Klausur Zahlentheorie 2007

Vorname Name:
Geburtsdatum:
Matrikelnummer:
Tarnname:

Kreuzen Sie je Frage genau eine Antwort an. Richtige Antworten werden mit einem Punkt bewertet, falsche Antworten mit Null Punkten.

1. Wieviele der Zahlen $2001, 2002, \ldots, 2009$ sind Primzahlen?

   ◯ höchstens eine ◯ mindestens zwei

   ◯ Das hängt davon ab, ob man Schaltjahre berücksichtigt oder nicht.

2. Gibt es ganze Zahlen x und y mit $2007\,x - 1991\,y = 1$?

   ◯ ja ◯ nein ◯ Ohne Kalender lässt sich das nicht entscheiden.

3. Welchen Rest lässt $455^{2007} + 1551^{2007}$ bei Division durch 2006 ?

   ◯ 0 ◯ 1 ◯ -1 ◯ Nichts davon stimmt.

4. Welche Rest lässt 4704699999999999999999999 bei Division durch 13 ?

   ◯ 0 ◯ 1 ◯ 2 ◯ 4 ◯ 7 ◯ 11 ◯ 12

5. Eine Carmichael-Zahl ist eine ungerade Zahl $n \geq 3$, die keine Primzahl ist und für die gilt

   ◯ $a^{n-1} \equiv 1 \pmod n \quad \forall a : (a, n) = 1;$

   ◯ $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n \quad \forall a : (a, n) = 1;$

   ◯ $a^{(n-1)/2} \in \{-1, 1\} \pmod n \quad \forall a : (a, n) = 1;$

6. Ein public key code ist

   ◯ eine in Ägypten gefundene Tafel aus Blei (chemisches Zeichen: Pb) mit einer bislang unentschlüsselten Anleitung zur Herstellung von Generalschlüsseln;

   ◯ ein Verschlüsselungsprotokoll; ◯ ein Ehrenkodex.

7. Ist 31 kubischer Rest modulo 100 ?

   ◯ ja ◯ nein ◯ Das ist keine korrekt gestellte Frage.

8. $\tau(2007) =$

   ◯ 2 ◯ 4 ◯ 6 ◯ nichts davon

9. $\varphi(2007) =$

   ◯ 444 ◯ 666 ◯ 2006 ◯ nichts davon

10. $\mu(2007) =$

○ 0 ○ 1 ○ -1 ○ nichts davon

11. $L(s, \varphi) =$

○ $\zeta(s)^2$ ○ $\zeta(s)\zeta(s-1)$ ○ $\zeta(s-1)/\zeta(s)$

12. Der Primzahlsatz besagt

○ $\pi(x) - x/\log x$ wechselt das Vorzeichen unendlich oft

○ $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o(1)$ ○ $\pi(x) = \frac{x}{\log x}(1 + o(1))$ ○ $\pi(x) \simeq x/\log x$

13. Es gibt 999! Möglichkeiten aus den Zahlen $1, 2, \ldots, 999$ durch Hintereinanderschreiben eine Zahl mit $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 = 2889$ Stellen zu bilden. Wieviel Prozent dieser 999! Zahlen sind Primzahlen?

○ 0% ○ ungefähr $\frac{1}{\log(999!)} \cdot 100\%$ ○ ungefähr $\frac{1}{2889 \log 10} \cdot 100\%$

○ ungefähr $\frac{999!}{10^{2889}} \cdot 100\%$ ○ 100% ○ Nichts davon stimmt.

14. Die Mellintransformation von $\pi(x)$ ist

○ $\zeta(s)$ ○ $\frac{\log \zeta(s)}{s}$ ○ $\frac{1}{s} \sum_p \frac{1}{p^s}$ ○ $\frac{1}{s} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ ○ $\frac{\zeta(x-0)+\zeta(x+0)}{2}$

15. Wer hat die Formel $\sum_n n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ entdeckt?

○ Gauß ○ Riemann ○ Lenin ○ ein Schweizer

16. Die Riemannsche Vermutung besagt, dass

○ alle nichttrivialen Singularitäten der Zetafunktion den Realteil 1/2 haben;

○ jede Riemannsche Fläche zu einer Kugel mit $g \geq 0$ Henkeln topologisch äquivalent ist;

○ die Zetafunktion keiner Differentialgleichung genügt;

○ etwas anderes gilt.

17. Was gibt es nicht?

○ das Riemannsche Integral ○ den Riemannschen Unordnungssatz

○ den Riemannsche Abbildungssatz ○ die Riemannsche Vermutung

○ Riemannsche Metriken ○ Das gibt es alles.

18. Kann man die Riemannsche Vermutung beweisen, indem man einen selbstadjungierten Operator konstruiert, dessen Eigenwerte affin linear in die nichttrivialen Nullstellen der Zetafuntion transformiert werden können?

○ ja ○ nein ○ vielleicht

19. Gilt $\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$ für $x \to \infty$?

○ ja ○ nein ○ Das ist zur Riemannschen Vermutung äquivalent.

