
   (b) Zeigen Sie, dass die formalen Potenzreihen $\mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_n]] := \left\{\sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{\nu}} \cdot x^{\underline{\nu}} \,|\, a_{\underline{\nu}} \in \mathbb{R}\right\}$ mit den in der Vorlesung angegebenen Verknüpfungen eine $\mathbb{R}$-Algebra bilden und dass die Teilmenge $\mathbf{m} := \left\{\sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{\nu}} \cdot x^{\underline{\nu}} \,|\, a_{\underline{\nu}} \in \mathbb{R}, a_{\underline{0}} = 0\right\}$ ein maximales Ideal in $\mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$ ist.
   (c) Zeigen Sie, dass für Taylorabbildung $T : \mathcal{E} \to \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$ gilt, dass $T([f] \cdot [g]) = T([f]) \cdot T([g])$ ist. Beweisen und verwenden Sie dabei insbesondere die Leibniz-Regel
   $$D^{\underline{\nu}}(f \cdot g) = \sum_{\underline{\kappa} + \underline{\lambda} = \underline{\nu}} \binom{\underline{\nu}}{\underline{\kappa}} D^{\underline{\kappa}} f \cdot D^{\underline{\lambda}} g$$
   Hinweis: Beweisen Sie die Leibniz-Regel durch Induktion über $|\underline{\nu}|$.

Abgabe bis Dienstag, den 08. März 2011 um 13^{30} Uhr in A5.