Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(3+4 Punkte)*

   (a) Ein *lokaler Ring* ist ein kommutativer Ring, welcher genau ein maximales Ideal enthält. Wir wollen in dieser Aufgabe lokale Ringe charakterisieren. Dazu definieren wir für einen beliebigen kommutativen Ring R mit 1 die Menge der Nicht-Einheiten (non-units) als $\mathrm{NU}(R) := R \backslash R^*$.

   Beweisen Sie die folgenden Aussagen über einen beliebigen kommutativen Ring R mit 1.

   i. Sei $x \in R$, dann ist $(x) = R$ genau dann, wenn $x \in R^*$ (also $x \notin \mathrm{NU}(R)$).

   ii. $$\mathrm{NU}(R) = \bigcup_{\mathbf{m} \text{ ist maximal in R}} \mathbf{m}$$

   Hierbei können Sie annehmen (dies ist eine Konsequenz des Zornschen Lemmas), dass jedes Ideal in R, welches nicht gleich R ist, in einem maximalen Ideal von R enthalten ist.

   iii. Falls R lokal ist, so ist $\mathrm{NU}(R)$ ein Ideal in R.

   iv. Angenommen, $\mathrm{NU}(R)$ sei Ideal in R. Dann ist es notwendig ein maximales Ideal.

   v. R ist lokal genau dann, wenn $\mathrm{NU}(R)$ ein Ideal in R ist.

   (b) Wir betrachten eine Verallgemeinerung der Konstruktion eines Quotientenkörpers aus der Vorlesung (Satz 7.24). Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $S \subset R$ eine beliebige Teilmenge von R. S heißt *multiplikatives System* genau dann wenn $1 \in S$ ist und wenn für all $a, b \in S$ gilt, dass $a \cdot b \in S$.

   Sei $S \subset R$ ein multiplikatives System, dann definieren wir den *Bruchring* $S^{-1}R$ als die Menge der Äquivalenzklassen von Paaren $(a, b) \in R \times S$ bezüglich der Äquivalenzrelation: $(a, b) \sim (a', b')$ genau dann, wenn es ein $r \in S$ gibt mit $r(a \cdot b' - a' \cdot b) = 0$. Wir definieren eine Ringstruktur auf $S^{-1}R$ durch $(a, b) + (a', b') := (ab' + ba', bb')$ und $(a, b) \cdot (a', b') := (aa', bb')$. Wir schreiben $\frac{a}{b}$ für die (a, b).

   i. Zeige, dass $S^{-1}R$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

   ii. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R. Zeige, dass $S := R \backslash \mathfrak{p}$ ein multiplikatives System ist. Man bezeichnet den Bruchring $S^{-1}R$ dann auch als $R_{\mathfrak{p}}$.

   iii. Sei R ein Integritätsring, $S \subset R$ ein multiplikatives System mit $0 \notin S$ und sei $i : R \to S^{-1}R$ die Abbildung welche durch $r \mapsto [(r, 1)] = \frac{r}{1}$ definiert ist. Zeige, dass i ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

   iv. Sei R ein Integritätsring. Zeige, dass $S := R \backslash \{0\}$ ein multiplikatives System ist, und dass $S^{-1}R$ ein Körper ist. Es handelt sich um den Quotientenkörper (manchmal auch $Q(R)$ genannt) aus Satz 7.24 aus der Vorlesung.

   v. Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Zeige, dass $R_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring ist und beschreibe sein maximales Ideal.

   vi. Sei K ein Körper. Betrachte die Ringe $R_1 := K[x]$ und $R_2 := K[[x]]$ (zur Erinnerung, siehe Definition 6.14 aus der Vorlesung, $K[[x]] = \{a : \mathbb{N} \cup \{0\} \to K\}$). Welcher dieser Ringe ist lokal, und was ist sein maximales Ideal ?

Bitte wenden !!!

2. *(3 Punkte)* Es sei $(p_1, p_2, p_3) = (7, 11, 13)$ und

$$(a_{ij})_{i=1,2,3;j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sehen Sie sich den Beweis der klassischen Version des chinesischen Restsatzes (8.1 in der Vorlesung) an und bestimmen Sie für $j = 1, 2, 3, 4$ Zahlen $x_j \in \{0, 1, ..., 7 \cdot 11 \cdot 13 - 1\}$ mit den Eigenschaften

$$x_j \equiv a_{ij} \mod p_i \qquad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

Führen Sie genügend Zwischenschritte aus, aus denen Ihre Rechnung hervorgeht.

3. *(2 Punkte)* Nach Satz 8.6 der Vorlesung läßt sich jede endliche abelsche Gruppe in der Gestalt

$$\frac{\mathbb{Z}}{p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z}} \times .. \times \frac{\mathbb{Z}}{p_s^{\alpha_s}\mathbb{Z}}$$

mit $p_1, ..., p_s$ Primzahlen (evtl. $p_i = p_j$) und auch in der Gestalt

$$\frac{\mathbb{Z}}{b_1\mathbb{Z}} \times .. \times \frac{\mathbb{Z}}{b_k\mathbb{Z}}$$

mit $b_1, ..., b_k \in \mathbb{N} - \{1\}$ und $b_i | b_{i+1}$ schreiben.

Geben Sie für alle abelschen Gruppen der Ordnung 720 in einer Tabelle die beiden Tupel $(p_1^{\alpha_1}, ..., p_s^{\alpha_s})$ und $(b_1, ..., b_k)$ an.

4. *(4 Punkte)*

   (a) Formen Sie mit elementaren Spalten- und Zeilenumformungen (mit ganzzahligen Koeffizienten) die folgenden Matrizen A_i, $i = 1, ..., 5$, mit Spalten der Längen $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (2, 2, 2, 3, 3)$ um in die Gestalt

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & \ddots & & \text{evtl } 0 \\ & & b_{n_i} & \end{pmatrix}$$

   mit $b_j | b_{j+1}$ (und evtl. $b_j = 0$ für große j).
   Mit anderen Worten: führen Sie den Elementarteileralgorithmus durch.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \; A_5 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Die Elemente von $\mathbb{Z}^{n_i}$ werden als Spaltenvektoren geschrieben. Die Spalten der Matrix A_i erzeugen einen $\mathbb{Z}$-Untermodul $U_i \subset \mathbb{Z}^{n_i}$. Geben Sie einen zum Quotientenmodul $\mathbb{Z}^{n_i}/U_i$ isomorphen $\mathbb{Z}$-Modul an.

   (c) Zeigen Sie: *Gilt für eine Matrix A_i in Teil (a)* $\text{rang}(A_i) =$ *(Anzahl der Spalten von A_i), so sind die Spalten von A_i eine $\mathbb{Z}$-Basis von U_i.*

   (d) Geben Sie für die Matrizen A_i in Teil (a) mit $\text{rang}(A_i) <$ (Anzahl der Spalten von A_i) eine $\mathbb{Z}$-Basis von U_i an.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~sevenhec/Algebra13.html`

zu finden.

Abgabe bis Montag, den 4. November 2013, in der Vorlesung.