

Übungsaufgaben zur Algebra

1. (1+2 Punkte)

- (a) Die Permutation $\sigma \in S_n$ bestehe aus k Zykeln der Längen l_1, \dots, l_k mit paarweise disjunkten Trägern. Geben Sie Formeln für die Ordnung von σ und das Signum von σ an.
- (b) Schreiben Sie die Permutationen

$$\alpha := (8\ 7\ 6\ 5\ 4)(3\ 2\ 1)(7\ 5\ 3\ 1) \text{ und } \beta := (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8) \in S_8$$

als Produkte von zyklischen Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und berechnen Sie ihre Ordnungen und ihre Signa.

2. (1+3 Punkte) Definition: Zwei Elemente a und b einer Gruppe G heißen *konjugiert*, falls es ein Element $c \in G$ gibt mit $b = cac^{-1}$.

- (a) Zeigen Sie: ist $\rho = (a_1 a_2 \dots a_l) \in S_n$ eine zyklische Permutation und ist $\sigma \in S_n$, so ist

$$\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\sigma(a_2)\dots\sigma(a_l)),$$

insbesondere ist $\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1}$ zyklisch und hat dieselbe Ordnung wie ρ .

- (b) $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in S_n$ seien zyklische Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und mit $o(\alpha_1) \geq o(\alpha_2) \geq \dots \geq o(\alpha_k)$; ebenso seien $\beta_1, \dots, \beta_l \in S_n$ zyklische Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern und mit $o(\beta_1) \geq o(\beta_2) \geq \dots \geq o(\beta_l)$; es sei

$$\varphi := \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_k \text{ und } \psi := \beta_1 \circ \dots \circ \beta_l.$$

Zeigen Sie: φ und ψ sind genau dann konjugiert, wenn $k = l$ und $o(\alpha_i) = o(\beta_i)$ für $i = 1, 2, \dots, k$ ist.

3. (1+2+2 Punkte) Die *Diedergruppe* D_{2n} ist eine Gruppe mit $2n$ Elementen. Sie ist isomorph zu der Gruppe der Spiegelungen und Drehungen der Ebene \mathbb{R}^2 , die das regelmäßige n -Eck mit Mittelpunkt 0 invariant lassen.

- (a) Machen Sie für $n = 3$ und $n = 4$ je eine Zeichnung, die ein regelmäßiges n -Eck und die Spiegelachsen enthält. (Mit diesen Zeichnungen sollen Sie sehen, daß die Gruppe D_{2n} eine zyklische Untergruppe von n Drehungen enthält und dass das Komplement aus n Spiegelungen besteht.)
- (b) Es ist $D_{2n} = \{d_0, d_1, \dots, d_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$, wobei d_l die Drehung um den Winkel $l \cdot 2\pi/n$ ist, s_0 irgendeine Spiegelung und s_k für $k \in \{1, \dots, n-1\}$ die Spiegelung an der Spiegelachse mit Winkel $k \cdot \pi/n$ zur Spiegelachse von s_0 . Geben Sie die Verknüpfungstafel der Gruppe D_{2n} an.
- (c) Wieviele Konjugationsklassen von Spiegelungen gibt es in D_{2n} ? (Vorsicht; prüfen Sie ihre Antwort an den Fällen $n = 3$ und $n = 4$.)

4. (4 Punkte) Listen Sie alle Untergruppen der alternierenden Gruppe A_4 auf und begründen Sie Ihre Liste.

Hinweise: Nützlich sind: eine Liste der Elemente von A_4 (Aufgabe 3 auf Blatt 2), der Satz von Lagrange (=4.3 (c)) und der Satz, dass jede Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist (=4.7 (b)).

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter etc.) sind unter

<http://hilbert.math.uni-mannheim.de~sevenhec/Algebra13.html>

zu finden.

Abgabe bis Montag, den 23. September 2013, in der Vorlesung.