Übungsaufgaben zur Algebra

1. *(3+3 Punkte)*

   (a) Laut Aufgabe 1 von Blatt 8 sind die beiden Polynome

   $$f_1(x) = x^3 + x + 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$$

   irreduzibel in $\mathbb{F}_2[x]$. Daher sind die Quotientenringe

   $$K_1 := \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(f_1(x))} \quad \text{und} \quad K_2 := \frac{\mathbb{F}_2[x]}{(f_2(x))}$$

   Körper. Weil sie $\mathbb{F}_2$-Vektorräume der Dimension 3 sind, haben sie beide 8 Elemente.
   Finden Sie einen Körperisomorphismus $\varphi : K_1 \to K_2$ und beweisen Sie, daß er einer ist.
   Am besten benennen Sie dafür die Klasse $[x]$ in K_1 mit α und die Klasse $[x]$ in K_2 mit β.

   (b) Geben Sie die Multiplikationstabelle des Körpers K_1 zur $\mathbb{F}_2$-Basis

   $$0, 1, \alpha, \alpha + 1, \alpha^2, \alpha^2 + 1, \alpha^2 + \alpha, \alpha^2 + \alpha + 1$$

   an.

2. *(1+1+1+1 Punkte)* Finden Sie für die über $\mathbb{Q}$ algebraischen Zahlen

   $$\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \beta := \sqrt{3 + \sqrt{2}}, \quad \gamma := \sqrt{2} \cdot e^{2\pi i 1/3} \quad \text{und} \quad \delta := 5^{1/3} + 5^{2/3}$$

   unitäre Polynome in $\mathbb{Q}[x]$ der Grade 4, 4, 4 und 3, die α bzw. β bzw. γ bzw. δ als Nullstelle haben.
   Bemerkung (diese Bemerkung müssen Sie nicht beweisen): Tatsächlich ist

   $$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}] = 4 \quad \text{und} \quad [\mathbb{Q}(\delta) : \mathbb{Q}] = 3,$$

   und daher sind die Polynome, die Sie finden sollen, die Minimalpolynome von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

3. *(2+4 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie: Ist $K \supset \mathbb{Q}$ ein Körper und $\psi : K \to K$ ein Körperautomorphismus, so ist $\psi|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}$.

   (b) Zeigen Sie $\mathrm{Aut}_{\text{Körper}}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}\}$.
   Hinweis: Benutzen Sie (a) und die Aussage:

   $$a < b \iff b - a > 0 \iff b - a \text{ ist ein Quadrat einer reellen Zahl.}$$

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter etc.) sind unter

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/~sevenhec/Algebra13.html`

zu finden.

Abgabe bis Montag, 18. November 2013, in der Vorlesung.