Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Christian Sevenheck

Blatt 2
09.09.2013

Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(4 Punkte)* Sei G eine Menge, $G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto ab$, eine assoziative Verknüpfung (multiplikativ geschrieben, ohne Verknüpfungssymbol), $G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$, eine Abbildung und $e \in G$ ein Element mit den Eigenschaften:

   (i) e ist eine *Linkseins*, d.h. $\forall\ a \in G \quad ea = a$,

   (ii) a^{-1} ist ein *Linksinverses* von a, d.h. $a^{-1}a = e$.

   Zeigen Sie:

   (a) a^{-1} erfüllt auch $aa^{-1} = e$ (ist also auch ein *Rechtsinverses*). Hinweis: Betrachten Sie $(a^{-1})^{-1}a^{-1}aa^{-1}$.

   (b) e erfüllt auch $ae = a$ (ist also auch eine *Rechtseins*).

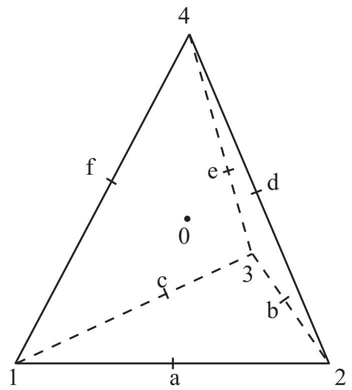
   Fazit: eine Menge G mit assoziativer Verknüpfung mit Linkseins und Linksinversen ist eine Gruppe.

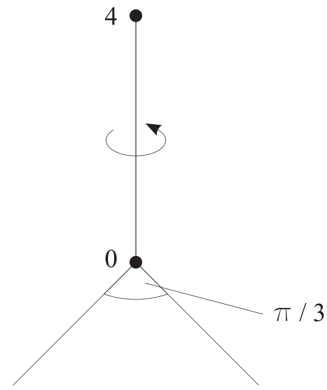
2. *(2+2 Punkte)*

   (a) Schreiben Sie die Permutationen $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_8$ und σ^{-1} und σ^{999} als Produkte von zyklischen Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern.

   (b) Schreiben Sie die Permutationen $\psi = (1\ 3\ 5\ 7)(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7\ 8) \in S_8$ und ψ^{-1} und ψ^{999} als Produkte von zyklischen Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern.

3. *(4 Punkte)* T sei ein gleichseitiges Tetraeder im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt 0, Ecken $1, 2, 3, 4$ und Kantenmittelpunkten a, b, c, d, e, f wie in der Skizze links.





   Jede Drehung, die das Tetraeder in sich überführt, permutiert die Ecken und wird durch diese Permutation eindeutig bestimmt. So wird die Drehungsgruppe des Tetraeders isomorph auf eine Untergruppe der S_4 abgebildet (diese ist die *alternierende Gruppe* A_4).

   Machen Sie eine Liste aller Drehungen und der zugehörigen Elemente der A_4. Geben Sie darin die Permutationen als Produkte zyklischer Permutationen mit paarweise disjunkten Trägern an. Charakterisieren Sie jede Drehung durch eine orientierte Drehachse und einen Drehwinkel (nur beim Drehwinkel π ist die Orientierung egal, und id ist die Drehung mit Winkel 0 um eine beliebige Achse). Zum Beispiel geben die Achse $\overline{04}$ und der Winkel $\frac{\pi}{3}$ die oben rechts skizzierte Drehung.

Bitte wenden !!!