20. Was ist eine Zufallsprimzahl?

   ◯ eine Zahl, die viele Fermat-Tests übersteht

   ◯ eine Zahl, die alle Fermat-Tests übersteht

   ◯ eine zufällig gebildete, etwa 200-stellige Zahl

   ◯ eine Zahl, die durch ein spezielles stochastisches Sieb fällt

21. Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X mit $P(X = X_i) = p_i$ ist

   ◯ $\sum X_i / \sum p_i$ ◯ $\sum X_i p_i$ ◯ $\sum X_i p_i (1 - p_i)$ ◯ $\left(\sum p_i X_i^2\right)^{1/2}$

22. Der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} (1/x^5) \sum_{x \le n \le 2x} n^4$ ist

   ◯ 0 ◯ $\frac{32}{5}$ ◯ $\frac{\pi}{4}$ ◯ ∞ ◯ etwas anderes

23. Kann man das regelmäßige n-Eck für unendlich viele Werte von n mit Zirkel und Lineal konstruieren?

   ◯ ja ◯ nein

   ◯ Das weiß man erst, wenn bekannt ist, ob es unendlich viele Fermatsche Primzahlen gibt.

24. Ist $\cos(\pi/n)$ für jede natürliche Zahl n ganzalgebraisch?

   ◯ ja ◯ nein ◯ Das ist eine der großen Streitfragen der Mathematik.

25. Die Menge der Primelemente eines Körpers R ist

   ◯ $\emptyset$ ◯ R ◯ $R \setminus \{0\}$ ◯ O_R

26. Ein Kreisteilungskörper ist

   ◯ ein algebraischer Zahlkörper K, für den $[K : \mathbf{Q}]$ eine Einheitswurzel ist;

   ◯ ein Körper der Form $\mathbf{Z}[e^{2\pi i/m}]$ $(m \ge 3)$;

   ◯ ein Körper K, für den $|K|$ eine Primzahlpotenz ist;

   ◯ nichts davon.

27. Ist $\{35\,x + 77\,y : x, y \in \mathbf{Z}\}$ ein Hauptideal von $\mathbf{Z}$?

   ◯ ja ◯ nein ◯ Das ist Ansichtssache.

28. Folgt aus $2 \cdot 7 = (4 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2})$, dass $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{2}$ kein ZPE-Ring ist?

   ◯ ja ◯ nein ◯ Das hängt von der Abweichung ab.

29. Ist $\{16\,x + 18\,y + 20\,z : x, y, z \in \mathbf{Z}\}$ ein Hauptideal von $\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$?

   ◯ ja ◯ nein ◯ Das ist wieder Ansichtssache.

30. Gehört $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ zum Ganzheitsring von $\mathbf{Q}(\sqrt{21})$?

   ◯ ja ◯ nein ◯ Das lässt sich nicht sagen.

31. Welche der folgenden Aussagen über einen algebraischen Zahlkörper K ist falsch?

   ◯ O_K ist Hauptidealring $\iff O_K$ ist ZPE-Ring

   ◯ O_K ist Hauptidealring $\iff h_K = 1$

   ◯ o_K ist stets ein ZPE-Ring

   ◯ $h_K = |o_K/O_K|$

   ◯ $\forall A \in o_k \quad \exists k \in \{1, \ldots, h_k\} : A^k$ ist Hauptideal

32. Gauß vermutete

   ◯ $h_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})} \to \infty$ für $d \to \infty$; ◯ $h_{\mathbf{Q}(\sqrt{-d})} \to \infty$ für $d \to \infty$;

   ◯ $h_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})} \to 1$ für $d \to \infty$; ◯ $h_{\mathbf{Q}(\sqrt{-d})} \to 1$ für $d \to \infty$.

33. Was ist das ε_d in der Dirichletschen Klassenzahlformel

$$h_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})} = -\frac{1}{\log \varepsilon_d} \sum_{0<n<D/2,(n,D)=1} \chi(n) \log \sin \frac{\pi n}{D} \ ?$$

   ◯ die Anzahl der Einheiten ◯ die Grundeinheit

   ◯ das superprimitive Element ◯ der Abstand von einem Hauptidealring

   ◯ nichts davon

34. Die Riemannsche Fläche von $w^2 - z^2 = 0$ ist topologisch äquivalent zu

   ◯ einer Kugel ◯ zwei Kugeln ◯ einem Torus ◯ einer Brezel

35. Das Geschlecht der Riemannschen Fläche von $w^n + z^n - 1 = 0$

   ◯ ist 1; ◯ ist n; ◯ ist $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$;

   ◯ kennt man nicht, solange die Riemannsche Vermutung noch offen ist.

36. Mit der Formel von Riemann und Hurwitz kann man

   ◯ einzelne Verzweigungsindizes berechen;

   ◯ die Monodromiegruppe einer Riemannschen Fläche bestimmen;

   ◯ eine Riemannsche Fläche parametrisieren;

   ◯ nichts davon machen.

