

Übungsaufgaben zur Algebra

1. (4 Punkte) Für $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt es 2^m unitäre Polynome vom Grad m im Polynomring $\mathbb{F}_2[x]$. Weil $\mathbb{F}_2[x]$ ein Euklidischer Ring und damit ein faktorieller Ring ist, läßt sich jedes unitäre Polynom vom Grad ≥ 1 eindeutig als Produkt von unitären und irreduziblen Polynomen schreiben. Listen Sie alle 30 = 2 + 4 + 8 + 16 unitären Polynome vom Grad $d \in \{1, 2, 3, 4\}$ und ihre Produkt-Zerlegungen in unitäre und irreduzible Polynome auf.

Hinweis: Beachten Sie Aussage (d) in der Liste in Aufgabe 2.

2. (6 Punkte) Ist R ein Integritätsring, so auch $R[x]$ (Beweis leicht, aber nicht Teil der Aufgabenstellung). Daher ist der Begriff "irreduzibel" (Definition 7.17 (a) der Vorlesung) wohldefiniert für Polynome in $R[x]$. Bei Irreduzibilitätsuntersuchungen von Polynomen gibt es ganz verschiedene nützliche Kriterien und Aussagen. Einige sind hier aufgelistet:

- (a) Eisenstein-Kriterium (7.25 (c) in der Vorlesung): Sei R ein faktorieller Ring (z.B. $R = \mathbb{Z}$) und $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ mit $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Sei $p \in R$ ein Primelement mit

$$p \mid a_j \text{ für } j \leq n-1, \quad p \nmid a_n, \quad p^2 \nmid a_0.$$

Dann ist $f(x)$ irreduzibel in $R[x]$.

- (b) Die Projektion $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p$ (p eine Primzahl) induziert einen Ringhomomorphismus $\pi_p : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{F}_p[x]$. Sei $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dann gilt: $\pi_p(f(x))$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_p[x] \Rightarrow f(x)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.

- (c) Sei R ein faktorieller Ring, K sein Quotientenkörper (z.B. $R = \mathbb{Z}$ und $K = \mathbb{Q}$) und $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in R[x]$. Dann gilt (7.25 (b) in der Vorlesung):

$f(x)$ ist irreduzibel in $R[x] \Rightarrow f(x)$ ist irreduzibel in $K[x]$.

Ist $\text{ggT}(a_n, \dots, a_0) = 1$, so gilt \Leftarrow .

- (d) Sei R ein Integritätsring (z.B. $R = \mathbb{Z}$ oder R ein Körper) und $f(x) \in R[x]$ unitär mit $\deg f(x) \in \{2, 3\}$. Dann gilt:

$$f(x) \text{ ist irreduzibel in } R[x] \iff f(x) \text{ hat keine Nullstelle in } R.$$

Für $\deg f(x) \geq 4$ gilt nur noch \Rightarrow . (Verallgemeinerung von 7.23 (b) auf R statt K)

- (e) Ist $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ unitär mit einer Nullstelle $b \in \mathbb{Z}$, so ist b ein Teiler von a_0 .

- (f) Sei R ein Integritätsring, $f \in R[x]$ und $\alpha \in R$ beliebig. Dann gilt: $f(x)$ ist irreduzibel in $R[x] \iff f(x + \alpha)$ ist irreduzibel in $R[x]$.

Zeigen Sie, daß die folgenden 12 Polynome irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$ sind. Sie dürfen die Aussagen in der Liste oben benutzen. Sie dürfen auch die Resultate von Aufgabe 1 benutzen.

$$\begin{array}{ll} x^2 - x + 1 & , \quad x^2 - x - 1, \\ x^3 + x^2 - 2x - 1 & , \quad x^3 + 10x^2 + 9x - 15, \\ x^3 + 3x^2 - x - 1 & , \quad x^3 + 12x^2 + 24x + 48, \\ x^4 + x^3 + 16x + 17 & , \quad 3x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 5x + 15, \\ 7x^3 - 8x^2 + 17x - 135 & , \quad x^6 + 17, \\ x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 18 & , \quad x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 4x^5 + 6x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 26x + 42. \end{array}$$

3. (2+2+2 Punkte) Für $m \in \mathbb{N}$ ist das m -te Kreisteilungspolynom $\Phi_m(x) \in \mathbb{C}[x]$ definiert durch

$$\Phi_m(x) := \prod_{a \text{ mit } 0 < a \leq m, \text{ggT}(a,m)=1} (x - e^{2\pi i \frac{a}{m}}).$$

(a) Zeigen Sie

$$x^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d(x).$$

(b) Zeigen Sie $\Phi_m(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Sie dürfen folgende Aussage benutzen:

(Polynomdivision mit Rest) Ist R ein Integritätsring und sind $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$ und ist $g(x)$ unitär, so gibt es eindeutige $q(x), r(x) \in R[x]$ mit $\deg r(x) < \deg g(x)$ und $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$.

(c) Es ist offenbar $\Phi_1(x) = x - 1$ und $\Phi_2(x) = x + 1$. Berechnen Sie $\Phi_m(x)$ für $m \in \{3, 4, 6, 12\}$.

Abgabe bis Montag, den 28. Oktober, in der Vorlesung.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter etc.) sind unter

<http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~sevenhec/Algebra13.html>

zu finden.