Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Christian Sevenheck

Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(1+1+1+1 Punkte)* Die Menge $R := M(2 \times 2, \mathbb{Q})$ der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$ ist ein nichtkommutativer Ring und ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Dimension 4.

   (a) Zeigen Sie: Ist $I \subset R$ ein Linksideal oder ein Rechtsideal und ist $I \cap GL(2, \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, so ist $I = R$.

   (b) Geben Sie $\mathbb{Q}$-Untervektorräume V_1, V_2 und V_3 von R mit den folgenden Eigenschaften an:
   $\dim V_1 = \dim V_2 = \dim V_3 = 2$.
   V_1 ist ein Unterring, aber weder Linksideal noch Rechtsideal.
   V_2 ist ein Linksideal, aber kein Rechtsideal.
   V_3 ist ein Rechtsideal, aber kein Linksideal.

2. *(1+1+2 Punkte)* Im Ring $\mathbb{R}[x]$ ist die Menge $J := \mathbb{R}[x] \cdot (x^3 + x)$ ein Ideal, und der Quotient $R := \mathbb{R}[x]/J$ ist ein kommutativer Ring mit Eins. $\mathbb{R}[x]$ und J sind auch $\mathbb{R}$-Vektorräume. Daher ist der Quotient R auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

   (a) Zeigen Sie: R hat als $\mathbb{R}$-Vektorraum die Dimension 3, und $[1], [x], [x^2]$ ist eine Basis. Geben Sie die Multiplikationstabelle für diese Basis an. Produkte von Basiselementen sollen natürlich als Linearkombinationen der Basiselemente geschrieben werden.

   (b) Geben Sie zwei Elemente $a, b \in R - \{0\}$ an, die $a \cdot b = 0$ erfüllen. (Daher ist R kein Körper.)

   (c) Nach Satz 6.11 (a) der Vorlesung hat man kanonische Bijektionen zwischen den Mengen

   $$\{\widetilde{I} \subset R \mid \widetilde{I} \text{ ist ein Ideal}\} \qquad \text{und} \qquad \{I \subset \mathbb{R}[x] \mid I \text{ ist ein Ideal und } J \subset I\}.$$

   Weil R kein Körper ist (siehe (b)), hat nach Satz 6.11 (b) die linke Menge mehr als nur die zwei Elemente $\{0\}$ und R. Finden Sie (mit Beweis) je vier Elemente in beiden Mengen. (Ohne Beweis: die beiden Mengen haben nur je vier Elemente.)

3. *(1+1+1+1 Punkte)* ((a) und (b) illustrieren, dass in 6.14 (e) die Voraussetzung "Körper" wichtig ist.)

   (a) Zeigen Sie: Ist R ein Integritätsring und sind $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$, so ist $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ und $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$.

   (b) Geben Sie ein Beispiel eines kommutativen Ringes R und zweier Polynome $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$ an, so daß $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ und $\deg(f(x) \cdot g(x)) < \deg f(x) + \deg g(x)$ gilt.

   (c) Geben Sie ein Beispiel eines kommutativen Ringes R und zweier Polynome $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$ an, so daß $f(x) \cdot g(x) = 0$ gilt.

   (d) Geben Sie ein Beispiel eines nichtkommutativen Ringes R, zweier Polynome $f(x), g(x) \in R[x] - \{0\}$ und eines Elements $c \in R$ an, so daß $f(c) \cdot g(c) \neq (f \cdot g)(c)$ ist.
   (Dann ist die Einsetzungsabbildung $R[x] \to R, f(x) \mapsto f(c)$ *kein* Ringhomomorphismus.)

4. *(2+2 Punkte)*

   (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wieviele verschiedene Nullstellen hat das Polynom $n \cdot x$ in $(\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z})[x]$? Beweisen Sie Ihre Antwort. Sie dürfen die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung für natürliche Zahlen benutzen.

   (b) Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Ring R und ein unitäres (d.h. Leitkoeffizient = 1) Polynom in $R[x]$ vom Grad n mit 2^{n-1} verschiedenen Nullstellen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~sevenhec/Algebra13.html`

zu finden.

Abgabe bis Montag, den 14. Oktober 2013, in der Vorlesung.