Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Christian Sevenheck

Blatt 13
25.11.2013

Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(4 Punkte)*

   Zeichnen Sie Bilder der folgenden ebenen (affine-algebraischen) Kurven $C = V(f)$ in einer geeigneten Umgebung des Ursprungs. Sie dürfen ein Visualisierungs-Programm (z.B. *GeoGebra* oder *Surf*) benutzen, aber sie sollten zumindest verstehen, wie diese Bilder zustande kommen (oder sie von Hand zeichnen).

   (a) $f = x^2 - y^2 \in \mathbb{R}[x, y]$.
   (b) $f = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}[x, y]$.
   (c) $f = y^2 - (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4) \cdot (x^2 - 9) \in \mathbb{R}[x, y]$.
   (d) $f = y^2 - x^3 + x^2 \in \mathbb{R}[x, y]$.

2. *(4 Punkte)*

   Sei K ein Körper, $I_1, I_2 \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ Ideale und X_1, X_2 affin-algebraische Varietäten in K^n.

   (a) Zeigen Sie, dass aus $I_1 \subset I_2$ folgt, dass $V(I_1) \supset V(I_2)$.
   (b) Sei $X_1 \subset X_2$. Zeigen Sie: $I(X_2) \subset I(X_1)$.
   (c) Zeigen Sie, dass $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$. Finden Sie ein Beispiel, für das $I_1 \cdot I_2 \subsetneqq I_1 \cap I_2$.
   (d) Zeigen Sie, dass $V(I_1 + I_2) = V(I_1) \cap V(I_2)$.

3. *(4 Punkte)*

   Sei R ein noetherscher Ring und A eine endlich erzeugte R-Algebra. Zeigen Sie, dass A auch ein noetherscher Ring ist. (Hinweis: Untersuchen Sie Inklusionen von Idealen in Faktorringen und benutzen Sie den Hilbertschen Basissatz).

4. *(4 Punkte)*

   Beweisen Sie die folgende Version des Hilbertschen Nullstellensatzes (unter Verwendung einer der Versionen des Nullstellensatzes aus der Vorlesung):

   Jedes maximale Ideal $\mathbf{m}$ des Polynomringes $K[x_1, \ldots, x_n]$, wobei K algebraisch abgeschlossen ist, ist von der Form $\mathbf{m} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ für irgendein Element $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~sevenhec/Algebra13.html`

zu finden.

Abgabe bis Donnerstag, den 05. Dezember 2013, in der Vorlesung/Übung.