Übungsaufgaben zur Katastrophentheorie

1. *(1 Punkt)*

   Zeigen Sie, dass die folgenden glatten Funktionen (die „elementaren Katastrophen“) isolierte kritische Punkte bei 0 in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ und sonst keine weiteren kritischen Punkte haben.
   $$x^3, x^4, x^5, x^6, x^3 + y^3, x^3 - xy^2, x^2y + y^4$$

2. *(4 Punkte)* Etwas Wiederholung aus der linearen Algebra.

   Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n und $h : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Für eine gegebene Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V bestimmt h durch $H_{ij} := h(v_i, v_j)$ in eindeutiger Weise eine symmetrische Matrix $H \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Natürlich gilt dann auch
   $$h(v_i, v_j) := (v_1, \ldots, v_n) \cdot H \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$
   symbolisch geschrieben als $\underline{v}^{tr} \cdot H \cdot \underline{v}$, wobei $\underline{v}$ der aus den Elementen der Basis gebildete Spaltenvektor ist. Ziel der Aufgabe ist es, zu zeigen, dass es immer eine Basis $\underline{v}$ gibt, bezüglich derer die Matrix H eine besonders einfache Form hat, dies ist der *Sylvestrscher Trägheitssatz*. Zunächst noch einige Begriffe zur Erinnerung.

   - Das Radikal von h ist definiert als $\mathrm{Rad}(h) := \{v \in V \mid h(v, w) = 0 \ \forall w \in V\}$.
   - h heißt nicht-entartet, falls $\mathrm{Rad}(h) = \{0\}$ gilt.
   - h heißt positiv bzw. negativ definit, falls für alle $v \in V \backslash \{0\}$ gilt, dass $h(v, v) > 0$ bzw. $h(v, v) < 0$ ist.

   Zeigen Sie den Sylvesterschen Trägheitssatz in folgenden Schritten.

   (a) *(1 Punkt)* Sei U ein Untervektorraum von V so dass $V = \mathrm{Rad}(h) \oplus U$ gilt. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von h auf U nicht-entartet ist.

   (b) *(1 Punkt)* Sei h nicht-entartet und $w \in V$ mit $h(w, w) \neq 0$. Sei $W := (\mathbb{R}w)^{\perp}$ das orthogonale Komplement des von w erzeugten Untervektorraumes, d.h. $W := \{v \in V \mid h(v, w) = 0\}$. Zeigen Sie, dass dann die Einschränkung von h auf W nicht-entartet ist.

   (c) *(2 Punkte)* Zeigen Sie per Induktion über n und unter Zuhilfenahme der Aussagen (a) und (b), dass eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V existiert, so dass die bezüglich dieser Basis zu h gehörige Matrix H eine Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \epsilon_1, \ldots, \lambda_l, \nu_1, \ldots, \nu_r)$ ist, wobei $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 1$, $\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_l = -1$ und $\nu_1 = \ldots = \nu_r = 0$ sind. Zeigen Sie weiterhin, dass die Zahlen k, l und r unabhängig von der Wahl der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ sind. Sie heißen die *Sylvester-Invarianten* von h, insbesondere bezeichnet man $n - r$ als den Rang von h, r als den Korang und l als den Index.

3. *(3 points)* (You may formulate your solution in German or English.) Determine the “universal unfolding” of the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^p - y^q$ using a heuristic argument similar to “theorem 0.6”. What is the Milnor number of f?

4. *(2 Punkt)* Sei $g \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom, $p \in \mathbb{N}$ und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := y^p - g(x)$.

   (a) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Crit}(f) \cap f^{-1}(0) = \{(0, x) \mid g$ hat mehrfache Nullstelle bei $x\}$.

   (b) Zeichnen Sie die Menge $f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2$ in den Fällen

      i. $p = 1, 2$ und $g = x^2 - 1$,

      ii. $p = 2$ und $g = x^2 \cdot (1 - x^2)^3$.

Bitte wenden !!!

Hinweise

Begleitend zur Vorlesung wird es jede Woche ein Übungsblatt geben. Dieses soll bis zur nächsten Woche selbständig bearbeitet werden. (Natürlich ist Zusammenarbeit mit Kommilitonen erlaubt und gewünscht, aber die Abgabe soll einzeln erfolgen). Die Übungsblätter werden dann korrigiert und bewertet. Dabei können jeweils 10 Punkte erreicht werden. Erfolgreich an den Übungen teilgenommen hat, wer mindestens 50 Prozent der Punkte erreicht und wer mindestens 2 Mal eine Lösung in der Übung (siehe unten) selbst vorgerechnet hat.
Die Übungszettel sind als pdf-Dateien unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/Katastrophe11.html`

verfügbar.
Einmal pro Woche werden die Aufgaben in der Übung besprochen. Hierbei sollen die Lösungen vorrangig von Ihnen selbst vorgerechnet werden. Natürlich sollen Sie auch Fragen zu vergangenen und gerade aktuellen Übungen sowie zum aktuellen Stoff der Vorlesung stellen. Die Übung findet jeden Dienstag im Anschluss an die Vorlesung von 13.45-15.15 ebenfalls in A5 im Raum C013 statt und wird von Thomas Reichelt geleitet.
Bei jeglichen Fragen zur Vorlesung (Stoff, Übungen, Organisatorisches etc.) sind wir jederzeit per email unter

`christian.sevenheck@uni-mannheim.de`
`thomas.reichelt@uni-mannheim.de`

erreichbar, sowie während der Bürozeiten, am besten aber nach Terminvereinbarung auch persönlich.