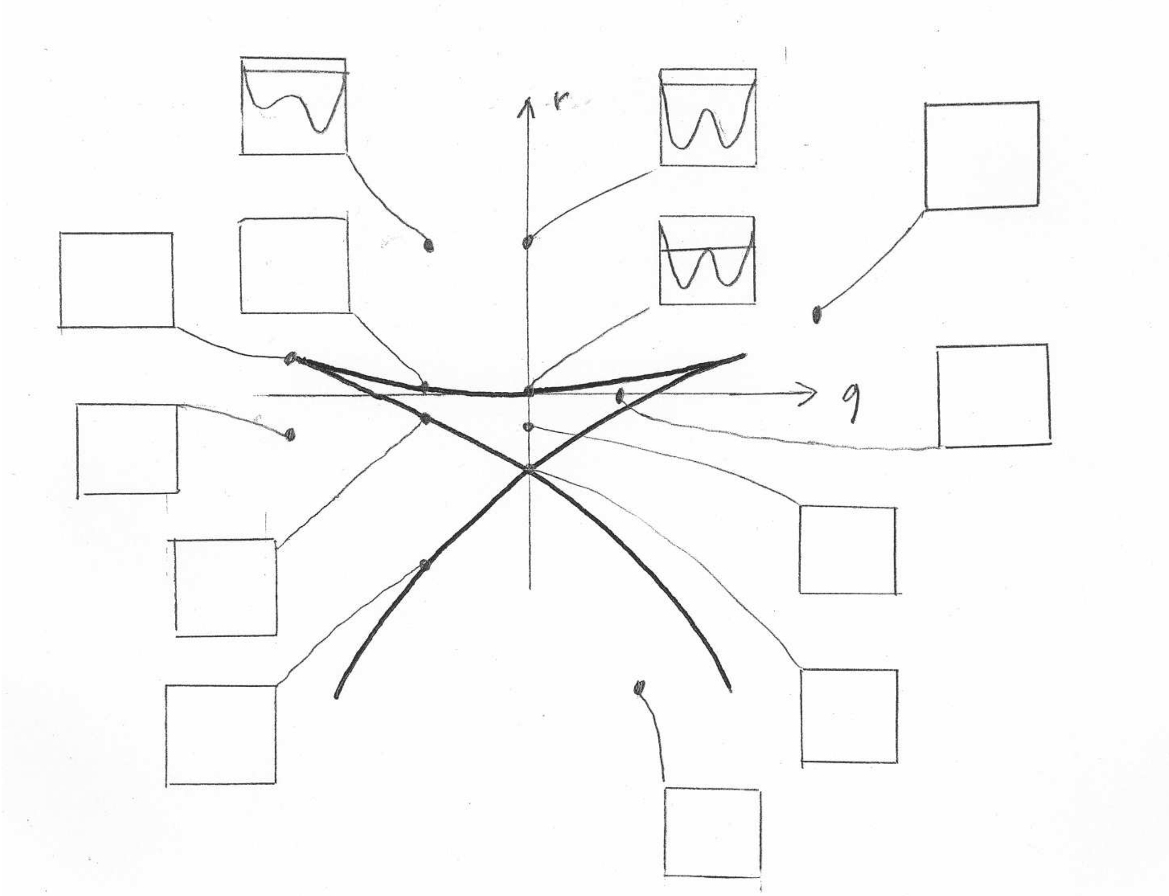
4. *(4 Punkte)* Wir betrachten die 2-Parameter-Familie von Polynomen

$$f_{q,r}(x) = x^4 - x^2 + qx - r$$

vom Grad 4 in x mit den beiden reellen Parametern q und r. Man kann ausrechnen, daß die Menge der Parameter $(q,r) \in \mathbb{R}^2$, für die $f_{q,r}(x)$ mehrfache Nullstellen hat, durch die Gleichung

$$4(1-12r)^3 - (-2-72r+27q^2)^2 = 0$$

gegeben ist. Es ist eine Kurve mit zwei Spitzen und einem Selbstdurchdringungspunkt. Sie ist im folgenden Bild skizziert. In den drei ausgefüllten Kästchen ist jeweils ein Teil des Funktionsgraphen von $f_{q,r}(x)$ für (q,r) am bezeichneten Punkt zusammen mit der x-Achse skizziert. Füllen Sie die zehn leeren Kästchen aus. Die Skizzen müssen nur qualitativ stimmen.



Hinweise

Ab Blatt 2 dürfen Sie Übungen **maximal zu zweit** abgeben. Bitte arbeiten Sie in diesem Fall die Lösungen wirklich zusammen aus, da die Übungen ein integraler Bestandteil der Vorlesung sind, und ohne Bearbeiten der Aufgaben das Verständnis des Stoffes erheblich leidet.
Aus organisatorischen Gründen geben Sie Ihre Lösungen bitte **nicht zusammengeheftet** ab (Büroklammer ist ok), und schreiben Sie bitte auf **jedes abgegebene Blatt** Ihren Namen.
In der Übung zur Vorlesung werden die Aufgaben besprochen. Hierbei sollen die Lösungen vorrangig von Ihnen selbst vorgerechnet werden. Natürlich sollen Sie auch Fragen zu vergangenen und gerade aktuellen Übungen sowie zum aktuellen Stoff der Vorlesung stellen.
Eine Prüfung kann ablegen, wer mindestens die Hälfte der Punkte in den Übungen erreicht hat **und** wer mindestens ein- bis zweimal eine Aufgabe in der Übung vorgerechnet hat. Die gleichen Kriterien gelten auch für die Vergabe eines Übungsscheins für die Vorlesung. Das Ablegen der Prüfung ist dafür nicht erforderlich.
Die Übungen werden von Frau **Natalja Schefer** durchgeführt. Sie wird auch Ihre Abgaben korrigieren. Sie wird Sie spätestens am Tag vor der Übung per email informieren, wer welche Aufgaben vorrechnen soll. Die Prüfungen werden als mündliche Prüfungen stattfinden, zur Terminvergabe wenden Sie sich bitte direkt in der Vorlesung an mich (oder per email).

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~sevenhec/Algebra13.html`

zu finden.
Abgabe bis Montag, den 16. September 2013, in der Vorlesung