37. Eine elliptische Funktion ist

   ◯ eine holomorphe Funktion mit genau zwei Perioden;

   ◯ eine auf einem Parallelogrammgitter holomorphe Funktion;

   ◯ eine affin lineare Transformation von $\wp(z)$;

   ◯ nichts davon.

38. Das Periodengitter von $\wp(z)$ ist

◯ $\{m + ni : m, n \in \mathbf{N}\}$; ◯ $\{m + ni : m, n \in \mathbf{Z}\}$;

◯ $\{mg_2 + ng_3 : m, n \in \mathbf{Z}\}$; ◯ $E(\mathbf{Z})$;

◯ aus der alleinigen Angabe "$\wp(z)$" nicht ersichtlich.

39. Elliptische Kurven heißen elliptisch, weil

◯ die Ellipse eine elliptische Kurve ist;

◯ sie mit der Fermatschen Vermutung zu tun haben und $x^n + y^n = 1$ eine ellipsenförmige Kurve in der Ebene ist;

◯ sie durch die Umkehrfunktionen von elliptischen Integralen parametrisiert werden können;

◯ sie homöomorph zu Tori mit ellipsenförmigen Querschnitten sind;

◯ es dafür einen anderen Grund gibt.

40. Gibt es eine elliptische Kurve E mit $|E(\mathbf{F}_2)| = 6$?

◯ ja ◯ nein ◯ Das ist zur Vermutung von Szpiro äquivalent.

41. Was sind schlechte Primzahlen?

◯ Carmichael-Zahlen

◯ Primzahlen, die die Diskriminante jeder elliptischen Kurve teilen.

◯ Primzahlen, die den Konduktor jeder elliptischen Kurve teilen.

◯ Schlechte Primzahlen an sich gibt es nicht.

42. Eine elliptische Kurve heißt halbstabil, wenn

◯ $E(\mathbf{R})$ zusammenhängend ist;

◯ $E(\mathbf{R})$ genau zwei Zusammenhangskomponenten hat;

◯ der Konduktor quadratfrei ist;

◯ die Diskriminante keine mehrfachen Nullstellen hat;

◯ etwas anderes gilt.

43. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

◯ $PSL(2, \mathbf{Z})$ ist eine Untergruppe von $PSL(2, \mathbf{R})$.

◯ $PSL(2, \mathbf{R})$ wird von $\tau \mapsto \tau + 1$ und $\tau \mapsto -1/\tau$ erzeugt.

◯ Spitzenformen sind Modulformen.

◯ Es gibt keine nichtkonstanten Spitzenformen vom Gewicht 2.

44. Das Gitter $\{(2 + i)m + (3 + 2i)n : m, n \in \mathbf{Z}\}$ hat den Modul

◯ i ◯ $\frac{3}{2} + 2i$ ◯ $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}+i}$

45. Ist $\{z = x + iy : 0 < x < 1, 0 < y, x^2 + y^2 > 1, (x-1)^2 + y^2 > 1\}$ ein Fundamentalgebiet für meromorphe Modulformen?

◯ ja ◯ nein ◯ Das hängt von der jeweiligen meromorphen Modulform ab.

46. Gilt $4014^2 + 4028048^2 = 4028050^2$?

◯ ja ◯ nein ◯ nicht immer

47. Wieviele Tripel $(x, y, z) \in \mathbf{N}^3$ mit $x^2 + y^2 = 3z^2$ gibt es?

◯ ja ◯ nein ◯ keins ◯ genau zwei ◯ unendlich viele

48. Die Vermutung von Taniyama und Shimura besagt,

◯ dass $L(E, \tau)$ für jede elliptische Kurve E mit Konduktor N eine Spitzenform vom Gewicht 2 bezüglich $\Gamma_0(N)$ ist,

◯ dass es für jede natürliche Zahl N und jede Spitzenform vom Gewicht 2 bezüglich $\Gamma_0(N)$ eine elliptische Kurve mit $L(E, \tau) = f(\tau) \quad \forall \tau \in U$ gibt,

◯ dass Spitzenformen vom Gewicht 2 bezüglich einer Untergruppe von $PSL(2, \mathbf{Z})$ stets über elliptische Funktionen parametrisiert werden können.

49. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

◯ Wenn es eine Freysche Kurve gibt, dann ist die Vermutung von Taniyama und Shimura falsch.

◯ Wenn die Vermutung von Taniyama und Shimura wahr ist, dann gibt es eine Freysche Kurve.

◯ Freysche Kurven sind stets halbstabil.

◯ Es gibt keine Freyschen Kurve und die Fermatsche Vermutung ist wahr.

◯ Wenn die Fermatsche Vermutung falsch ist, dann ist die Riemannsche Vermutung wahr.

50. Ding Junhui

◯ hat die Vermutung von Taniyama und Shimura bewiesen,

◯ hat den Chinesischen Restsatz widerlegt,

◯ ist ein talentierter Snooker-Spieler.